МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«___» _________ 2018 г.

АНАЛИЗ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Методические указания к практическому занятию
по дисциплине «Методы оптимальных решений»
для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика»

Курск 2018

УДК 519.6

Составители: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии ЮЗГУ *В.В. Апальков*

Анализ на чувствительность: методические указания к практическому занятию по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Свиридов, Т.В. Алябьева. Курск, 2018. 21 с.

Изложены основные сведения о методах анализа решения задачи линейного программирования на чувствительность и устойчивость. Рассмотрены примеры выполнения заданий. Приведены варианты заданий, контрольные вопросы к защите практической работы.

Методические указания соответствуют требованиям рабочей программы по дисциплине «Методы оптимальных решений».
Материал предназначен для студентов 38.03.01 «Экономика» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2018.. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.- изд. л.0,9. Тираж 100 экз. Заказ 2148. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

АНАЛИЗ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

1. Цель занятия

Целью практического занятия является изучение методов анализа решения задачи линейного программирования на чувствительность и устойчивость.

Задание. Дана стандартная задача линейного программирования.

1. Привести задачу к каноническому виду и найти ее оптимальное решение с помощью симплекс-метода.
2. Найти коэффициенты чувствительности по ресурсам.
3. Найти границы устойчивости по ресурсам.
4. Найти границы устойчивости по ценовым коэффициентам.
5. Выбрать дефицитный ресурс и произвести допустимое его изменение в пределах отрезка устойчивости оптимального базиса:
6. Выбрать недефицитный ресурс, если он есть, произвести в нем изменение, выходящее за пределы устойчивости текущего базиса, полученную оптимальную, но не допустимую симплекс-таблицу привести к допустимому виду двойственным симплекс-методом. Если недефицитный ресурс отсутствует, сделать недопустимое изменение в первом ресурсе.
7. Выбрать базисный продукт и сделать в его ценовом коэффициенте любое допустимое изменение отличное от 0.
8. Для любого небазисного продукта выбрать любое недопустимое изменение его ценового коэффициента, соответственно скорректировать заключительную симплекс-таблицу и привести ее к оптимальному виду обычным симплекс-методом.

2. Краткие теоретические сведения

Каноническая задача линейного программирования имеет вид:

$$P = c^T x \to \max;$$

$$Ax = b;$$

$$x \geq 0,$$

где $A[m,n]$ – прямоугольная невырожденная матрица, в которой число строк m меньше числа столбцов n, таким образом, $rg\left(A\right) = m$.

Выделим в матрице A невырожденную квадратную матрицу $B[m,m]$, называемую матрицей базиса. Тогда остальные столбцы матрицы A составляют небазисную подматрицу $N[m,n-m]$ и мы условно записываем, что $A=\left[B,N\right]$ – разбиение матрицы ограничений на подматрицу базиса и небазисную подматрицу.

Соответственно столбец неизвестных x разбивается на вектор x_B базисных переменных, вектор x_N небазисных переменных, что символически записывается в виде $x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ и система линейных ограничений задачи $Ax=b$ может быть записана в виде $\left[B,N\right]\cdot\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b$ или в виде $Bx_B+Nx_N=b$. Из последнего уравнения мы выражаем базисные переменные через небазисные в виде

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N. \qquad (1)$$

Далее, мы аналогично разбиваем вектор ценовых коэффициентов в виде $c=\begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$, тогда после транспонирования получим $c^T=\left(c_B^T,c_N^T\right)$, после чего мы можем преобразовать целевую функцию задачи следующим образом $P=c^T x=\left(c_B^T,c_N^T\right)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=c_B^T x_B+c_N^T x_N$.

