

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 01.09.2018

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be250bd2374d76f5c0ce536f0fcb

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии



ОТКРЫТЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Открытые транспортные задачи. Задачи с дополнительными условиями: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 27 с.

Изложены основные сведения о решении открытых транспортных задач и задач с дополнительными условиями с помощью метода потенциалов. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений». Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л. 1,4. Уч.- изд. л.1,3. Тираж 100 экз. Заказ 2135. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Цель занятия	4
2. Краткие теоретические сведения	4
2.1. Открытая транспортная задача с избыточным спросом	4
2.2. Открытая транспортная задача с избыточным предложением.....	6
2.3. Транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность дуг	7
2.3.1. Ограничения на пропускную способность снизу	7
2.3.2. Ограничения на пропускную способность сверху.....	8
3. Пример выполнения задания	9
4. Индивидуальные задания.....	14
5. Контрольные вопросы.....	27

ОТКРЫТЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ.

ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Цель занятия

Получение навыков решения открытых транспортных задач и задач с дополнительными условиями с помощью метода потенциалов.

Задание. Даны три транспортные задачи специального вида: с избыточным спросом, избыточным предложением и ограничениями на пропускную способность маршрутов. Привести их к стандартному сбалансированному виду и решить методом потенциалов.

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Открытая транспортная задача с избыточным спросом

Пусть имеется m складов A_1, \dots, A_m , на которых имеется запасы однородной продукции в количествах a_i ($i = \overline{1, m}$), n пунктов потребления (розничных магазинов) B_1, \dots, B_n с величиной спроса b_j ($j = \overline{1, n}$), причем имеет место неравенство $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, то есть

спрос превышает суммарный запас, такая транспортная задача называется *несбалансированной с избыточным спросом*. Дана также матрица $C = (c_{i,j})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ удельных транспортных расходов, где $c_{i,j}$ – стоимость доставки одной единицы продукции от i -го поставщика j -му потребителю.

Требуется найти план перевозок $X = (x_{i,j})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, где $x_{i,j}$ – объем поставок продукции от i -го поставщика j -му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят спроса каждого из потребителей, то есть $b_j \geq \sum_{i=1}^m x_{i,j}$, $j = \overline{1, n}$, и запасы

поставщиков полностью вывозятся, то есть $a_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, и

суммарные транспортные расходы являются минимально

возможными, то есть $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min$. Получаем математическую

модель вида:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Данная задача сводится к стандартному виду сбалансированной транспортной задачи путем введения в рассмотрение фиктивного

поставщика с номером $m+1$ с объемом запасов $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. В

результате транспортная задача становится сбалансированной, так как

выполняется равенство $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$.

Таким образом, матрица тарифов перевозок $C = (c_{i,j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ дополняется $m+1$ строкой $C_{m+1, \bullet}$, соответствующей фиктивному поставщику. При этом мы полагаем $C_{m+1, j} = 0, j = 1, \dots, n$, то есть дополнительная строка матрицы тарифов состоит из одних нулей, так как фактических перевозок от фиктивного поставщика не происходит и величины поставок $X_{m+1, j}, j = 1, \dots, n$ от фиктивного поставщика потребителям интерпретируются как реальные недопоставки этим потребителям, то есть уровень недопоставок находится как задача оптимизации экономических решений.

После приведения транспортной задачи с избыточным спросом к сбалансированному виду, она решается методом потенциалов обычным образом.

2.2. Открытая транспортная задача с избыточным предложением

Аналогичная процедура применяется в случае открытой транспортной задачи с избыточным предложением.

Мы имеем неравенство $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то есть суммарный запас превышает суммарный спрос. Такая транспортная задача называется *несбалансированной с избыточным предложением*.

