Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 16.05.2023 13:51:02
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____ О.Г. Локтионова
«10» 05 _____ 2023 г.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Основы математического анализа»
для направления подготовки 41.03.05 Международные отношения,
направленность (профиль) «Бизнес-аналитика и деловое
администрирование в международных отношениях»

Курск 2023

УДК 51

Составители: Т.В. Шевцова, И.В. Щиголева

Рецензент

Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики
Бредихина О.А.

Основы математического анализа: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Основы математического анализа» для направления подготовки 41.03.05 «Международные отношения», направленность (профиль) «Бизнес-аналитика и деловое администрирование в международных отношениях» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова, И.В. Щиголева – Курск, 2023. – 91 с.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий содержат описание методов, применяемых при решении задач математического анализа, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 41.03.05 «Международные отношения», направленность (профиль) «Бизнес-аналитика и деловое администрирование в международных отношениях». Материалы предназначены для студентов очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 363 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение.....4

Практическая работа № 1-4. Предел. Непрерывность.**Ошибка! Закладка не определена.**

Практическая работа № 5-8. Дифференцирование. Исследование функций. **Ошибка! Закладка не определена.**7

Практическая работа № 9-12. Интегрирование .....**Ошибка! Закладка не определена.**

Практическая работа № 13-18. Интегрирование ..**Ошибка! Закладка не определена.**

Введение

Самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями является высшей формой учебной деятельности студента, без нее невозможно успешное освоение дисциплины. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия.

Данная работа содержит методические указания по следующим разделам математического анализа: введение в математический анализ, дифференцирование функций, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции нескольких переменных, дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Далее предложены индивидуальные задания, которые даны в объеме 20 вариантов. В конце представлен список контрольных вопросов.

Практическая работа №1-4.
Предел. Непрерывность.

Функции действительного переменного

Понятие функции

Определение. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определённое значение другой переменной y, то y есть **функция** от x, или в символической записи, y = f(x). Переменная x наз. **независимой переменной** или **аргументом.**

Определение. Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила f(x), наз. **областью определения.**

Определение. Множество всех значений функции, которые она принимает в области определения, наз. **областью значений**.

Понятие предела функции

Определение. Число A называется *пределом функции f(x)* в точке a, если для любого ε>0 найдётся такое число δ>0, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение. Число A называется *правым (левым) пределом* функции f(x) в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что из неравенства $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для обозначения правого (левого) предела функции f(x) в точке a используют следующую символику: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=B$).

Критерий существования предела. Для того, чтобы в точке $x=a$ существовал предел функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой оба односторонних предела

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

Достаточно распространенными в курсе математики являются последовательности, то есть функции $y=f(n)$, заданные на множестве натуральных чисел N. Чтобы подчеркнуть, что аргумент

такой функции принимает только значения из множества натуральных чисел, его обозначают не x, а n. Для последовательностей f(n) достаточно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента n (при $n \to \infty$).

Определение. Число B называется *пределом последовательности* f(n), если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n > M$ выполняется неравенство $|f(n) - B| < \varepsilon$.

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x \to a(\infty)} [f(x)]^{\varphi(x)} = C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = B$, то $C = A^B$;

2) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела C решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \infty$, то есть имеем неопределённость вида $[1^\infty]$, то используем 2-ой замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3$ и $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x) = 1$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x} = 3^1 = 3$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{3x^2 + 1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e^{3}}=e^{-4}.$$

Непрерывность функции

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке a***, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a;

2) существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Те точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Различают разрывы двух видов.

1. Если в точке a существуют односторонние пределы функции, но, по крайней мере, один из них не равен значению данной функции в точке *a*, то говорят, что функция f(x) в точке *a* имеет разрыв первого рода. При этом возможны следующие случаи:

$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке a имеет устранимый разрыв);

$f(a-0)\neq f(a+0)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке a имеет разрыв с конечным скачком. При этом число $|f(a+0) - f(a-0)|$ называют скачком функции f(x) точке a).

2. Функция f(x) в точке a имеет разрыв второго рода, если в этой точке по крайней мере, один из односторонних пределов бесконечен или вовсе не существует.

Функция f(x) называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём в точке a она непрерывна справа ($f(a+0)=f(a)$), а в точке в - слева ($f(b-0)=f(b)$).

Непрерывные на отрезке функции обладают рядом важных свойств. Приведём одно из них.

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на интервале

$(a;b)$ существует такая точка *c,* в которой данная функция равна нулю.

В задачах 1-5 определить, какого рода разрывы имеют следующие функции в точке *a*

Пример 1. $f(x)=2^{1/(x-3)}$, $a=3$

Решение. Если $x\to 3-0$, то $\frac{1}{x-3}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3-0}2^{1/(x-3)}=0$. Если $x\to 3+0$, то $\frac{1}{x-3}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3+0}2^{1/(x-3)}=\infty$. Так как один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, *a*=3-точка разрыва 2-го рода.

Пример 2. $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$, a=1.

Решение. Выделим целую часть $f(x)=\frac{2(x-1)+7}{x-1}=2+\frac{7}{x-1}$. Если $x\to 1-0$, то $\frac{7}{x-1}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\frac{7}{x-1}\right)=-\infty$. Если $x\to 1+0$, то $\frac{7}{x-1}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\frac{7}{x-1}\right)=+\infty$.

Таким образом, функция при $x\to 1$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, x=1 является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 3. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+5}$, $a=-5$.

Решение. Если $x\to-5-0$, то $\frac{1}{x+5}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to-5-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+5}=-\frac{\pi}{2}$. Если $x\to-5+0$, то $\frac{1}{x+5}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-5+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+5}=\frac{\pi}{2}$. Итак, при $x\to -5$ функция имеет левый и правый конечные пределы, причём эти пределы различны. Следовательно, $x=-5$ является точкой разрыва 1-го рода. Разность

между правым и левым пределами (скачок) в точке разрыва равна $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Пример 4. $f(x)=\frac{x+1}{x^3+1}$, $a=-1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{1}{x^2-x+1}=1$,

$\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{1}{x^2-x+1}=1$. Итак,

$f(-1-0)=f(-1+0)$, но не равны $f(-1)$, значит, a=1 является устранимой точкой разрыва.

Пример 5. $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{при} \quad x\le 1\\ \frac{1}{1-x} & \text{при} \quad x>1\end{cases}$, $a=1$.