Если в данное выражение мы подставим формулу (1), то получим

$$P=c_B^T\left(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N\right)+c_N^T x_N=c_B^T B^{-1}b-\left(c_B^T B^{-1}N-c_N^T\right)x_N.$$

Получили преобразованную задачу, в которой ограничения и целевая функция выражены через небазисные переменные

$$z\to\max;$$

$$z+\left(c_B^T B^{-1}N-c_N^T\right)x_N=c_B^T B^{-1}b;$$

$$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b;$$

Преобразованная задача имеет важнейшее значение и записывается в форме текущей симплекс таблицы:

Б	z	x_B	x_N	Реш.
z	1	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1} N = \hat{N}$	$B^{-1} b$

где I – единичная матрица. Заметим, что $I = B^{-1} B = \hat{B}$.

Величины $d^T = c^T B^{-1} A - c^T$ называются относительными оценками переменных и записываются в z-строке симплекс-таблицы. При этом относительные оценки базисных переменных равны 0, так как $d_B^T = c_B^T B^{-1} B - c_B^T = 0$.

Более компактно текущая симплекс таблица записывается в виде:

Б	z	x	Реш.
z	1	d^T	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	$\hat{A} = B^{-1} A$	$B^{-1} b$

Обозначим $\beta = B^{-1} b$, тогда преобразованную задачу можно записать в виде:

$$z \to \max;$$

$$z + \left(c_B^T B^{-1} N - c_N^T \right) x_N = c_B^T \beta;$$

$$x_B + B^{-1} N x_N = \beta;$$

Из текущей симплекс таблицы получается текущее базисное решение $x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ задачи линейного программирования, в котором небазисные переменные равны 0, то есть $x_N = 0$, таким образом, получаем $x = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ – текущее базисное решение, для которого $z(x) = c_B^T \beta$.

Эту величину полезно также записать в виде $z(x) = c_B^T B^{-1} b = \pi^T b$, где вектор $\pi^T = c_B^T B^{-1}$ показывает вклад в прибыль каждого ресурса из их вектора b и называется вектором теневых цен ресурсов.

Из формулы $z = c_B^T\beta - \left(c_B^T B^{-1}N - c_N^T\right)x_N = c_B^T\beta - d_N^T x_N$ получаем, что текущее базисное решение, в котором $x_N = 0$ оптимально тогда и только тогда, когда $d_N^T \geq 0$. То есть относительные оценки небазисных переменных неотрицательны или, что то же самое, $d^T \geq 0$ – все элементы z-строки текущей симплекс-таблицы неотрицательны, так как в этом случае при увеличении вектора небазисных переменных x_N от текущего значения $x_N = 0$ к положительным величинам, целевая функция z получает неположительное приращение $d_N^T x_N$.

Итак, текущая симплекс таблица

$z \to \max;$

$z + \left(c_B^T B^{-1}N - c_N^T\right)x_N = c_B^T\beta;$

$x_B + B^{-1}Nx_N = \beta;$

Описывает корректное решение задачи линейного программирования, если выполняются два условия:

$\beta \geq 0$ – условие допустимости;

$c_B^T B^{-1}N - c_N^T = \pi^T N - c_N^T \geq 0$ – условие оптимальности.

Пример.

Дана преобразованная стандартная задача

$P = 30 - 4x_4 - 5x_5 - 3x_6 - 4x_7$

$x_1 = 5 + 3x_4 - x_5 + x_6 - x_7;$

$x_2 = 6 - 7x_4 + 2x_5 - 2x_6 - 2x_7;$

$x_3 = 7 + x_4 - 3x_5 + 3x_6 + 3x_7;$

Записать симплекс-таблицу, соответствующую данной задаче.

Решение.

Имеем: $c_B^T x_B = 30$ – значение целевой функции на текущем базисном решении;

$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $x_N = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$ – текущий состав базисных и небазисных переменных;

$\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = x_B$ – значения базисных переменных;

$B^{-1}N = \hat{N} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ – преобразованная подматрица небазисных переменных;

$\pi^T N - c_N^T = d_N^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ – относительные оценки небазисных переменных.