Требуется найти план перевозок $X = (x_{i,j})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, где $x_{i,j}$ – объем поставок продукции от i -го поставщика j -му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят из запасов, то есть $a_i \geq \sum_{j=1}^n x_{i,j}$, $i = \overline{1, m}$, спрос всех потребителей удовлетворен, то есть $b_j = \sum_{i=1}^m x_{i,j}$, $j = \overline{1, n}$ и суммарные транспортные расходы являются минимально возможными, то есть

$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min$. Получаем математическую модель вида:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{i,j} \rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача с избыточным предложением сводится к стандартному виду сбалансированной транспортной задачи путем введения в рассмотрение фиктивного потребителя с номером $n+1$ с объемом

запасов $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$. В результате транспортная задача становится сбалансированной, так как выполняется равенство

$\sum_{j=1}^{n+1} b_j = \sum_{i=1}^{m+1} a_i$. Таким образом, матрица тарифов перевозок

$C = (c_{i,j})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ дополняется $n+1$ столбцом $C_{\bullet, n+1}$,

соответствующей фиктивному потребителю. При этом мы полагаем $C_{i, n+1} = 0, i = 1, \dots, m$, то есть дополнительный столбец матрицы тарифов состоит из одних нулей, так как не происходит фактических перевозок к фиктивному потребителю и величины поставок $X_{i, n+1}, i = 1, \dots, m$ от поставщиков к фиктивному потребителю интерпретируются как фактические остатки на складах поставщиков, т.е. уровень остатков у поставщиков определяется в результате решения задачи оптимизации.

После приведения транспортной задачи с избыточным предложением к сбалансированному виду, она решается методом потенциалов обычным образом.

2.3. Транспортные задачи с ограничениями на пропускную способность дуг

2.3.1. Ограничения на пропускную способность снизу

Пусть для некоторой дуги (i_0, j_0) двудольного графа транспортной задачи имеется ограничение на пропускную способность снизу вида $X_{i_0, j_0} \geq c > 0$. Такое ограничение может возникнуть, например, при наличии отдельной договоренности i_0 -го поставщика и j_0 -го потребителя о гарантированных поставках в объеме c .

Такая специальная транспортная задача сводится к обычному виду путем замены запаса i_0 -го поставщика по формуле $a'_{i_0} = a_{i_0} - c$ и спроса j_0 -го потребителя по формуле $b'_{j_0} = b_{j_0} - c$, то есть и запасы и спрос уменьшаются на одну и ту же величину c . Задача при этом остается сбалансированной. Далее измененная задача T' решается методом потенциалов с получением своего оптимального плана

$$X' = (x'_{i,j})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}.$$

Для получения оптимального плана исходной задачи рассчитанный план X' вспомогательной задачи далее изменяем

только в позиции (i_0, j_0) по формуле $x_{i_0, j_0} = x'_{i_0, j_0} + c$, то есть расчетная величина теперь увеличивается на то же значение c .

2.3.2. Ограничения на пропускную способность сверху

Пусть для некоторой дуги (i_0, j_0) двудольного графа транспортной задачи имеется ограничение на пропускную способность снизу вида $X_{i_0, j_0} \leq c$. Такое ограничение может возникнуть, например, при большой удаленности пунктов и ограниченности транспортных средств доставки.

Для приведения такой задачи к стандартному виду потребителя j_0 представляем в виде двух столбцов, исходного, для которого мы берем уменьшенный спрос $b'_{j_0} = c < b_{j_0}$, оставляя транспортные тарифы в столбце неизменными, и дополнительного столбца $n+1$, для которого выбирается спрос в размере $b_{n+1} = b_{j_0} - c$ и транспортные тарифы для поставщиков отличных от i_0 -го, копируем из столбца j_0 , то есть используем формулу $C_{i, n+1} = C_{i, j_0}, i \neq i_0$. Для поставщика i_0 берем транспортный тариф $C_{i_0, n+1} = \infty$, тем самым мы запрещаем поставки от i_0 -го поставщика j_0 -му потребителю, превышающие заданный уровень c .