Решение. Если $x\to1-0$, то $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(2-x)=1$. Если $x\to1+0$, то $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\frac{1}{1-x}=-\infty$. Один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, $a=1$-точка разрыва 2-го рода.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Найти образ множества *M* при функциональном отображении *f*, взяв задания из таблицы 1.

Таблица 1

№	Задание	№	Задание
1.	$M=[-2;3]$, $f: x\,\alpha\; x^2+2x$	11.	$M=[-6;0]$, $f: x\,\alpha\; -x^2-10x$
2.	$M=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, $f: x\,\alpha\; -\cos x$	12.	$M=\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{9}\right]$, $f: x\,\alpha\; \lvert x\rvert$

3.	$M=[2;4]$, $f: x \alpha\ -x^2+6x-1$	13.	$M=[-2;4]$, $f: x \alpha\ 2\lvert x\rvert-1$
4.	$M=\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$, $f: x \alpha\ 2\sin x$	14.	$M=\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, $f: x \alpha\ \cos x$
5.	$M=[1;3]$, $f: x \alpha\ x^2-4x+3$	15.	$M=[-1;2]$, $f: x \alpha\ -x^4+1$
6.	$M=[-5;-3]$, $f: x \alpha\ x^2+8x+7$	16.	$M=[1;3]$, $f: x \alpha\ x^2-4x+5$
7.	$M=[-1;1]$, $f: x \alpha\ x^6-2$	17.	$M=[-1;1]$, $f: x \alpha\ -3x^2+3$
8.	$M=[-5;-1]$, $f: x \alpha\ -\lvert x+3\rvert$	18.	$M=[-2;1]$, $f: x \alpha\ 2\lvert x+1\rvert$
9.	$M=[0;5]$, $f: x \alpha\ x^2-8x+8$	19.	$M=[0;4]$, $f: x \alpha\ -x^2+4x-3$
10.	$M=[-\pi;0]$, $f: x \alpha\ -\sin x+2$	20.	$M=[1;3]$, $f: x \alpha\ (x-2)^4$

Задание 2

Вычислить предел функции, числовой последовательности, раскрыв неопределенность типа $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Задания взять из таблицы 2.

Таблица 2

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	11	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3+2n^2+n}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$

3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$	17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^5}+1}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3+1}$	19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x+1}{2x^5+3x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^3-3x^2}$

Задание 3

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Задания взять из таблицы 3

Таблица 3

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$	12	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$
6	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$	16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$
7	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
8	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$
9	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	19	$\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$
10	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	20	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

Задание 4

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы 4.

Таблица 4

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to -\pi/2}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot \mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\mathrm{tg}2x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-1}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{x}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi/2-x}$	20	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{ctg}x}{x-\pi/2}$

Задание 5

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы 5.

Таблица 5

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{5x^3}{2x+1}}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$	13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$
5	$\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$	15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2x^2-1}{x+1}}$
6	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}x}$
7	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$	17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{\sin x}{x^2}}$	18	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$	19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-1}\right)^{x^2}$

10	$\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$

Задание 6

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции. Задания взять из таблицы 6.

Таблица 6

№	Задание	№	Задание
1	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}; & -2\le x\le 2\\ 4-x; & 2<x<4\\ x-3; & 4\le x\le 6\end{cases}$	6	$f(x)=\begin{cases}x^2-2x; & -1\le x<2\\ \sqrt{x}; & 2\le x\le 4\end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases}x^2; & -2\le x<1\\ \sqrt{x-1}; & 1\le x<5\\ 7-x; & 5\le x<7\end{cases}$	7	$f(x)=\begin{cases}\lvert x\rvert; & -2\le x\le 2\\ \sqrt{x-1}; & 2<x<5\\ 2; & x=5\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi/2\\ 1; & x=\pi/2\\ \cos x; & \pi/2<x\le 3\pi/2\end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases}x+2; & x<-1\\ x^2; & -1\le x<2\\ 5-x; & x\ge 2\end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases}-\frac{5}{x}; & x\le -1\\ -6x; & -1<x\le 0\\ 0; & x>0\end{cases}$	9	$f(x)=\begin{cases}2x^3; & x\le 1\\ 2(x-2)^2; & 1<x\le 3\\ 7-2x; & x>3\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}3^x; & -1\le x<1\\ 5-3x; & 1\le x<3\\ 4; & x=3\end{cases}$	10	$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}; & x<0\\ \frac{2x+10}{3x+1}; & 0\le x<2\\ 3; & x\ge 2\end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Понятие функции.
2. Классификация функций.
3. Простейшие элементарные функции и их графики.
4. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
5. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?
6. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
7. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
9. Как раскрываются неопределенности видов $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0\,\infty]$.
10. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.
11. Сформулируйте второй замечательный предел.
12. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называются точками разрыва функции?
13. Охарактеризуйте точки разрыва I рода, II рода.
14. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительности другой бесконечно малой.
15. Чему эквивалентны при $x \to 0$ функции: $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{arctg}x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\log_a(1+x)$, $a^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$?

Практическая работа № 5-8.
Дифференцирование. Исследование функций.

Дифференцирование функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\Big|_{x=x_0}$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Так как дифференцирование функций с использованием только таблицы производных элементарных функций и основных правил дифференцирования не вызывает особых затруднений, то мы остановимся лишь на приемах вычисления производных сложных функций.

Производная сложной функции

Рассмотрим некоторую сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

В этой цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним и поэтому его называют независимой переменной. Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть $y = \sqrt{z}$ и $z = \cos x$. Здесь z есть аргумент функции y, но z, не будет независимой переменой. В результате, производная сложной функции $y = f[\varphi(z)]$ равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot y'_x .$$

Пример 1. Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \frac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции

$y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+x-1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}} \cdot (x^2+x-1)' =$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Производная функции, заданной в неявном виде

В некоторых случаях функция определяется уравнением, которое нельзя элементарными средствами разрешить относительно y, и приходится рассматривать y как неявную функцию от x. В таком варианте существует особый способ нахождения производной. Известно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей данного тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции (полагая, что y – сложная функция, зависящая от x), получаем равенство, откуда и выражаем y'

.