Получаем симплекс-таблицу:

Б	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Реш	Комм.
z	1	0	0	0	4	5	3	7	30	Опт.
x_1	0	1	0	0	–3	1	–1	1	5	–
x_2	0	0	1	0	7	–2	2	2	6	–
x_3	0	0	0	1	–1	3	–3	–3	7	–

В ходе изменения экономических параметров, таких как цены на продукцию или уровень запасов ресурсов текущая симплекс-таблица может перестать удовлетворять условиям допустимости или оптимальности, ее нужно привести к оптимальному виду. При этом текущий базис либо остается оптимальным, тогда в текущей симплекс-таблице происходит определенная коррекция по описываемым далее формулам, либо нужно перейти к новому базису, для чего осуществляется ряд шагов прямого (при потере оптимальности) либо двойственного симплекс-метода (при потере допустимости).

Рассмотрим порядок исследования чувствительности текущего оптимального решения задачи линейного программирования по правым частям, то есть по ресурсам.

Имеем формулы

$\frac{\partial z}{\partial b_i} = \pi_i = \left(c_B^T B^{-1}\right)_i, i = 1,\ldots,m$ – коэффициенты чувствительности.

Они находятся в текущей таблице следующим образом:

Пусть $x_{m+i} = s_i$ – дополнительная остаточная переменная соответствующая ресурсу i, она имеет ценовой коэффициент $c_{m+i} = 0$. В исходной матрице ограничений A переменной $x_{m+i} = s_i$ соответствует столбец $A_{\bullet,m+i}$ с номером $m + i$, содержащий единицу в позиции i и имеющий нули в остальных позициях, тогда получим $d_{m+i} = d_{s_i} = \pi^T A_{\bullet,m+i} - c_{m+i} = \pi_i$.

Итак, коэффициент чувствительности прибыли по ресурсу b_i равен относительной оценке d_{m+i} дополнительной переменной $x_{m+i} = s_i$, соответствующей данному ресурсу. Данные формулы верны только в том диапазоне изменения вектора имеющихся ресурсов b, при котором текущий базис x_B сохраняет свою оптимальность. Поэтому важно уметь рассчитывать границы допустимых изменений вектора ресурсов b, при которых текущий базис сохраняет свою оптимальность.

Предположим, имело место изменение вектора ресурсов $b' = b + \Delta b$. Рассмотрим ситуацию, когда изменился только один ресурс: $b_i' = b_i + \Delta b_i, b_j' = b_j, i \neq j$. Последим изменение условий оптимальности текущего решения:

$c_B^T B^{-1} N - c_N^T = \pi^T N - c_N^T \geq 0$ – условие оптимальности текущего базисе не зависит от вектора ресурсов b и сохраняется. Условие допустимости $\beta = B^{-1} b \geq 0$ приобретает вид:

$$\beta' = B^{-1}(b+\Delta b) = \beta + B^{-1}\Delta b = \beta + B^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ge 0;$$

$$\beta + \Delta b_i \left(B^{-1}\right)_{\bullet,i} \ge 0$$

где $\left(B^{-1}\right)_{\bullet,i}$ – i-ый столбец матрицы B^{-1}. Но для рассматриваемой стандартной задачи линейного программирования $\left(B^{-1}\right)_{\bullet,i} = \widehat{A}_{\bullet,m+i}$, то есть i-ый столбец обратной матрицы базиса равен $m+i$-ому столбцу приведенной матрицы ограничений $\widehat{A}$, соответствующий остаточной переменной i-го ограничения s_i. Целевая функция меняется следующим образом: $z' = z + \pi_i \Delta b_i = z + \widehat{A}_{0,m+i}$, то есть модифицируется таким же образом, как и правая часть, только с использованием z-компоненты столбца $\widehat{A}_{\bullet,m+i}$.