Далее полученная стандартная транспортная задача решается обычным образом методом потенциалов. После получения оптимального плана $X' = (x'_{i, j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n+1}$ вспомогательной задачи оптимальный план $X = (x_{i, j})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ получается следующим образом.

Столбцы отличные от j_0 -го переносятся в итоговый план без изменений: $X_{\bullet, j} = X'_{\bullet, j}, j \neq j_0$. Столбец с номером j_0 рассчитывается по формулам:

$$X_{i, j_0} = X_{i, j_0} + X'_{i, n+1}, i \neq i_0,$$

$$X_{i_0, j_0} = X'_{i_0, j_0}.$$

3. Пример выполнения задания

1. Решить транспортную задачу с избыточным спросом

	B_1	B_2	B_3	Предложение	
A_1	2	4	1	10	
A_2	3	2	5	10	
Спрос	8	8	7	23	20

Решение.

Вводим фиктивного поставщика A_3 :

	B_1	B_2	B_3	Предложение	
A_1	2	4	1	10	
A_2	3	2	5	10	
A_3	0	0	0	3	
Спрос	8	8	7	23	23

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения.

	B_1	B_2	B_3	Предложение	
A_1	3 2	4	7 1	10	
A_2	2 3	8 2	5	10	
A_3	3 0	0	0	3	
Спрос	8	8	7	23	23

Применяем метод потенциалов для приведения начального опорного плана к оптимальному:

	B_1	2	B_2	1	B_3	1	Предложение
A_1	0	3 2	3 4	7 1	10		
A_2	1	2 3	8 2	3 5	10		
A_3	-2	3 0	1 0	1 0	3		
Спрос		8	8	7	23	23	

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно? текущий план является оптимальным.

Ответ:

Поставки:

A_1 : 3 (B_1), 7 (B_3);

A_2 : 2 (B_1), 8 (B_2).

Недопоставки:

B_1 -3;

Транспортные издержки:

$$z = 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 35 \text{ у.е.}$$

2. Решить транспортную задачу с избыточным предложением

	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2	4	1	20
A_2	3	1	5	10
Спрос	8	8	7	23 30

Решение.

Вводим фиктивного потребителя

	B_1	B_2	B_3	B_4	Предложение
A_1	2	4	1	0	20
A_2	3	1	5	0	10
Спрос	8	8	7	7	30 30

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Предложение
A_1	6 2	4	7 1	7 0	20
A_2	2 3	8 1	5	0	10
Спрос	8	8	7	7	30 30

Для оптимизации начального плана применяем метод потенциалов:

	B_1	2	B_2	0	B_3	1	B_4	0	Предложение
A_1	0	6 2	4 4	7 1	7 0	20			
A_2	1	2 3	8 1	3 5	-1 0	10			
Спрос		8	8	7	7	30 30			

Имеется клетка (2, 4) с отрицательной относительной оценкой $d_{24} = -1$. Включаем эту клетку в базис:

	B_1	2	B_2	0	B_3	1	B_4	0	Предложение
A_1	0	+ 6 2	4 4	7 1	- 7 0	20			
A_2	1	- 2 3	8 1	3 5	+ -1 0	10			
Спрос		8	8	7	7	30 30			

$Q = \min\{7, 2\} = 2$, клетка (2, 1) уходит из базиса:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Предложение
A_1	8 2	4	7 1	5 0	20
A_2	3	8 1	5	2 0	10
Спрос	8	8	7	7	30 30

Снова применяем метод потенциалов:

	B_1	2	B_2	2	B_3	1	B_4	0	Предложение		
A_1	0	8	2	2	4	7	1	5	0	20	
A_2	-1	2	3	8	1	5	5	2	0	10	
Спрос		8		8		7		7		30	30

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно, текущий план является оптимальным.

Ответ:

Поставки:

A_1 : 8 (B_1), 7 (B_3);

A_2 : 8 (B_2).

Остатки на складах:

A_1 : 5, A_2 : 2.

