

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 05.09.2018

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be250bd2374d16f5c0ce536f0fcb

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии



ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД ГОМОРИ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии
ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Целочисленное линейное программирование. Метод Гомори: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 12 с.

Изложены основные сведения о решении целочисленных задач линейного программирования с использованием метода Гомори. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений». Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л.0,7. Уч.- изд. л.0,6. Тираж 100 экз. Заказ 2133. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Цель занятия	4
2. Краткие теоретические сведения	4
3. Пример выполнения задания	5
4. Индивидуальные задания	10
5. Контрольные вопросы.....	12

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. МЕТОД ГОМОРИ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является получение навыков решения целочисленных задач линейного программирования методом Гомори.

Задание. Для заданной стандартной задачи линейного программирования с дополнительным условием целочисленности переменных найти оптимальное решение методом Гомори.

2. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим целочисленную стандартную задачу линейного программирования

$$z = c^T x \rightarrow \max;$$

$$Ax \leq b;$$

$$x \geq 0;$$

$$x - \text{целое.}$$

Такая задача описывает процесс нахождения оптимального плана производства продукции, объем которого измеряется в целых числах, то есть поштучно.

Метод отсечения Гомори состоит в формировании дополнительного ограничения, добавляемого после получения текущего оптимального дробного (то есть недопустимого) такого, что все целочисленные решения удовлетворяют отсечению, а найденное дробное не удовлетворяет (отсекается).

Данное ограничение добавляется в текущую симплекс-таблицу в качестве дополнительной строки и симплекс-таблица доводится до оптимальной с помощью двойственного симплекс-метода. Таким образом, после ряда отсечений, путем использования двойственного симплекс-метода будет получено искомое целочисленное оптимальное решение.

Недостатком этого метода является постоянное разрастание симплекс-таблицы при последовательном добавлении отсекающих ограничений.

Также важно отметить, что вычисления в симплекс-таблице нужно производить *точно, без округления и использовать обыкновенные дроби.*

Расчетные формулы для дополнительного ограничения имеют следующий вид. Пусть на очередном шаге в i -ой строке текущей симплекс-таблицы имеется дробное значение базисной переменной (небазисные переменные всегда равны 0), эту ситуацию можно записать так:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in N} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i,$$

где $\{\beta_i\} = \beta_i - [\beta_i] > 0$, то есть дробная часть правой части i -го уравнения симплекс-таблицы положительна (то есть отлична от 0).

Отсечение Гомори, обладающее вышеперечисленными свойствами имеет вид:

$$\sum_{j \in N} \{\alpha_{i,j}\} x_j \geq \{\beta_i\}.$$

Если строк симплекс-таблицы с дробной частью несколько, выбирается любая из них, предпочтительно, имеющая наибольшую дробную часть.

3. Пример выполнения задания

Решить целочисленную задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 11;$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

$$x_1, x_2 \in Z.$$

Решим данную задачу обычным симплекс-методом сначала без учета условия целочисленности переменных.

Приведем задачу к каноническому виду.

$$z \rightarrow \max;$$

$$z - 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2;$$

$$2x_1 + x_2 + s_1 + 0 \cdot s_2 = 10;$$

$$x_1 + 4x_2 + 0s_1 + s_2 = 11;$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0;$$

Составим начальную симплекс-таблицу и приведем ее к оптимальному виду.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	-2	-3	0	0	0	-	Не опт.
s_1	0	2	1	1	0	10	10	$x_2 \rightarrow B$
s_2	0	1	4	0	1	11	11/4	$B \rightarrow s_2$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	-5/4	0	0	3/4	33/4	-	Не опт.
s_1	0	7/4	0	1	-1/4	29/4	29/5	$x_1 \rightarrow B$
x_2	0	1/4	1	0	1/4	11/4	11	$B \rightarrow s_1$

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	0	5/7	4/7	94/7	-	Опт.
s_1	0	1	0	4/7	-1/7	29/7	-	-
x_2	0	0	1	-1/7	2/7	12/7	-	-

Получили оптимальное, но дробное решение

$$z = 94/7, x_1 = 29/7, x_2 = 12/7.$$

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью, это z -уравнение (0-строка) и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{ \frac{5}{7} \right\} s_1 + \left\{ \frac{4}{7} \right\} s_2 \geq \left\{ \frac{94}{7} \right\} = \left\{ 13 + \frac{3}{7} \right\} = \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{7} s_1 + \frac{4}{7} s_2 \geq \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{7} s_1 + \frac{4}{7} s_2 - s_3 = \frac{3}{7};$$

$$-\frac{5}{7} s_1 - \frac{4}{7} s_2 + s_3 = -\frac{3}{7};$$

Добавляем новое ограничение с базисной переменной s_3 в последнюю симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z	1	0	0	5/7	4/7	0	94/7	Не доп.
x_1	0	1	0	4/7	-1/7	0	29/7	$B \rightarrow s_3$
x_2	0	0	1	-1/7	2/7	0	12/7	$s_1 \rightarrow B$
s_3	0	0	0	-5/7	-4/7	1	-3/7	
Z_i/A_{ij}	-	-	-	-1	-1	-	-	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	13	Опт
x_1	0	1	0	0	-3/5	4/5	19/5	-
x_2	0	0	1	0	2/5	-1/5	9/5	-
s_1	0	0	0	1	4/5	-7/5	3/5	

Получили оптимальное, но дробное решение:

$$z = 13, x_1 = 19/5, x_2 = 9/5.$$

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{ -\frac{3}{5} \right\} s_2 + \left\{ \frac{4}{5} \right\} s_3 \geq \left\{ \frac{19}{5} \right\} = \left\{ 3 + \frac{4}{5} \right\} = \frac{4}{5};$$

$$\left\{ -\frac{3}{5} \right\} = \left\{ -1 + \frac{2}{5} \right\} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{2}{5} s_2 + \frac{4}{5} s_3 \geq \frac{4}{5};$$

$$\frac{2}{5} s_2 + \frac{4}{5} s_3 - s_4 = \frac{4}{5};$$

$$-\frac{2}{5} s_2 - \frac{4}{5} s_3 + s_4 = -\frac{4}{5};$$

Добавляем новое ограничение с базисной переменной s_3 в последнюю симплекс-таблицу и применяем двойственный симплекс-метод.