Итак, при изменении i-го ресурса на величину Δb_i текущая симплекс таблица изменяется следующим образом: к столбцу правых частей и целевой функции добавляется $m+i$ столбец текущей симплекс таблицы, умноженный на величину изменения ресурса Δb_i. Если при этом измененный вектор $\beta' \ge 0$ останется неотрицательным, измененная симплекс-таблица является корректной и оптимальной, соответствующей новому вектору ресурсов b'. Если же в векторе правый частей β' новой симплекс-таблицы будут отрицательные элементы, то текущий базис B будет недопустимым и текущую симплекс-таблицу нужно приводить к допустимому виду с помощью двойственного симплекс-метода. Если остаточная переменная s_i является базисной в текущем базисе, то столбец $\widehat{A}_{\bullet,m+i}$ единичным, содержащий единицу только в позиции i, в это случае условие допустимости упрощается и приобретает вид $\Delta b_i + \beta_i \ge 0 \Leftrightarrow \Delta b_i \in [-\beta_i, 0]$, где $\beta_i = s_i$ – остаток ресурса i в текущем плане производства, то есть для сохранения оптимальности текущего плана запас ресурса не должен уменьшиться более его остатка на складе. Если же остаточная переменная s_i является небазисной, то используя элементы столбца $\widehat{A}_{\bullet,m+i}$, получаем границы диапазона устойчивости текущего решения:

$$\max_{i>0|\hat{A}_{i,m+i}>0}\left\{\frac{\beta_i}{-\hat{A}_{i,m+i}}\right\} \le \Delta b_i \le \min_{i>0|\hat{A}_{i,m+i}<0}\left\{\frac{\beta_i}{-\hat{A}_{i,m+i}}\right\}, \qquad (1)$$

причем если нет таких строк *i*, что $\hat{A}_{i,m+i} > 0$, то левая граница данного интервала равна $-\infty$, если же нет таких *i*, что $\hat{A}_{i,m+i} < 0$, то правая граница данного интервала равна ∞.

Рассмотрим исследование на чувствительность по ценовым коэффициентам $c_j, 1 \le j \le n$ производимой продукции, то есть изучим влияние изменения цены $c'_j = c_j + \Delta c_j$ на устойчивость текущего базиса B. При этом вектор правых частей $\beta = B^{-1}b \ge 0$ не изменяется и сохраняет свою неотрицательность, то есть допустимость, рассмотрим условие оптимальности: $d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T \ge 0$.

Рассмотрим сначала случай $x_j \in N$, то есть изучаемая переменная является небазисной, тогда при изменении $c'_j = c_j + \Delta c_j$ изменяется только вектор c_N^T в позиции j и мы получим условие $d'_j = d_j - \Delta c_j \ge 0$, отсюда получаем условие устойчивости $\Delta c_j \le d_j$, $\Delta c_j \in \left[-\infty, d_j\right]$.

То есть, чтобы текущая симплекс таблица сохранила свою оптимальность, цена небазисного продукта j должна возрасти не более чем на относительную оценку d_j. При этом относительная оценка этого продукта, расположенная в z-строке, изменяется по правилу $d'_j = d_j - \Delta c_j$, других изменений в текущей симплекс-таблице не осуществляется.

Если же изменение цены Δc_j выходит за пределы допустимого интервала $\left[-\infty, d_j\right]$, то текущая симплекс-таблица становится неоптимальной в позиции $d'_j < 0$ и требуется ряд итераций обычного симплекс-метода, для приведения ее к оптимальному виду.

Пусть $x_j \in B$, причем $x_j = B_i$, то есть *j*-ая переменная является базисной, причем *i*-ой по счету в базисе, тогда она соответствует *i*-ой строке в симплекс-таблице, величина $c'_j = c_j + \Delta c_j$ принадлежит строке c_B^T базисных ценовых коэффициентов, находясь в *i*-ой позиции этой строки и в соответствии с формулой $d_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$ относительные оценки небазисных переменных изменяются по формуле $d_N'^T = d_N^T + \Delta c_j \hat{N}_{i,\bullet}$, где $\hat{N} = B^{-1} N$.