Транспортные издержки:

$$z = 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 31 \text{ у.е.}$$

3. Решить сбалансированную транспортную задачу с заданным ограничением на пропускную способность ячейки сверху.

	B_1	B_2	B_3	Предложение	
A_1	2	4	1(≤ 3)	20	
A_2	3	1	5	3	
Спрос	8	8	7	23	23

В ячейке (1,3) имеется ограничение на пропускную способность сверху: $x_{1,3} \leq 3$.

Разбиваем столбец потребителя B_3 на 2

	B_1	B_2	B_3	B_3'	Предложение	
A_1	2	4	1	∞	20	
A_2	3	1	5	5	3	
Спрос	8	8	3	4	23	23

Находим начальный опорный план методом наименьшего значения:

	B_1	B_2	B_3	B_3'	Предложение			
A_1	8	5	4	3	1	∞	20	
A_2	3	3	1	5	4	5	3	
Спрос	8	8	3	4	4	5	23	23

Приводим начальную таблицу к оптимальной методом потенциалов:

1 этап:

	B_1 2	B_2 4	B_3 1	B_3' 8	Предложение
A_1 0	8 2	5 4	3 1	∞ ∞	20
A_2 -3	4 3	3 1	7 5	4 5	3
Спрос	8	8	3	4	23 23

Относительные оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно, текущая таблица, т.е. начальная является и оптимальной.

Ответ:

Поставки:

A_1 : 8 (B_1), 5 (B_2), 3 (B_3);

A_2 : 3 (B_2), 4 (B_3);

Транспортные затраты:

$$z = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 62 \text{ у.е.}$$

4. Решить сбалансированную транспортную задачу с заданным ограничением на пропускную способность ячейки снизу.

	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2	4(≥ 5)	1	20
A_2	3	1	5	3
Спрос	8	8	7	23 23

В ячейке (1, 2) имеется ограничение на пропускную способность снизу: $x_{1,2} \geq 5$. Приведем данную задачу к стандартной. Вычтем из запасов первого поставщика и величины спроса третьего потребителя заданную величину 5. Получаем транспортную задачу:

	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	2	4	1	15
A_2	3	1	5	3
Спрос	8	3	7	18 18

Решаем полученную задачу обычным способом.

Сначала находим начальный опорный план методом наименьшего значения.

	B_1	B_2	B_3	Предложение
A_1	8 2	4	7 1	15
A_2	0 3	3 1	5	3
Спрос	8	3	7	18 18

Заметим, что мы на последнем шаге поместили в базис также нулевую клетку (2, 1), которая не дает вклада в транспортные расходы, но необходима, так как в базисе должно быть $2 + 3 - 1 = 4$ клеток.

Выполним первый этап метода потенциалов.

	B_1	2	B_2	0	B_3	1	Предложение
A_1	0	8 2	4 4	7 1	15		
A_2	1	0 3	3 1	3 5	3		
Спрос		8	3	7	18	18	

Относительные оценки небазисных клеток являются неотрицательными. Следовательно, текущая таблица является оптимальной и потребовался только один этап метода потенциалов.

Таким образом, нами получен оптимальный план $X' = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

вспомогательной транспортной задачи. Перейдем теперь к оптимальному плану исходной задачи с помощью преобразования, которое было описано в кратких теоретических положениях: $x_{1,2} = x'_{1,2} + 5 = 5$. Получаем оптимальный план основной задачи:

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Поставки:

A_1 : 8 (B_1), 5 (B_2), 7 (B_3);

A_2 : 3 (B_2).

