МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«___» ______ 2018 г.

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Матричные игры и линейное программирование. Антагонистические матричные игры: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 14 с.

Изложены основные сведения об использовании метода линейного программирования для решения антагонистической матричной игры. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».

Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л.0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2141. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков использования метода линейного программирования для решения антагонистической матричной игры.

Задание. Матричная игра дана матрицей $A = \left(a_{i,j}\right)_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ выигрышей первого игрока при выборе определенной стратегии i (строка матрицы) первым игроком и стратегии j (столбец матрицы) вторым игроком. Убедиться в отсутствии чистой стратегии игроков для своих исходных данных. Найти их оптимальные смешанные стратегии.

2. Краткие теоретические сведения

В матричной игре первый игрок имеет m стратегий, которым соответствуют строки $i = 1, \ldots, m$ заданной платежной матрицы A, а второй игрок имеет n стратегий, которым соответствуют столбцы $j = 1, \ldots, n$ платежной матрицы. На пересечении строки i и столбца j платежной матрицы элемент $A_{i,j}$ означает выигрыш первого игрока, равный проигрышу второго, если первый игрок выбирает некоторую стратегию i из своих возможных, а второй игрок – некоторую стратегию j.

Для определения оптимальных стратегий обоих игроков рассчитывается нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le m}\left(\min\limits_{1 \le j \le n} A_{i,j}\right)$, то есть максимальный гарантированный выигрыш первого игрока при самых невыгодных действиях для него второго игрока (с вычислительной точки зрения величина α – это максимум минимумов в стоках платежной матрицы), и верхняя цена игры $\beta = \min\limits_{1 \le j \le n}\left(\max\limits_{1 \le i \le m} A_{i,j}\right)$, то есть минимальный гарантированный проигрыш второго игрока при самых неблагоприятных для него действиях первого игрока (с вычислительной точки зрения величина β – это минимум максимумов в столбцах). Всегда выполняется неравенство $\alpha \le \beta$.

Матричная игра допускает решение в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда $\alpha = \min\limits_{1 \le j \le n} A_{i0,j} = \beta = \max\limits_{1 \le i \le m} A_{i,j0} = A_{i0,j0}$, то есть когда нижняя цена игры равна верхней цене игры и это общее значение равно элементу $A_{i0,j0}$ платежной матрицы.

В этом случае позиция $(i0, j0)$ платежной матрицы называется седловой точкой платежной матрицы и оптимальной чистой стратегией пары игроков, то есть первый игрок должен придерживаться стратегии с номером $i0$ из своего списка стратегий, а второй игрок – своей стратегии $j0$.

Если имеет место неравенство $\alpha < \beta$, то решения игры в чистых стратегиях не существует. В этом случае ищется решение игры в смешанных стратегиях, причем чистая стратегия – это частный случай смешанной стратегии и может быть найдена общими методами, разработанными для нахождения смешанных стратегий.

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}^T$ вероятностей отдельных стратегий принимаемых первым игроком в ходе повторяющихся туров данной игры (например, в течение года) с целью максимизации своего среднего выигрыша за год при любых действиях противной стороны. Математически вектор $\bar{x}$ должен удовлетворять следующим ограничениям $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1;\ x_1 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0$. Таким образом, первый игрок решает следующую задачу линейного программирования

$$
\begin{aligned}
& z = v \to \max; \\
& a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{m,1}x_m \ge v; \\
& \vdots \\
& a_{1,n}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_m \ge v; \\
& x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1; \\
& x_1 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, первый игрок максимизирует свой средний минимальный выигрыш, независимо от действий ($j = 1, \ldots, n$) второго игрока. Эта задача может быть приведена к стандартной типовой форме путем введения вспомогательных переменных вида $x'_1 = \frac{x_1}{v}, ..., x'_m = \frac{x_m}{v}$.