Эту формулу удобно распространить на всю z-строку используя формулу $z = c_B^T \beta$, тогда получим $z' = z + \Delta c_j \beta_i$, то есть при изменении базисного ценового коэффициента c_j на величину Δc_j, причем базисная переменная x_j расположена в строке *i* симплекс-таблицы, нужно ко всей z-строке, включая значение целевой функции, прибавить *i*-ую строку симплекс-таблицы, включая правую часть, умноженную на величину изменения Δc_j (при этом 1 – единица в базисном столбце *j* игнорируется, то есть рассматривается как 0).

Если при этом измененная строка $d'^T \geq 0$, то полученная симплекс-таблица будет допустимой и оптимальной и отражать, таким образом, изменившуюся экономическую ситуацию. В противном случае, то есть при наличии отрицательных элементов в строке d'^T, измененная таблица теряет условие оптимальности и нужно выполнить ряд этапов обычного симплекс-метода для доведения ее до оптимального вида.

По аналогии с формулами (1) получаем формулы для диапазона допустимого изменения ценового коэффициента базисной переменной:

$$\max_{k\in[1,n+m],k\neq j|\hat{A}_{i,k}>0}\left\{\frac{d_k}{-\hat{A}_{i,k}}\right\}\leq\Delta c_j\leq\min_{k\in[1,n+m]|\hat{A}_{i,k}<0}\left\{\frac{d_k}{-\hat{A}_{i,j}}\right\} \quad (2)$$

3. Пример выполнения задания

Дана стандартная задача линейного программирования

$z=3x_1+x_2+2x_3\rightarrow\max;$

$2x_1+2x_2+3x_3\leq 20;$

$x_1+x_2+x_3\leq 11;$

$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0.$

1. *Привести задачу к каноническому виду и найти ее оптимальное решение с помощью симплекс-метода.*

$z\rightarrow\max;$

$z-3x_1-x_2-2x_3+0s_1+0s=0;$

$2x_1+2x_2+3x_3+s_1+0\cdot s_2=20;$

$x_1+x_2+x_3+0\cdot s_1+s_2=11;$

$x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0; s_1\geq 0;\ s_2\geq 0.$

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	–3	–1	–2	0	0	0	–	Не опт
s_1	0	2	2	3	1	0	20	10	$x_1\rightarrow B$
s_2	0	1	1	1	0	1	11	11	$B\rightarrow s_1$

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	2	5/2	1	0	30	–	Опт
s_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	–	–
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	1	–	–

$z\max=30;$

$B=\{x_1,s_2\};\ N=\{x_2,x_3,s_1\};$

$x_1=10,\ x_2=0,\ x_3=0,\ s_1=0, s_2=1.$

2. *Найти коэффициенты чувствительности по ресурсам*

$\pi_{b_1} = d_{s_1} = 1;$

$\pi_{b_2} = d_{s_2} = 0;$

3. *Найти границы устойчивости по ресурсам*

1) b_1:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \geq 0;$$

$$\begin{cases} 10 + 1/2 \cdot \Delta b_1 \geq 0; \\ 1 - 1/2 \cdot \Delta b_1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \geq -1/2 \cdot \Delta b_1; \\ 1 \geq 1/2 \cdot \Delta b_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \geq -20 \\ \Delta b_1 \leq 2 \end{cases}$$

$\Delta b_1 \in [-20, 2];$

2) b_2:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0;$$

$$\begin{cases} 10 \geq 0; \\ 1 + \Delta b_2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \Delta b_2 \geq -1$$

$\Delta b_2 \in [-\infty, -1];$

4. *Найти границы устойчивости по ценовым коэффициентам*

1)Небазисные продукты

А) $c_2 = 1;$

$\Delta c_2 \in \left[-\infty, d_{x_2}\right] = [-\infty, 2];$

В) $c_3 = 2;$

$\Delta c_3 \in \left[-\infty, d_{x_3}\right] = [-\infty, 5/2]$

2)Базисные продукты:

$c_1 = 3;$

$d_N^T + \Delta c_1 \hat{N}_{1,\bullet} \geq 0$

$\Delta c_1 \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$

$$\begin{cases} \Delta c_1 + 2 \ge 0; \\ 3/2 \cdot \Delta c_1 + 5/2 \ge 0; \\ 1/2 \cdot \Delta c_1 + 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta c_1 \ge -2; \\ \Delta c_1 \ge -5/3; \\ \Delta c_1 \ge -2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta c_1 \ge \max\{-2, -5/3, -2\} = -5/3;$$

$$\Delta c_1 \in [-5/3, \infty].$$

5. *Выбрать дефицитный ресурс и произвести допустимое его изменение в пределах отрезка устойчивости оптимального базиса:*

Дефицитным ресурсом является, например, ресурс $b_1 = 20$, так как для него остаточная переменная $s_1 = 0$, то есть данный ресурс расходуется полностью. По предыдущему для этого ресурса интервал устойчивости

$\Delta b_1 \in [-20, 2]$. Выберем в данном диапазоне любое значение отличное от 0, возьмем например $\Delta b_1 = -5$. Используем формулу $\begin{pmatrix} z' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} d_{s_1} \\ \widehat{A}_{\bullet, s_1} \end{pmatrix}$ или в данном случае

$$\begin{pmatrix} z' \\ x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 7{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

$z' = 25,\ x_1 = 7{,}5,\ s_2 = 3{,}5$.

То есть при допустимом уменьшении первого ресурса на 5 единиц получаемая прибыль уменьшилась на 5 ед., производство первого продукта на 2,5 ед., остаток второго ресурса увеличился на 2,5 ед. до 3,5 ед.

Экономический процесс в новых условиях будет характеризоваться симплекс-таблицей:

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	2	5/2	1	0	25	–	Опт
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	7,5	–	–
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	3,5	–	–

6. *Выбрать недефицитный ресурс, если он есть, произвести в нем изменение выходящее за пределы устойчивости текущего базиса, полученную оптимальную но не допустимую симплекс-таблицу привести к допустимому виду двойственным симплекс-методом. Если недефицитный ресурс отсутствует сделать недопустимое изменение в первом ресурсе.*

Дефицитным ресурсом является ресурс $b_2 = 11$, так как в оптимальном решении его остаточная переменная $s_2 = 1$ положительна. Из предыдущего имеем $\Delta b_2 \in [-\infty, -1]$. Возьмем любое экономически корректное значение вне этого промежутка, пусть, например, $\Delta b_2 = -6$, тогда новое значение ресурса $b_2 = 11 - 6 = 5$. Пересчитаем симплекс-таблицу по формуле

$$\begin{pmatrix} z' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} d_{s_2} \\ \widehat{A}_{\bullet, s_2} \end{pmatrix}, \text{ или} \begin{pmatrix} z' \\ x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-6) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Получаем измененную симплекс-таблицу:

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	2	5/2	1	0	30	–	Не доп.
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	–	–
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	–5	–	–

Данная симплекс-таблица является оптимальной, но не допустимой. Приведем ее к оптимальной двойственным симплекс-методом.

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	Комм.
z	1	0	2	5/2	1	0	30	Не доп.
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	$B \to s_2$
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	–5	$s_1 \to B$
Dj/Aij	–	–	–	–5	–2	–	–	

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	Комм.
z	1	0	2	3/2	0	2	27,5	Доп., опт.

x_1	0	1	1	1	0	1	5	–
s_1	0	0	0	1	1	–2	5/2	–

$z\max = 27.5;$

$B = \{x_1, s_1\}$; $N = \{x_2, x_3, s_2\}$

$x_1 = 5,\ x_2 = 0, x_3 = 0,\ s_1 = 5/2, s_2 = 0.$

7. *Выбрать базисный продукт и сделать в его ценовом коэффициенте любое допустимое изменение отличное от* 0.