Транспортные издержки:

$$z = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 49.$$

4. Индивидуальные задания

№	Транспортные задачи варианта					
1		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	10	
	A_2	3	2	5	10	
	Спрос	8	9	7	24	20
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	20	
	A_2	3	5	5	20	
	Спрос	8	8	7	23	40
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	$1(\leq 2)$	20	
	A_2	3	4	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	$4(\geq 2)$	3	20	
	A_2	3	1	5	3	
	Спрос	8	8	7	23	23

№	Транспортные задачи варианта				
2		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	1	4	8	10
	A_2	3	2	5	10
	Спрос	8	9	7	24 20
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	2	5	20
	Спрос	8	8	7	23 40
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 2)$	20
	A_2	1	4	5	3
	Спрос	8	8	7	23 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	$4(\geq 3)$	3	20
	A_2	3	1	5	3
	Спрос	1	8	7	23 23
3		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	10
	A_2	3	2	5	10
	Спрос	8	9	7	24 20
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	5	2	20
	Спрос	8	8	7	23 40
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	20
	A_2	3	1	5	3
	Спрос	8	8	7	23 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	3	10
	A_2	$3(\geq 2)$	1	5	14
	Спрос	8	8	8	24 24

№	Транспортные задачи варианта					
4		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	10	
	A_2	3	2	5	6	
	Спрос	8	9	7	24	16
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	20	
	A_2	3	5	2	8	
	Спрос	8	8	7	23	28
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1(≤ 2)	10	
	A_2	3	1	5	13	
	Спрос	8	8	7	23	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	3	10	
	A_2	3(≥ 3)	1	5	14	
	Спрос	8	8	8	24	24
5		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	10	
	A_2	3	2	5	6	
	Спрос	8	9	7	24	16
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	20	
	A_2	3	5	2	8	
	Спрос	8	8	7	23	28
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1(≤ 2)	10	
	A_2	3	1	5	13	
	Спрос	8	8	7	23	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	3	10	
	A_2	3(≥ 3)	1	5	14	
	Спрос	8	8	8	24	24

№	Транспортные задачи варианта				
6		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3	2	5	6
	Спрос	8	9	7	24 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	5	2	8
	Спрос	8	8	7	23 28
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 2)$	10
	A_2	1	1	5	13
	Спрос	8	8	7	23 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	1	4	3	10
	A_2	$3(\geq 3)$	1	5	14
	Спрос	8	8	8	24 24
7		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	10
	A_2	3	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	5	2	5
	Спрос	8	8	7	23 25
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3	$1(\leq 3)$	5	13
	Спрос	8	8	7	23 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	3	10
	A_2	$3(\geq 3)$	1	1	14
	Спрос	8	8	8	24 24

№	Транспортные задачи варианта				
8		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	10
	A_2	1	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	1	2	5
	Спрос	8	8	7	23 25
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3	1(≤ 3)	2	13
	Спрос	8	8	7	23 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3(≥ 3)	1	1	14
	Спрос	8	8	8	24 24
9		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	1	2	5	6
	Спрос	8	5	7	22 18
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	20
	A_2	3	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22 25
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3	1(≤ 3)	2	12
	Спрос	7	8	7	22 22
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3(≥ 3)	1	7	8
	Спрос	5	5	8	18 18

№	Транспортные задачи варианта					
10		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	12	
	A_2	1	2	5	6	
	Спрос	8	5	7	22	18
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	5	20	
	A_2	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	25
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	3	$1(\leq 1)$	2	12	
	Спрос	7	8	7	22	22
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	$2(\geq 1)$	4	1	10	
	A_2	3	1	1	8	
	Спрос	5	5	8	18	18
11		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	12	
	A_2	1	2	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	18	
	A_2	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	3	$1(\leq 3)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	$3(\geq 3)$	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта				
12		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	3	2	5	7
	Спрос	8	5	7	22 19
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	4	18
	A_2	3	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	3	$2(\leq 3)$	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	$6(\geq 3)$	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
13		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	1	8	12
	A_2	1	2	5	7
	Спрос	8	5	7	22 19
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	18
	A_2	1	1	2	5
	Спрос	7	8	7	22 23
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	6	1	10
	A_2	3	$1(\leq 3)$	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	10
	A_2	$3(\geq 5)$	2	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15