При этом получаем задачу линейного программирования:

$$z' = x'_1 + ... + x'_m \to \min;$$

$$a_{1,1}x'_1 + \ldots + a_{m,1}x'_m \geq 1;$$

$$\vdots$$

$$a_{1,n}x'_1 + \ldots + a_{m,n}x'_m \geq 1;$$

$$x'_1 \geq 0, \ldots, x'_m \geq 0.$$

При этом цена игры (то есть гарантированный минимальный средний выигрыш первого игрока) находится после решения данной задачи линейного программирования по формуле $v = \frac{1}{z'_{\min}}$ и компоненты оптимальной стратегии далее по формулам $x_1 = vx'_1, \ldots, x_m = vx'_m$.

В матричной форме мы имеем задачу:

$$z' = l_m x' \to \min,$$

$$A^T x' \geq l_n,$$

$$x' \geq 0;$$

где l_m, l_n – векторы размерностей m и n, состоящие из единиц. Таким образом, в задаче линейного программирования для первого игрока используется транспонированная матрица A^T игры.

Данное преобразование корректно, только если $v > 0$ и все элементы матрицы A положительны. Если это не так, ко всем элементам матрицы A добавляется одно и то же достаточно большое положительное число c. При этом оптимальные стратегии игроков не изменяются, а цена игры преобразуется простым образом: $\nu' = \nu + c$.

Смешанной стратегией второго игрока является вектор $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$, $y_1 + \ldots + y_n = 1$, $y_1 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$ вероятностей y_j, j = 1, …, n) его частных стратегий, принимаемых игроком в ходе повторных туров данной матричной игры, с целью минимизировать свой средний по турам проигрыш, независимо от действий первого игрока. Таким образом, второй игрок решает следующую задачу линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&w = v \to \min;\\
&a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,n}y_n \le v;\\
&\vdots\\
&a_{m,1}y_1 + \ldots + a_{m,n}y_n \le v;\\
&y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1;\\
&y_1 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0.
\end{aligned}
$$

Эта задача может быть приведена к стандартной типовой форме путем введения вспомогательных переменных вида

$$y'_1 = \frac{y_1}{v}, ..., y'_n = \frac{y_n}{v}.$$

При этом получаем задачу линейного программирования

$$
\begin{aligned}
&w' = y'_1 + \ldots + y'_n \to \max;\\
&a_{1,1}y'_1 + \ldots + a_{1,n}y'_n \le 1;\\
&\vdots\\
&a_{m,1}y'_1 + \ldots + a_{m,n}\dot{y}'_n \le 1;\\
&y'_1 \ge 0, \ldots, y'_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

В данном случае цена игры то есть гарантированный максимально возможный средний проигрыш второго игрока имеет то же значение, что и получаемого для первого игрока, и находится после решения данной задачи линейного программирования по формуле $v = \dfrac{1}{w'_{\max}}$ и компоненты оптимальной стратегии далее по формулам $y_1 = vy'_1, \ldots, y_n = vy'_n$.

Полезно учитывать, что задача линейного программирования для второго игрока в матричной форме имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&w' = l_n y' \to \max;\\
&Ay' \le l_m;\\
&y' \ge 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в задаче линейного программирования для второго игрока используется матрица A игры.

3. Пример выполнения задания

Дана матрица игры $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Найдем нижнюю и верхнюю цены игры.

$$\alpha = \max(\min(3,-1,-3), \min(-2,4,-1), \min(-5,-6,2)) \\ = \max(-3,-2,-6) = -2.$$

$$\beta = \min(\max(3,-2,-5), \max(-1,4,-6), \max(-3,-1,2)) \\ = \min(3,4,2) = 2.$$

Таким образом, нижняя цена игры меньше ее верхней цены и решения игры в чистых стратегиях не существует.

2) Найдем цену игры и оптимальные смешанные стратегии обоих игроков.