Пример 4. Найти производную от функции, определяемой уравнением $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. $(x^4 + y^4 - 4xy)' = 0'$,

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4(x'y + xy') = 0$$

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4y - 4xy' = 0$$

$$4y^3 \cdot y' - 4xy' = 4y - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - 4x) = 4y - 4x^3$$

$$y' = \frac{4y - 4x^3}{4y^3 - 4x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 5. Найти $y'(x)$ для заданной параметрически функции $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

Решение.

$$x'_t = (t - \sin t)'_t = 1 - \cos t$$

$$y'_t = (1 - \cos t)'_t = \sin t$$

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Если дана сложная функция, представляющая собой произведение или частное нескольких функций, причем числитель и знаменатель дроби в свою очередь содержат произведения, то следует обе части данного выражения сначала прологарифмировать по основанию y, применить соответствующие свойства логарифмов, а затем приступить к дифференцированию обеих частей. Этот прием носит название логарифмического дифференцирования. Его также используют, если функция содержит корни из дробей. К этому приему прибегают, если имеется показательно-степенная функция или функция вида $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 6. Найти производную функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}$.

Решение. Логарифмируем обе части равенства по основанию e

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x^2+x-2)+\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\ln(x^4-1).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1)+30x(x^2-1)(x+2)-12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{10x^4+15x^3+15x^2+15x+5+30x^4+60x^3-30x^2-60x-12x^4-24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}\cdot\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x+2)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y=(x^2-x+2)^{e^{x+1}}$.

Решение. Логарифмируем обе части по основанию e

$$\ln y = \ln(x^2-x+2)^{e^{x+1}}.$$

Используя свойство логарифма, получаем,

$$\ln y = e^{x+1}\ln(x^2-x+2).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (e^{x+1})'\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot[\ln(x^2-x+2)]'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = e^{x+1}\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+2}\cdot(2x-1)$$

$$y' = (x^2-x+2)^{e^{x+1}}\cdot e^{x+1}\left[\ln(x^2-x+2)+\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right].$$

Замечание. При дифференцировании степенно-показательной функции можно пользоваться формулой

$$(f(x)^{\varphi(x)})' = \varphi(x)\cdot f(x)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x)+f(x)^{\varphi(x)}\cdot\ln f(x)\varphi'(x),$$

если f(x) и φ(x) – дифференцируемые функции.

Задание 1

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 7.

Таблица 7

№	Задание	№	Задание
1	$y = x + \ln\frac{x-1}{x+1}$	11	$y = x^3 \ln x - x^2$
2	$y = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$	12	$y = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x}$
3	$y = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{arctg}x$	13	$y = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$
4	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	14	$y = \frac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
5	$y = x\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$	15	$y = \frac{\cos x}{1+\ln\cos x}$
6	$y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$	16	$y = \frac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
7	$y = \ln\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$	17	$y = (x^3+4)\ln(x^3+4)$
8	$y = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$	18	$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
9	$y = \mathrm{arctg}(x-1) + \frac{x-1}{x^2-2x+2}$	19	$y = \sqrt{3x+1}(\ln(3x+1)-3)$

10	$y=(3x^3-2x^2+3x)e^{-x}$	20	$y=\dfrac{4x-x^4}{1-3x^2}$

Задание 2

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 8.

Таблица 8

№	Задание	№	Задание
1	$y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$	11	$y=\ln(x\sin x)$
2	$y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$	12	$y=\log_2\dfrac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$
3	$y=3\ln(2x^3-4x)^2$	13	$y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}$
4	$y=\ln\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$y=5^{x^3}\cdot\ln^2 x$
5	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$	15	$y=\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$
6	$y=(xe^{2x}+3)^5$	16	$y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
7	$y=\sqrt{\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$	17	$y=\log_3(x^3-1)$
8	$y=x\ln(3x^2+\sqrt{9x^4+1})$	18	$y=\log_2[\log_3(x^2-3)]$
9	$y=\sin(x^2+2^x)$	19	$y=\ln\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}$
10	$y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$	20	$y=\sqrt[3]{\ln\cos\dfrac{x+2}{3}}$

Задание 3

Используя логарифмическое дифференцирование, найти производную функции. Задания взять из таблицы 9.

Таблица 9

№	Задание	№	Задание
1	$y=(x^2+2x)^{\sqrt{x}}$	16	$y=(\sqrt{x})^x$
2	$y=(\sqrt{x^2-1})^{x^3-3}$	17	$y=(x^2+5x)^{\frac{1}{x}}$
3	$y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$	18	$y=\left(\frac{x}{1-x}\right)^x$
4	$y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$	19	$y=(x^2+1)^{\cos x}$
5	$y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$	20	$y=(\cos x)^{\sin x}$
6	$y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^{\sqrt{x}}$	21	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$
7	$y=(\sin x)^{\arcsin x}$	22	$y=(x+1)^{\ln x}$
8	$y=(\cos x)^{\arccos x}$	23	$y=(\ln x)^{x^2-2}$
9	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{arctg}x}$	24	$y=(\log_2 x)^{2^x}$
10	$y=(\mathrm{arcctg}x)^{1+x^2}$	25	$y=(3^x)^{\log_3 2}$
11	$y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$	26	$y=(\cos 2x)^{\mathrm{ctg}2x}$
12	$y=(\sqrt{x^2-4})^{\ln x}$	27	$y=(\sqrt{x^2+1})^{\ln\sqrt{x^2+1}}$
13	$y=(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$	28	$y=(\mathrm{arctg}e^x)^{e^{-x}}$
14	$y=x^{\cos x}$	29	$y=(\sqrt{e^x})^{\ln x}$
15	$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{x^3-3}$	30	$y=(\sqrt{1+\ln^2 x})^{e^x}$

Задание 4

Найти производную неявно заданной функции. Задания взять из таблицы 10.

Таблица 10

№	Задание	№	Задание
1	$y^2 + xy + x^2 = 1$	11	$x - \cos^2 y - \ln\cos x = 0$
2	$x^3 + 2xy - y^3 = 0$	12	$x - \sin y \cdot e^{\cos x} = 0$
3	$\sin\frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y} = tg(x - y)$	13	$y = \ln\cos x - y^2$
4	$y\ln y - xe^y = 1$	14	$ctg\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$
5	$x = 1 - ye^{xy}$	15	$y\cos x + x\sin y = x + y$
6	$y = x + arctgy$	16	$y\cos x + x\cos y = 0$
7	$y = \sin(x + y)$	17	$e^x - e^y = e^{x+y}$
8	$x + y = \arcsin x + \arccos y$	18	$x^2 y = e^{\frac{x}{y}}$
9	$3^x + 3^y = 3^{x+y}$	19	$x + y + e^y arcctgx = 0$
10	$x^3 + y^3 = xy$	20	$\ln x = arctg\frac{y}{x}$

Задание 5

Найти производную функции, заданной параметрически. Задания взять из таблицы 11.