№	Транспортные задачи варианта					
14		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	1	4	8	12	
	A_2	1	2	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	4	18	
	A_2	3	1	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	1	$1(\leq 2)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	7	10	
	A_2	$3(\geq 3)$	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15
15		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	12	
	A_2	1	3	5	7	
	Спрос	8	5	7	22	19
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	18	
	A_2	3	2	2	5	
	Спрос	7	8	7	22	23
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	2	$1(\leq 3)$	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	10	
	A_2	$3(\geq 3)$	2	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта				
16		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	18
	A_2	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10
	A_2	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 1)$	4	1	10
	A_2	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
17		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	4	12
	A_2	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	18
	A_2	3	3	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10
	A_2	1	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 1)$	4	1	10
	A_2	3	2	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15

№	Транспортные задачи варианта					
18		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	8	12	
	A_2	1	2	2	4	
	Спрос	8	5	7	22	16
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	1	18	
	A_2	3	2	2	8	
	Спрос	7	8	7	22	26
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10	
	A_2	3	1	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	$2(\geq 1)$	2	1	10	
	A_2	3	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15
19		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	2	8	12	
	A_2	1	2	5	4	
	Спрос	8	5	7	22	16
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	3	1	18	
	A_2	3	1	2	8	
	Спрос	7	8	7	22	26
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	2	3	$1(\leq 4)$	10	
	A_2	3	1	2	11	
	Спрос	7	7	7	22	21
		B_1	B_2	B_3	Предложение	
	A_1	$2(\geq 1)$	2	1	10	
	A_2	3	1	1	5	
	Спрос	5	5	5	15	15

№	Транспортные задачи варианта				
20		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	5	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	1	1	18
	A_2	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10
	A_2	1	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 2)$	4	1	10
	A_2	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
21		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	9	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	5	1	18
	A_2	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	2	$1(\leq 4)$	10
	A_2	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 1)$	3	1	10
	A_2	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15

№	Транспортные задачи варианта				
22		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	1	4	1	18
	A_2	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1(≤ 2)	10
	A_2	3	1	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2(≥ 1)	4	1	10
	A_2	1	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
23		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	1	1	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	2	1	18
	A_2	3	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1(≤ 4)	10
	A_2	3	1	1	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2(≥ 1)	4	1	10
	A_2	3	1	2	5
	Спрос	5	5	5	15 15

№	Транспортные задачи варианта				
24		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	2	12
	A_2	1	2	5	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	18
	A_2	1	1	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10
	A_2	3	3	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 1)$	2	1	10
	A_2	3	1	1	5
	Спрос	5	5	5	15 15
25		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	8	12
	A_2	1	2	1	4
	Спрос	8	5	7	22 16
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	1	18
	A_2	3	5	2	8
	Спрос	7	8	7	22 26
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	2	4	$1(\leq 4)$	10
	A_2	3	4	2	11
	Спрос	7	7	7	22 21
		B_1	B_2	B_3	Предложение
	A_1	$2(\geq 1)$	4	1	10
	A_2	3	1	4	5
	Спрос	5	5	5	15 15

5. Контрольные вопросы

1. Сформулировать математическую модель открытой транспортной задачи с избыточным спросом.
2. Каким образом транспортная задача с избыточным спросом приводится к стандартному виду?
3. Как интерпретируются поставки фиктивного поставщика?
4. Сформулировать математическую модель открытой транспортной задачи с избыточным предложением.
5. Каким образом транспортная задача с избыточным предложением приводится к стандартному виду?
6. Как интерпретируются поставки фиктивному потребителю?
7. Как приводится к стандартному виду транспортная задача с ограничением на транспортный поток снизу в одной из клеток таблицы транспортной задачи?
8. Как приводится к стандартному виду транспортная задача с ограничением на транспортный поток сверху в одной из клеток таблицы транспортной задачи?
9. Как перейти к решению основной задачи после решения вспомогательной задачи в случае транспортной задачи с ограничением на транспортный поток сверху?