В матрице игры есть отрицательные элементы. Добавим ко всем элементам матрицы одну и ту же константу c, чтобы все элементы матрицы стали положительны, возьмем $c = 7$. Получим новую, эквивалентную по стратегия матрицу игры $A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, для которой цена игры связана с ценой игры исходной матрицы по формуле $\nu(A) = \nu(A_1) - 7$.

Рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования для первого игрока

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$$

$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 1;$$

$$6x_1 + 11x_2 + x_3 \ge 1;$$

$$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 \ge 1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$z_1 = -x_1 - x_2 - x_3 \to \max;$

$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 - s_1 = 1;$

$6x_1 + 11x_2 + x_3 - s_2 = 1;$

$4x_1 + 6x_2 + 9x_3 - s_3 = 1;$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$

Или

$z_1 \to \max;$

$z_1 + x_1 + x_2 + x_3 = 0;$

$-10x_1 - 5x_2 - 2x_3 + s_1 = -1;$

$-6x_1 - 11x_2 - x_3 + s_2 = -1;$

$-4x_1 - 6x_2 - 9x_3 + s_3 = -1;$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0.$

Составим начальную симплекс-таблицу и приведем ее к оптимальному и допустимому методу двойственным симплекс-методом.

B	z_1	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z_1	1	1	1	1	0	0	0	0	Не доп.
s_1	0	–10	–5	-2	1	0	0	–1	$B \to s_1$
s_2	0	–6	–11	-1	0	1	0	–1	$x_3 \to B$
s_3	0	–4	–6	-9	0	0	1	–1	
Z_i/A_{ij}	–	–1/10	–1/6	–1/4	–	–	–	–	

B	z_1	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z_1	1	0	1/2	4/5	1/10	0	0	–1/10	Не доп.
x_1	0	1	1/2	1/5	–1/10	0	0	1/10	$B \to s_2$
s_2	0	0	–8	1/5	–3/5	1	0	–2/5	$x_2 \to B$
s_3	0	0	–4	–41/5	–2/5	0	1	–3/5	
Z_i/A_{ij}	–	–	–1/16	–	–1/6	–	–		

B	z_1	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z_1	1	0	0	13/16	1/16	1/16	0	–1/8	Не доп.
x_1	0	1	0	17/80	–11/80	1/16	0	3/40	$B \to s_3$
x_2	0	0	1	–1/40	3/40	–1/8	0	1/20	$x_3 \to B$
s_3	0	0	0	–83/10	–1/10	–1/2	1	–2/5	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–130/(83·16)	–10/16	–1/8	–	–	

B	z_1	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z_1	1	0	0	0	35/664	9/664	65/664	–109/664	Опт
x_1	0	1	0	0	–93,664	33/664	17/664	43/664	
x_2	0	0	1	0	25/332	–41/332	–1/332	17/332	
x_3	0	0	0	1	1/83	5/83	–10/83	4/83	

Получили *оптимальное* решение:

$v' = -1/z_{1\max} = \dfrac{664}{109}$ – цена преобразованной игры,

Цена исходной игры, то есть средний выигрыш первого игрока $\nu = \nu' - 7 = 664/109 - 7 = -99/109$.

Смешанная стратегия первого игрока

$$x_1 = \frac{43}{664} v = \frac{43}{664} \cdot \frac{664}{109} = \frac{43}{109};$$

$$x_2 = \frac{17}{332} v = \frac{17}{332} \cdot \frac{664}{109} = \frac{34}{109};$$

$$x_3 = \frac{4}{83} v = \frac{4}{83} \cdot \frac{664}{109} = \frac{32}{109};$$

Таким образом, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 43/109 & 34/109 & 32/109 \end{pmatrix}$ – вектор оптимальной смешанной стратегии первого игрока.

Найдем теперь *оптимальную смешанную стратегию второго игрока*.