Таблица 11

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = 2^{-t} \\ y = 2^{2t} \end{cases}$

2	$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = \ln(t+1) \\ y = \dfrac{1}{t+1} \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = 3t + 6t^2 \\ y = t^2 + 3t^3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = t^3 + t^2 + t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t-1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t-1}\right)^2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + 2 \\ y = t^3 + t + 4 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3^{-t} \\ y = 5^t \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = -t - t^3 + 1 \\ y = t^4 + 3t^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 2\sin t - 2t\cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$

Задание 6

Исследовать функции f(x) методами дифференциального исчисления и построить график функции. Задания взять из таблицы 12.

Таблица 12

N	f(x)	N	f(x)
1	$\frac{x^3+4}{x^2}$	11	$(2x+3)e^{-2(x+1)}$
2	$\frac{x^2-x+1}{x-1}$	12	$\frac{e^2(x+1)}{2(x+1)}$
3	$\frac{2}{x^2+2x}$	13	$3\ln\frac{x}{x-3}-1$
4	$\frac{4x^2}{3+x^2}$	14	$(3-x)e^{x-2}$
5	$\frac{12x}{9+x^2}$	15	$\frac{e^{2-x}}{2-x}$
6	$\frac{x^2-3x+3}{x-1}$	16	$\ln\frac{x}{x-2}+1$
7	$\frac{4-x^3}{x^2}$	17	$(x-2)e^{3-x}$
8	$\frac{x^2-4x+1}{x-4}$	18	$\frac{e^2(x-1)}{2(x-1)}$
9	$\frac{2x^3+1}{x^2}$	19	$3-3\ln\frac{x}{x+4}$
10	$\frac{(x-1)^2}{x^2}$	20	$-(2x+1)e^{2(x+1)}$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной.
2. Физический и геометрический смысл производной.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.
4. В чем заключается суть логарифмического дифференцирования и в каких случаях его целесообразно применять?

5. Каково правило дифференцирования функции, заданной неявно?

Практическая работа № 9-12.
Функции нескольких переменных

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определённая и непрерывная в некоторой области D. Полагая, например, $y = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной x. Она также может обозначаться $f'_x(x, y)$.

Аналогично, полагая $x = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной y. Она также может обозначаться $f'_y(x, y)$.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xx}(x, y); \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y).$$

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример. Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [y = const] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$

$$= -\sin(3x - 4y) \cdot (3 \cdot x' - 0) = -3\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=[x=const]=(\cos(3x-4y))'=-\sin(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-\sin(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=4\sin(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=[y=const]=(-3\sin(3x-4y))'=-3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-3\cos(3x-4y)\cdot(3\cdot x'-0)=-9\cos(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[x=const]=(-3\sin(3x-4y))'=-3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=-3\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=12\cos(3x-4y);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=[x=const]=(4\sin(3x-4y))'=4\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)'=$$
$$=4\cos(3x-4y)\cdot(0-4\cdot y')=-16\cos(3x-4y).$$

Для решения следующих заданий воспользоваться таблицей 27.

Задание 1 Для функции z = f(x,y) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 2 Найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Задание 3 Найти полный дифференциал функции z = f(x,y).

Задание 4 Найти градиент функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 5 Найти производную функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$ по направлению вектора (1, 2).

Задание 6 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 7 Разложить функцию z = f(x,y) по формуле Тейлора (при n = 2) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Таблица 27

№	f(x,y)	x_0	y_0	a	b	c	d
1	$\frac{x^2}{y^2}\cdot\sin(x-y)$	0.1	1.2	-4	1	1	2
2	$\frac{x}{y^2}\cdot\cos(x+y)$	-0.2	1.8	-2	2	1	2
3	$\frac{x}{y^2}\cdot\ln(x^2+y)$	-1	1.8	-2	3	1	3
4	$\frac{y-4}{\sqrt{y}+2x^2}\cdot(3+x+y)$	-2	4.5	-3	3	1	5
5	$\frac{\sin(y+x^2)}{\sqrt{y}+2x^2}$	-2	4.5	-3	2	0	5
6	$\frac{\cos(y^2x)}{y+2x^2}$	-2	1	-3	1	0.5	2
7	$\sin(x+2y)\cdot\cos(x^2)$	-0.2	1	-1	1	0.5	1.5
8	$\frac{\sin(x-y)}{2+\cos(xy)}$	-0.6	1.2	-2	0	0	1.5
9	$\frac{e^{x-y}}{1.25-\cos(xy)}$	-0.5	1	-0.7	0	0.5	1.3
10	$\frac{\mathrm{arctg}(x+y)}{\cos(x^2+y^2)}$	-0.6	1.6	-0.7	0	1.4	1.9
11	$\frac{\mathrm{arctg}(x^2y)-1}{\sin(y-x)}$	0.6	0	0.5	0.7	-0.1	0.1
12	$\arcsin(0.1\cdot xy)\cdot\sin y$	0.1	3	-1	2	2	4
13	$\ln(x+0.2y)\cdot\sin(y-x)$	0	3	-0.2	1	2	4
14	$\sqrt{x+y}\cdot\sin(2y+x)$	1	1	-0.3	1.4	0.4	2

15	$\sqrt{x+y^2}\cdot\cos(2y+x)$	1	1	-0.5	1.5	0.8	2
16	$tg(xy)\cdot\cos(x+y)$	0.4	0.3	-0.6	0.9	0.1	0.8
17	$tg(2x+y^2)\cdot\cos(x^2y)$	0.4	0.3	0.3	0.5	0.1	0.6
18	$\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[5]{x-y}$	1	2	0	1.2	-0.1	2.3
19	$\sqrt[3]{\sin(x^2+y)}\cdot x$	-1	1	-2	-0.5	-2	2
20	$\sqrt[5]{\sin(x-y)}\cdot y^2$	-1.5	1	-1.5	-0.5	0.8	2

Контрольные вопросы

1. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
2. Записать формулы для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
3. Записать формулы для вычисления объёма и площади боковой поверхности тела, полученного вращением дуги кривой вокруг оси ОХ и вокруг оси ОУ, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
4. Что такое частная производная?
5. Как формулируется теорема о смешанных производных?
6. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
7. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл?
8. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
9. В чём заключается геометрический смысл градиента?
10. Что такое производная по направлению?
11. Что такое локальный экстремум? Глобальный экстремум? Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
12. Как проходят линии уровня функции двух переменных в окрестности точки локального экстремума?