Базисным продуктом является первый с ценовым коэффициентом $c_1 = 3$. Из предыдущего имеем $\Delta c_1 \in [-5/3, \infty]$. Возьмем любое значение из этого интервала, отличное от 0, например, $\Delta c_1 = -1$, получим $c_1 = 3 - 1 = 2$. Симплекс-таблицу скорректируем по формулам $d_N'^T = d_N^T + \Delta c_1 \hat{N}_{1,\bullet}$, $z' = z + x_1 \Delta c_1$.

В данном случае получаем

$\begin{pmatrix} d_{x_2} & d_{x_3} & d_{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix};$

$z' = 30 + 10(-1) = 20$.

Получаем симплекс-таблицу в новых условиях:

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_ij	Комм.
z	1	0	1	1	1/2	0	20	–	Опт
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	–	–
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	1	–	–

8. *Для любого небазисного продукта выбрать любое недопустимое изменение его ценового коэффициента, соответственно скорректировать заключительную симплекс-таблицу и привести ее к оптимальному виду обычным симплекс-методом.*

Небазисными продуктами являются продукты 2 и 3, возьмем продукт 2, для него $c_2 = 1$. Предыдущего имеем $\Delta c_2 \in [-\infty, 2]$. Возьмем $\Delta c_2 = 3$, получим $c_2 = 1 + 3 = 4$. Симплекс таблицу скорректируем по формуле $d'_{x_2} = d_{x_2} - \Delta c_2 = 2 - 3 = -1$. Получаем симплекс-таблицу:

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	–1	5/2	1	0	30	–	Не опт
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	–	–
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	1	–	–

Приводим ее к оптимальному виду обычным симплекс-методом:

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	0	–1	5/2	1	0	30	–	Не опт
x_1	0	1	1	3/2	1/2	0	10	10	$x_2 \to B$
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	1	–	$B \to x_1$

B	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	Реш.	B_i/A_{ij}	Комм.
z	1	1	0	4	3/2	0	40	–	Опт.
x_2	0	1	1	3/2	1/2	0	10	–	
s_2	0	0	0	–1/2	–1/2	1	1	–	

$z\max = 40;$

$B = \{x_2, s_2\}; N = \{x_1, x_3, s_1\}$

$x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 1.$

4. Индивидуальные задания

№	Задание	№	Задание
1	$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20;$ $x_1 + x_2 + x_3 \le 11;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	2	$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20;$ $x_1 + x_2 + x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
3	$z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	4	$z = x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \to \max;$ $2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \le 20;$ $x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; x_3 \ge 0.$
5	$z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0; x_3 \ge 0.$	6	$z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 18;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
7	$z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 21;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	8	$z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 21;$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
9	$z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 21;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	10	$z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 21;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
11	$z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 21;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	12	$z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 21;$ $4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$

№	Задание	№	Задание
13	$z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 21;$ $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	14	$z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
15	$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	16	$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 28;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
17	$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	18	$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
19	$z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 16;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	20	$z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
21	$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max;$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	22	$z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 26;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$
23	$z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 26;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$	24	$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 26;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$

№	Задание	№	Задание
25	$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 28;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ _3 \ge 0.$	26	$z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$ $4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 28;$ $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 25;$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$

5. Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет каноническая задача линейного программирования?
2. Что такое преобразованная задача?
3. Записать структуру симплекс-таблицы.
4. Выписать условия допустимости и оптимальности решения, соответствующего текущей симплекс-таблице.
5. Привести формулы чувствительности целевой функции по ресурсам.
6. Из какого условия находятся интервалы устойчивости оптимального базиса при изменении ресурсов.
7. Как находится интервал устойчивости оптимального базиса при изменении цены небазисного продукта?
8. Из какого условия определяется интервал устойчивости оптимального базиса при вариации ценового коэффициента базисного продукта?
9. Каким методом доводится до оптимальной симплекс-таблица при недопустимом изменении величины ресурса?
10. Каким методом доводится до оптимальной симплекс-таблица при недопустимом изменении ценового коэффициента продукта?