Имеем матрицу игры $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Для получения корректной задачи линейного программирования элементы этой матрицы должны быть сделаны положительными, для этого прибавим ко всем элементам матрицы какое-нибудь одно достаточно большое положительное число $c = 7$. Получаем матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования для первого игрока

$$w = y_1 + y_2 + y_3 \to \max;$$

$$10y_1 + 6y_2 + 4y_3 \le 1;$$

$$5y_1 + 11y_2 + 6y_3 \le 1;$$

$$2y_1 + y_2 + 9y_3 \le 1;$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

Сводим данную задачу к каноническому виду:

$$w \to \max;$$

$$w - y_1 - y_2 - y_3 = 0;$$

$$10y_1 + 6y_2 + 4y_3 + s_1 = 1;$$

$$5y_1 + 11y_2 + 6y_3 + s_2 = 1;$$

$$2y_1 + y_2 + 9y_3 + s_3 = 1;$$

$$y_1, y_2, y_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0.$$

Строим начальную симплекс таблицу и приводим ее к оптимальному виду обычным симплекс методом.

B	w	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
w	1	–1	–1	–1	0	0	0	0	–	Не опт.
s_1	0	10	6	4	1	0	0	1	1/10	$y_1 \to B$
s_2	0	5	11	6	0	1	0	1	1/5	$B \to s_1$
s_3	0	2	1	9	0	0	1	1	1/2	

B	w	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
w	1	0	–2/5	–3/5	1/10	0	0	1/10	–	Не опт.
y_1	0	1	3/5	2/5	1/10	0	0	1/10	1/4	$y_3 \to B$
s_2	0	0	8	4	–1/2	1	0	1/2	1/8	$B \to s_3$
s_3	0	0	–1/5	41/5	–1/5	0	1	4/5	4/41	

B	w	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
w	1	0	–17/41	0	7/82	0	3/41	13/82	–	Не опт.
y_1	0	1	25/41	0	9/82	0	–2/41	5/82	1/10	$y_3 \to B$
s_2	0	0	332/41	0	–33/82	1	–20/41	9/82	9/664	$B \to s_3$
y_3	0	0	–1/41	1	–1/41	0	5/41	4/41	–	

B	w	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
w	1	0	0	0	43/664	17/332	4/83	109/664	–	Опт.
y_1	0	1	0	0	93/664	–25/332	–1/83	35/664	–	
y_2	0	0	1	0	–33/664	41/332	–5/83	9/664	–	
y_3	0	0	0	1	–17/664	1/332	10/83	65/664	–	

Получили *оптимальное* решение:

$v' = 1/w_{\max} = \dfrac{664}{109}$ – цена преобразованной игры,

Цена исходной игры, то есть средний выигрыш первого игрока $\nu = \nu' - 7 = 664/109 - 7 = -99/109$ – получили то же значение, что и при решении задачи для первого игрока.

Смешанная стратегия второго игрока

$$y_1 = \frac{35}{664} v = \frac{35}{664} \cdot \frac{664}{109} = \frac{35}{109};$$

$$y_2 = \frac{9}{664} v = \frac{9}{664} \cdot \frac{664}{109} = \frac{9}{109};$$

$$y_3 = \frac{65}{664} v = \frac{65}{664} \cdot \frac{664}{109} = \frac{65}{109};$$

Таким образом, $\bar{y} = (35/109 \quad 9/109 \quad 65/109)$ – вектор оптимальной смешанной стратегии второго игрока.

4. Индивидуальные задания

№	A	№	A
1	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
19	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

5. Контрольные вопросы

1. Что такое платежная матрица матричной антагонистической игры?
2. Как рассчитывается верхняя и нижняя цена игры?
3. В каком случае существует решение игры в чистых стратегиях?
4. Что такое смешанная стратегия игрока?
5. Как записываются задачи линейного программирования для нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков?
6. Каким методом решается вспомогательная задача линейного программирования для первого игрока, второго игрока?
7. Как преобразуется матрица игры, если в ней есть отрицательные элементы?