Практическая работа № 13-18.
Интегрирование

Первообразная

Определение. Первообразной для функции y=f(x) на данном интервале (a,b) называется функция y=F(x) такая, что для всех x$\in$(a,b) выполняется условие:

$$F'(x) = f(x).$$

Пример. Функция F(x)= $x^3/3$ является первообразной для функции f(x)=x^2 на интервале (-∞,∞), так как выполняется условие $((x^3/3)'=x^2)$.

Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов

Определение. Если функции F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b], то функция F(x)+C, где C=const называется неопределенным интегралом для функции f(x) на интервале [a,b]. Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Пример.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

14. $\int shx\, dx = chx + C;$

15. $\int chx\, dx = shx + C;$

16. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - ctgx\right| + C;$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|tgx + \frac{1}{\cos x}\right| + C.$

Методы интегрирования

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

Пример 1. Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 8}{\sqrt{x} - 2} dx;$ б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx;$

в) $\int \frac{4 - \sqrt{9 - x^2}}{9 - x^2} dx;$ г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x} dx.$

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем

почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

а) $$\int\frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx=\int\frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx=$$

$$=\int(x+2\sqrt{x}+4)\,dx=\int xdx+2\int x^{1/2}dx+4\int dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+4\cdot x+C=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3}+4x+C.$$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

б) $$\int\frac{2\cos^2x+3\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx=\int\left(\frac{2\cos^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}+\frac{3\sin^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{2}{\sin^2x}+\frac{3}{\cos^2x}\right)dx=2\int\frac{dx}{\sin^2x}+3\int\frac{dx}{\cos^2x}=$$

$$=2\cdot(-\mathrm{ctg}x)+3\cdot\mathrm{tg}x+C=3\cdot\mathrm{tg}x-2\cdot\mathrm{ctg}x+C.$$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

в) $$\int\frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx=\int\left(\frac{4}{9-x^2}-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}\right)dx=$$

$$=-4\int\frac{dx}{x^2-9}-\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=-4\cdot\frac{1}{2\cdot3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\arcsin\frac{x}{3}+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

г) $$\int\frac{5^x\cdot e^x-3^x}{2^x}dx=\int\left(\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}-\frac{3^x}{2^x}\right)dx=\int\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}dx-\int\frac{3^x}{2^x}dx=$$

$$=\int\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x dx-\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}+C=$$

$$= \frac{\frac{5^x \cdot e^x}{2^x}}{\ln 5 + \ln e - \ln 2} - \frac{\frac{3^x}{2^x}}{\ln 3 - \ln 2} + C =$$

$$= \frac{5^x \cdot e^x}{2^x \cdot (\ln 5 + 1 - \ln 2)} - \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины a справедливо равенство:

$$d(x + a) = dx,$$

поэтому $\int f(x)dx = \int f(x)d(x + a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a \cdot x) = a \cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx = \frac{1}{a} \cdot d(a \cdot x), \qquad (a \neq 0)$$

поэтому $\int f(x)dx = \frac{1}{a} \cdot \int f(x)d(a \cdot x)$.

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sin(7x + 2)dx$; б) $\int \sqrt[3]{3 - x}\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{4x+3}$; г) $\int e^{-2x+7}dx$;

д) $\int 5^{7x-3}dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x+2)dx = \frac{1}{7}\cdot\int \sin(7x+2)d(7x+2) = -\frac{1}{7}\cdot\cos(7x+2)+C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k \neq 0$ имеют место формулы

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C$$

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C$$

б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = -\int (3-x)^{1/3}d(3-x) = -\frac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C =$

$= -\frac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n \neq -1, k \neq 0) \qquad (1.7)$$

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{d(4x+3)}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\ln|4x+3|+C.$

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot\ln|kx+b|+C. \qquad (1.8)$$

г) $\int e^{-2x+7}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x+7}d(-2x+7) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+7}+C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b} + C.$$

д) $\int 5^{7x-3}dx = \frac{1}{7}\int 5^{7x-3}d(7x-3) = \frac{1}{7}\cdot\frac{5^{7x-3}}{\ln 5} + C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot\int\frac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot tg\left(4-\frac{x}{3}\right)+C$

(см. табличный интеграл 8).

Пример 3. Найти интегралы

а) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$;

б) $\int\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+2}}dx$;

в) $\int x^3(2+x^4)^5dx$;

г) $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int\frac{3^x}{4+3^x}dx$;

е) $\int(x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx$.

Решение.

а) сделаем замену переменной полагая $t=-x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t=-x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)'dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2dx} = \int e^{-x^2}\cdot xdx = \int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos xdx = d(\sin x) = d(\sin x+2)$, тогда обозначим $t=\sin x+2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x+2}}d(\sin x+2) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = \int t^{-1/3}dt =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2}\cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{2}(\sin x+2)^{2/3} + C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t = 2 + x^4$.

Тогда $dt = d(2+x^4) = (2+x^4)'dx = 4x^3dx$, т.е. $dt = 4x^3dx$, откуда $x^3dx = \frac{1}{4}\cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3(2+x^4)^5dx = \int (2+x^4)^5\cdot x^3dx = \int t^5\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^5dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{24}\cdot t^6 + C = \frac{1}{24}\cdot(2+x^4)^5 + C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$ и заменой $t = \arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (\arcsin x)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (\arcsin x)^3 d(\arcsin x) =$$

$$= \int t^3dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\cdot\arcsin^4 x + C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t = 4 + 3^x$. Тогда $dt = (4+3^x)'dx = 3^x\cdot\ln 3dx$, откуда $3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int \frac{3^x}{4+3^x}dx = \int \frac{1}{4+3^x}\cdot 3^x dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln 3}dt = \frac{1}{\ln 3}\cdot\int\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\ln|t| + C = \frac{1}{\ln 3}\cdot\ln|4+3^x| + C = \log_3(4+3^x) + C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t = x^2 + 6x$. Тогда $dt = d(x^2 + 6x) = (x^2 + 6x)'dx = (2x + 6)dx = 2(x + 3)dx$, т.е. $dt = 2(x + 3)dx$ и $(x + 3)dx = \frac{1}{2}dt$.