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	0	13	Опт
x_1	0	1	0	0	$-3/5$	$4/5$	0	$19/5$	–
x_2	0	0	1	0	$2/5$	$-1/5$	0	$9/5$	–
s_1	0	0	0	1	$4/5$	$-7/5$	0	$3/5$	
s_4	0	0	0	0	$-2/5$	$-4/5$	1	$-4/5$	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–	0	$-5/4$	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	0	0	1	0	13	Не доп.
x_1	0	1	0	0	0	2	$-3/2$	5	–
x_2	0	0	1	0	0	-1	0	1	–
s_1	0	0	0	1	0	-3	2	-1	
s_2	0	0	0	0	1	2	$-5/2$	2	
Z_i/A_{ij}	–	–	–	–	–	$-1/3$	–	–	

B	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Реш.	Комм.
z	1	0	0	$1/3$	0	0	$2/3$	$12 \frac{2}{3}$	Не доп.
x_1	0	1	0	$2/3$	0	0	$-1/6$	$4 \frac{1}{3}$	–
x_2	0	0	1	$-1/3$	0	0	$-2/3$	$1 \frac{1}{3}$	–
s_3	0	0	0	$-1/3$	0	1	$-2/3$	$1/3$	
s_2	0	0	0	$2/3$	1	0	$-7/6$	$1 \frac{1}{3}$	

Получили оптимальное, но дробное решение

$$z = 12 \frac{2}{3}, x_1 = 4 \frac{1}{3}, x_2 = 1 \frac{1}{3}.$$

Берем самое первое уравнение с дробной правой частью и по нему добавляем отсечение Гомори, используя при этом только небазисные переменные в строке:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}s_1 + \left\{\frac{2}{3}\right\}s_4 \geq \left\{12 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_4 \geq \frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_4 - s_5 = \frac{2}{3};$$

$$-\frac{1}{3}s_1 - \frac{2}{3}s_4 + s_5 = -\frac{2}{3};$$

<i>B</i>	<i>z</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₂	<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₄	<i>s</i> ₅	Реш.	Комм.
<i>z</i>	1	0	0	1/3	0	0	2/3	0	12 2/3	Не доп.
<i>x</i> ₁	0	1	0	2/3	0	0	-1/6	0	4 1/3	—
<i>x</i> ₂	0	0	1	-1/3	0	0	-2/3	0	1 1/3	—
<i>s</i> ₃	0	0	0	-1/3	0	1	-2/3	0	1/3	
<i>s</i> ₂	0	0	0	2/3	1	0	-7/6	0	1 1/3	
<i>s</i> ₅	0	0	0	-1/3	0	0	-2/3	1	-2/3	
<i>Zi/Aij</i>	—	—	—	-1	—	—	-1	—	—	

<i>B</i>	<i>z</i>	<i>x</i> ₁	<i>x</i> ₂	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₂	<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₄	<i>s</i> ₅	Реш.	Комм.
<i>z</i>	1	0	0	0	0	0	0	1	12	Не доп.
<i>x</i> ₁	0	1	0	0	0	0	-3/2	2	3	—
<i>x</i> ₂	0	0	1	0	0	0	0	-1	2	—
<i>s</i> ₃	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	
<i>s</i> ₂	0	0	0	0	1	0	-5/3	2	0	
<i>s</i> ₁	0	0	0	1	0	0	2	-3	2	

Получено оптимальное целочисленное решение.

$$z = 12, x_1 = 3, x_2 = 2.$$

4. Индивидуальные задания

№	Задание	№	Задание
1	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 10;$ $x_1 + 4x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	2	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 10;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
3	$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 10;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	4	$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 9;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
5	$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 9;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	6	$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 11;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
7	$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 11;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	8	$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 11;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
9	$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 14;$ $x_1 + 3x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	10	$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 14;$ $x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$

№	Задание	№	Задание
11	$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 14;$ $x_1 + 4x_2 \leq 13;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	12	$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 14;$ $x_1 + 4x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
13	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \leq 14;$ $x_1 + 4x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	14	$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 17;$ $x_1 + 4x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
15	$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 17;$ $x_1 + 4x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	16	$z = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \max;$ $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 19;$ $x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
17	$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 19;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	18	$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 19;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
19	$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 21;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	20	$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 21;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$

№	Задание	№	Задание
21	$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 23;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	22	$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $4x_1 + 2x_2 \leq 23;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
23	$z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$ $4x_1 + 2x_2 \leq 23;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	24	$z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$ $4x_1 + 2x_2 \leq 24;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$
25	$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$ $4x_1 + 2x_2 \leq 24;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$	26	$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$ $4x_1 + 2x_2 \leq 26;$ $x_1 + 3x_2 \leq 15;$ $x_1, x_2 \geq 0;$ $x_1, x_2 \in Z.$

5. Контрольные вопросы

1. Какое отличие стандартной целочисленной задачи линейного программирования от просто стандартной задачи?
2. Дать определение отсечения Гомори.
3. Привести вид отсечения Гомори.
4. Описать метод отсечений Гомори для получения оптимального целочисленного решения.