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int (x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx = \int \cos(x^2+6x)\cdot(x+3)dx =$$

$$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+6x) + C.$$

Задание 1.

Найти интегралы из таблицы 13, результат проверить дифференцированием.

Таблица 13

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{3dx}{\sqrt{4-x^2}}$	11	$\int \frac{5x^8+3}{x^3}dx$
2	$\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	12	$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$
3	$\int \frac{2^x - 3^x}{4^x}dx$	13	$\int \frac{2dx}{x^2-9}$
4	$\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx$	14	$\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx$
5	$\int \frac{2^x \cdot e^x - 1}{2^x}dx$	15	$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
6	$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$	16	$\int \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}dx$
7	$\int \frac{x^2+5x+6}{x+2}dx$	17	$\int \frac{1+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}dx$

8	$\int \frac{7\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$	18	$\int \frac{2x\sin^2 x+3}{\sin^2 x}\,dx$
9	$\int \left(\sin x+\frac{e^x}{2}+\sqrt[6]{x}\right)dx$	19	$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$
10	$\int \frac{3^x+4^x}{2^x}\,dx$	20	$\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\,dx$

Задание 2.

Найти интегралы из таблицы 14, результат проверить дифференцированием.

Таблица 14

N	Задание	N	Задание	N	Задание
1	$\int \sin\left(1-\frac{2x}{3}\right)dx$	8	$\int \frac{1}{\sin^2(5x+1)}\,dx$	15	$\int \frac{1}{5-3x}\,dx$
2	$\int (1-5x)^{1/5}\,dx$	9	$\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx$	16	$\int 2^{1-7x}\,dx$
3	$\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$	10	$\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^4 dx$	17	$\int 2^{\frac{x+1}{2}}\,dx$
4	$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\,dx$	11	$\int \frac{1}{(1-3x)^{1/5}}\,dx$	18	$\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}\,dx$
5	$\int \frac{1}{(2x-1)^{1/2}}\,dx$	12	$\int \frac{1}{3-5x}\,dx$	19	$\int \frac{1}{1-7x}\,dx$
6	$\int \frac{1}{3^{2-4x}}\,dx$	13	$\int \sin\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$	20	$\int \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$
7	$\int \frac{1}{4x-1}\,dx$	14	$\int \left(1-\frac{x}{4}\right)^5 dx$	21	$\int \cos\left(1-\frac{x}{7}\right)dx$

Задание 3.

Найти интегралы из таблицы 15, результат проверить дифференцированием.

Таблица 15

N	Задание	N	Задание
1	$\int x\cos x^2\,dx$	11	$\int x\cdot e^{1-x^2}\,dx$
2	$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$	12	$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
3	$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x}\,dx$	13	$\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x}\,dx$
4	$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$	14	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
5	$\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$	15	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$
6	$\int 2^{x^2}\cdot x\,dx$	16	$\int e^x\cos(e^x)\,dx$
7	$\int x\cdot e^{4-x^2}\,dx$	17	$\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$
8	$\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx$	18	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
9	$\int x^2(2+x^3)^4\,dx$	19	$\int (x^3-4x)^{10}(3x^2-4)\,dx$
10	$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$	20	$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx$

Задание 4

Найти интегралы из таблицы 16, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

Таблица 16

N	Задание	N	Задание
1	$\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$	11	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
2	$\int arctg2x\,dx$	12	$\int \ln x\,dx$

3	$\int \arcsin(x+1)\,dx$	13	$\int (1-3x)\cdot 2^{x}dx$
4	$\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$	14	$\int \ln(1-x)\,dx$
5	$\int (2x-1)\cos x\,dx$	15	$\int x\ln 2x dx$
6	$\int (2x+1)\cdot e^{2x}dx$	16	$\int x\cdot 2^{-x}dx$
7	$\int (x+1)\mathrm{arctg}x\,dx$	17	$\int \arcsin(x+2)\,dx$
8	$\int (1-x)\ln x\,dx$	18	$\int \ln(1-3x)\,dx$
9	$\int (2x-3)\cos 3x\,dx$	19	$\int (x+1)\cdot \sin 5x\,dx$
10	$\int x\cdot e^{1-x}dx$	20	$\int \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$

Задание 5.

Найти интегралы из таблицы 17, содержащих квадратный трехчлен.

Таблица 17

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{2x-3}{x^2-6x+25}dx$	11	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$
2	$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$	12	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$
3	$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	13	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$
4	$\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$	14	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$
5	$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx$	15	$\int \frac{2x+2}{2x^2+x+1}dx$
6	$\int \frac{x+1}{x^2-10x+26}dx$	16	$\int \frac{5x-1}{x^2+6x+18}dx$

7	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$	17	$\int \frac{4x-1}{4x^2+2x+3}dx$
8	$\int \frac{2x-1}{4x^2+4x+5}dx$	18	$\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$
9	$\int \frac{x}{2x^2-4x+10}dx$	19	$\int \frac{2x}{6x-10-x^2}dx$
10	$\int \frac{x+1}{x^2-6x+15}dx$	20	$\int \frac{2x+1}{15x-7-3x^2}dx$

Задание 6

Найти интегралы из таблицы 18 от рациональной дроби, предварительно разложив ее на сумму простейших дробей.

Таблица 18

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+4x+4)}dx$	11	$\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$
2	$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$	12	$\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+4)}dx$
3	$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$	13	$\int \frac{x+7}{x^3-2x^2+2x}dx$
4	$\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$	14	$\int \frac{x^3+x}{x^4-4x^2+4}dx$
5	$\int \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$	15	$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x^2+9)}dx$
6	$\int \frac{x+3}{(x^2+2)(x^2-2x+1)}dx$	16	$\int \frac{x^2+2x+5}{(x^2+4x+4)(x^2+4)}dx$
7	$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-4)(x^2-5x+6)}dx$	17	$\int \frac{x^2+x-3}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$

8	$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-81}dx$	18	$\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+4x^2}dx$
9	$\int \frac{x^2-x+5}{x^3+x^2}dx$	19	$\int \frac{2x-1}{x^3+x^2+4x+4}dx$
10	$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+1)(x-1)}dx$	20	$\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-4x}dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
6. Объясните суть непосредственного интегрирования.
7. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
8. Найдите интеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двумя способами.
9. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
10. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

19. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

20. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^m x dx$, $\int ctg^n x dx$.

21. Методы нахождения интегралов вида $\int stc^{2m} x dx$, $\int cosec^{2n} x dx$.

Определенный интеграл

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Теорема. Пусть функция F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b]. И пусть x=φ(t) дифференцируемая монотонная функция на интервале [α,β], причем φ(α)=a; φ(β)=b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1 + x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$; при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

$$\int_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int_1^4 (2t^2 - 2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Решение. Пусть $\ln x = t$, тогда $d\ln x = dt$, $\frac{1}{x}dx = dt$. При $x = 1$, $\ln 1 = t$, $t = 0$; при $x = e$, $\ln e = t$, $t = 1$. Получим $\int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x\Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{vmatrix} = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x \cdot (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - 2\int\limits_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2\sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Пример 4.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходится.

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

Решение.

а)

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5} = \lim_{a\to\infty} \int\limits_1^a \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2} x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14.5}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int\limits_1^a \frac{d(x+3.5)}{(x+3.5)^2 + \frac{9}{4}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+3.5}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^a =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x+7}{3}\Bigg|_1^a = \frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a+7}{3} - \operatorname{arctg}3\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}3\right).$$

б)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-1/4}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{3/4}}{3/4}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0} x^{3/4}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Если на интервале [a,b] задана непрерывная функция y=f(x), причем f(x)≥0 и a<b, то из геометрической иллюстрации видим, что

$$\int_a^b f(x)dx = S.$$

где S площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, с боков прямыми x=a и x=b и сверху графиком функции y=f(x) (см. рис. 1)

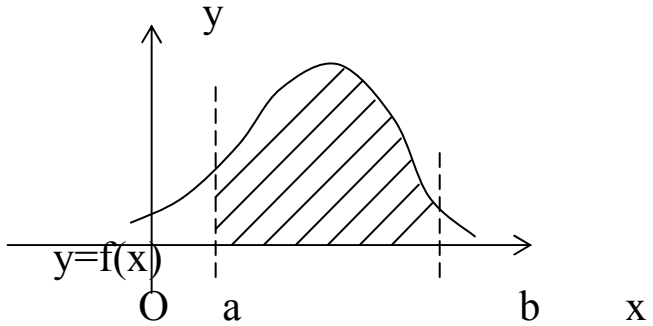
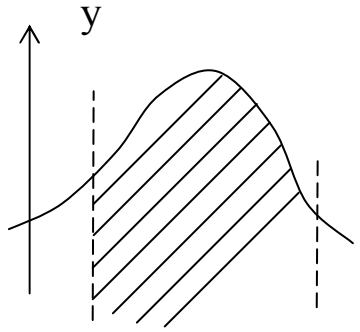


Рис. 1. Вычисление площади криволинейной трапеции

Если условие f(x)≥0 не выполняется, то нужно разбить интервал [a,b] на части корнями уравнения f(x)=0, выделить интервалы знакопостоянства функции, вычислить интегралы на каждом из интервалов и просуммировать по модулю полученные значения. Получим площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции y=f(x), с боков прямыми x=a и x=b.



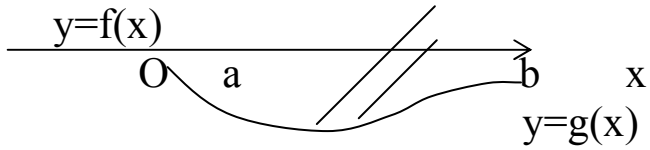


Рис. 2. Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть на интервале [a,b] заданы непрерывные функции y=f(x) и y=g(x), причем f(x)≥ g(x) для x∈[a,b]. Если нужно найти площадь фигуры, ограниченной с боков прямыми x=a и x=b и графиками функций y=f(x) и y=g(x), то (см. рис.2) площадь равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Пример

Вычислить площадь (рис. 3), заключенную внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение:

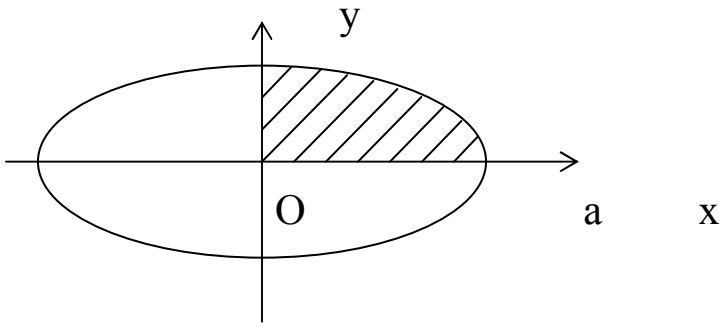


Рис. 3. Площадь эллипса

Уравнение части эллипса, удовлетворяющей условию x≥0, y≥0 можно записать в виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь четверти эллипса равна

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi ab}{4}.$$

Полная площадь эллипса равна S=πab.

Задание 1.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, задания взять из таблицы 19.

Таблица 19

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int_1^3 \left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int_1^4 \left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int_1^2 \left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int_0^1 \left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int_2^4 \left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int_2^5 \left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int_0^1 \left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int_1^2 \frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int_1^2 \left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int_{-2}^{-1} \left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int_1^2 \left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int_1^2 \left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int_1^3 \frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int_0^1 \left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17	$\int_2^3 \left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2 \left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$

19	$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	20	$\int_1^9 \left(\frac{x^{3/2} + x + 5}{x} + \cos 2x \right) dx$

Задание 2.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Задания взять из таблицы 20.

Таблица 20

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{6x+1}}$	2	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{5x+1}}$
3	$\int_2^3 \frac{xdx}{1-\sqrt{4x+1}}$	4	$\int_1^2 \frac{dx}{5+\sqrt{3x-1}}$
5	$\int_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$	6	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_6^7 \frac{2x^2dx}{\sqrt{x-5}}$	8	$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{\sqrt{x+4}}$
9	$\int_2^3 \frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+7x}-6}$
11	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+4}dx$	12	$\int_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{6x+1}}$
13	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{3x+1}}$	14	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{7x+1}}$
15	$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	16	$\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$

17	$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{8x+1}}$	18	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	20	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$

Задание 3.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Задания взять из таблицы 21.

Таблица 21

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4}$	2	$\int_0^1 (3x+7)^{10}dx$
3	$\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x}dx$	4	$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{\mathrm{tg}^8 x}{\cos^2 x}dx$	6	$\int_1^2 \frac{3x^2dx}{x^3+5}$
7	$\int_0^{1/2} \frac{\arccos^3 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8	$\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x}dx$
9	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$	10	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)}$
11	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}^2 x+x}{1+x^2}dx$	12	$\int_1^3 \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
13	$\int_2^3 \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$	14	$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$
15	$\int_{2,5}^3 (2x-5)^{17}dx$	16	$\int_1^2 \frac{\mathrm{ctg}^{10} x}{\sin^2 x}dx$

17	$\int_1^2 x^2 5^{x^3-1}dx$	18	$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
19	$\int_0^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

Задание 4.

Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям. Задания взять из таблицы 22.

Таблица 22

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_{-2}^0 (x^2+5x+6)\cos 2xdx$	2	$\int_{-3}^0 (x+3)\sin 4xdx$
3	$\int_1^2 xe^x dx$	4	$\int_{-1}^0 (x^2+2x+1)\sin 3xdx$
5	$\int_1^2 (4-3x)e^{-3x}dx$	6	$\int_0^1 (4x+3)\cos 2xdx$
7	$\int_1^2 \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$	8	$\int_0^1 (3x+4)e^{3x}dx$
9	$\int_1^2 \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$	10	$\int_1^3 \ln(2x+3)dx$
11	$\int_0^\pi (6x-10)\sin 2xdx$	12	$\int_0^1 (x+1)\ln(x+1)dx$
13	$\int_{-1}^0 \arcsin(x+1)dx$	14	$\int_0^1 \ln(x^2+4)dx$
15	$\int_0^2 (1-6x)\cos xdx$	16	$\int_0^{\frac{1}{9}} \arccos(9x-1)dx$

17	$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\cos^2 x}$	18	$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sin^2 x}$
19	$\int\limits_2^4 x\sin^2 xdx$	20	$\int\limits_1^3 \mathrm{arcctg}2xdx$

Задание 5.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Задания взять из таблицы 23.

Таблица 23

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	$\int\limits_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+2}$	2	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$
3	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$
5	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx$	6	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+6}$
7	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	8	$\int\limits_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
9	$\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+10}$	10	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x-6}$
11	$\int\limits_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	12	$\int\limits_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
13	$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)}$	14	$\int\limits_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

15	$\int\limits_{11/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-11x+2}$	16	$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+2}$
17	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	18	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$
19	$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$	20	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3x}$

Задание 6.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся. Задания взять из таблицы 24.

Таблица 24

№	$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$	№	$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
1	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
9	$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^3}$

13	$\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int\limits_{-1/5}^0 \frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int\limits_2^4 \frac{2dx}{(2-x)^2}$
19	$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int\limits_{3/2}^4 \frac{dx}{(2x-3)^2}$

Задание 7.

Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь. Задания взять из таблицы 25.

Таблица 25

№	$y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$	№	$y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$
1	$y = x^2 - 4x + 3$ $y = x + 3$	2	$y = x^2 - 8x + 7$ $y = -5x + 5$
3	$y = x^2 + 4x$ $y = x + 4$	4	$y = 9x^2 + 6x + 1$ $y = -x + 1$
5	$y = (x-2)^2$ $y = 4x - 8$	6	$y = -(x+3)(x-2)$ $y = x - 2$
7	$y = 3x - x^2$ $y = -x$	8	$y = 2x^2 - 4x + 1$ $y = 2x - 3$
9	$y = -x^2 - 8x + 1$ $y = -x - 2$	10	$y = x^2 - 2x$ $y = \frac{1}{2}x + 5$
11	$y = (x+1)(x-4)$ $y = 5x - 4$	12	$y = x^2 + 6x + 1$ $y = 2x + 1$

13	$y = 2x^2 + 8x + 1$ $y = 6x + 1$	14	$y = (x-1)^2$ $y = x + 1$
15	$y = -x^2 + x + 5$ $y = -2x + 7$	16	$y = x^2 + 3x + 1$ $y = 4x + 1$
17	$y = -2x^2 + 5x - 3$ $y = -3x - 3$	18	$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ $y = 4x + 1$
19	$y = (x+5)(x-1)$ $y = 3.5x - 3.5$	20	$y = x^2 + x + 6$ $y = 4x + 6$

Задание 8.

Вычислить длины дуг кривых. Задания взять из таблицы 26.

Таблица 26

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	$y = 2e^{\frac{x}{2}}$, $\ln 3 \le x \le \ln 8$	11	$y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$
2	$\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6 \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ox,Oy	12	$2y - x^2 + 3 = 0$ Между точками пересечения с осями Ox
3	$y = e^x$, $0 \le x \le 1$	13	$y = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
4	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$	14	$y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $0 \le x \le 9$
5	$y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2$	15	$y = 4 - \frac{x^2}{2}$, $y \ge 0$

6	$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3,\ 0 \le x \le 5$	16	$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}dt,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
7	$y = \int_0^x \sqrt{\sin 2t}dt,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$	17	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
8	$\begin{cases} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{cases},\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	18	$x = a\cos t$ $y = -2a\ln\sin t,$ от т. А (0,0) до т. В (x_0, y)
9	$\rho = 7(1-\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	19	$\rho = 2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
10	$\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases},\ \pi \le t \le 2\pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t-\sin t) \\ y = 5(1-\cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le \pi$

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.

2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. –Ч. 2. – 432 с.

3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. –М. : Физматлит, 2009. – Ч. 3. – 544 с.

4. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. − М.: Флинта, 2012. − 165с. – Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

Дополнительная учебная литература

5. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. - 464 с.

6. Туганбаев, А.А. Математический анализ. Ряды. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А.Туганбаев. – 3-е изд., доп. − М.: Флинта, 2012. − 48с. // Режим доступа − http: //biblioclub.ru/.

7. Тютюнов, Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст]: [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. - Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.

8. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.