МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор −
Проректор по учебной работе
______________ Е.А.Кудряшов
«____»____________2011г.

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Методические указания и индивидуальные задания
по выполнению лабораторной работы № 15

Курск 2011

УДК 51-74

Составители Л.И.Студеникина, Т.В.Шевцова

Рецензент
Кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
высшей математики Дмитриев В.И.

Метод наименьших квадратов: методические указания и индивидуальные задания по выполнению лабораторной работы №15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И.Студеникина, Т.В.Шевцова. Курск, 2011. 50 с. табл. 4. Библиогр.: 7 назв.

В данной работе содержатся краткие теоретические положения, образцы выполнения заданий необходимые для выполнения лабораторной работы, индивидуальные задания.

Работа предназначена для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Цель работы: 1. Изучить основы метода наименьших квадратов.

2. Научиться решать задачу аппроксимации дискретной зависимости $y(x_i)$ непрерывной функцией $y = f(x)$ определенного класса.

3. Освоить методику применения программных продуктов MathCAD и MSExcel для построения линейной и полиномиальной зависимостей по заданным эмпирическим данным.

Задание

Методом наименьших квадратов по заданным эмпирическим данным построить

1. линейную регрессию $y = kx + b$.
2. квадратичную регрессию $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Студентам инженерных специальностей рекомендуется выполнять задания, используя программный продукт MathCAD, экономических специальностей – программный продукт MSExcel. Образцы выполнения заданий в MathCAD и MSExcel приведены в настоящем пособии.

Сами индивидуальные задания смотри в разделе 2 .

1. Теоретические сведения

Метод наименьших квадратов (МНК) – один из наиболее часто используемых методов при обработке эмпирических данных, построении и анализе физических, биологических, технических, экономических и социальных моделей[*].

С помощью МНК решают задачу выбора параметров функции (заранее заданного вида) для приближённого описания зависимости величины y от величины x.

Исходные данные могут носить самый разнообразный характер и относиться к различным отраслям науки или техники, например:

- ✓ зависимость продолжительности службы электрических ламп (y) от поданного на них напряжения (x);
- ✓ зависимость пробивного напряжения конденсаторов (y) от температуры окружающей среды (x);
- ✓ зависимость предела прочности стали (y) от содержания углерода (x);
- ✓ зависимость показателей безработицы (y) и инфляции (x);
- ✓ зависимость роста преступности (y),% и роста безработицы (x),%
- ✓ зависимость цен товара (y) от спроса (x) на этот товар;
- ✓ зависимость частного потребления (y) от располагаемого дохода (x);
- ✓ зависимость температура воздуха (y) от высоты над уровнем моря (x) и другие зависимости.

Пусть необходимо установить функциональную зависимость между двумя эмпирическими данными x и y, значения которых занесены в следующую таблицу:

---

[*] Впервые МНК был предложен К. Гауссом и А. Лежандром на рубеже 18-19 веков. Первоначально МНК использовался для обработки результатов астрономических и геодезических наблюдений. Строгое математическое обоснование и установление границ содержательной применимости МНК даны А. А. Марковым и А. Н. Колмогоровым.

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

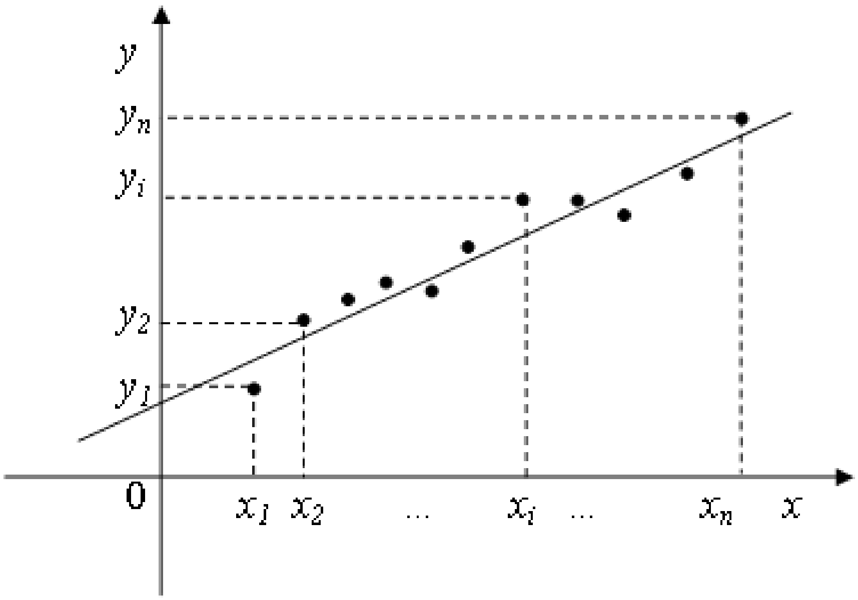
Точки $(x_i; y_i)$ координатной плоскости принято называть *экспериментальными*.

Установим вид функции $y = f(x)$ по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек.

Если точки расположены так, как показано на рис.1, то разумно предположить, что между x и y существует линейная зависимость, выражающаяся формулой:

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Рассмотрим случай такой зависимости.



Уравнение (1) можно представить в виде

$$y - (kx + b) = 0.$$

Так как точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$ не обязательно лежат на одной прямой, то, подставляя вместо x и y значения координат этих точек в выражение $y - (kx + b)$, получаем равенства:

$$y_1 - (kx_1 + b) = \delta_1,\ \ y_2 - (kx_2 + b) = \delta_2,\ \ldots,\ y_n - (kx_n + b) = \delta_n,$$

где δ_1, δ_2, …, δ_n – некоторые числа, которые называют *погрешностями* (*отклонениями*, *невязками*).

Понятно, что чем меньше эти погрешности по абсолютной величине, тем лучше прямая, задаваемая уравнением $y = kx + b$, описывает зависимость между экспериментально полученными значениями x и y.

Сущность метода наименьших квадратов заключается в подборе коэффициентов k и b таким образом, чтобы сумма квадратов погрешностей была как можно меньшей:

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))^2 \to \min \qquad (2)$$

Отметим, что в равенстве (2) находится сумма именно квадратов погрешностей, так как в случае суммирования самих погрешностей δ_i сумма может оказаться малой за счет разных знаков погрешностей.

Так как в равенстве (2) x_i и y_i – заданные числа, а k и b – неизвестные, то сумму S можно рассмотреть как функцию двух переменных k и b: $S = S(k,b)$. Исследуем ее на экстремум:

Необходимое условие существования экстремума функции двух переменных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))(-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))\,x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))(-1) = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b)).$$

Приравнивая эти частные производные к нулю, получаем линейную систему двух уравнений с двумя переменными k и b:

$$\begin{cases} -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b))\,x_i = 0, \\ -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - (kx_i + b)) = 0. \end{cases}$$

Преобразуя первое уравнение системы, получим

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i x_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Преобразуя второе уравнение системы, получим

$$-\sum_{i=1}^{n} y_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = 0.$$

Откуда имеем систему:

$$\begin{cases} k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) называется *нормальной системой*.

Из этой системы находим k и b, которые затем подставляем в уравнение (1) и получаем искомое уравнение прямой.

Тот факт, что функция $S = S(k,b)$ в найденной точке (k,b) имеет именно минимум, устанавливается с помощью частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = -2\sum_{i=1}^{n}(-x_i)\,x_i = 2\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = -2\cdot\sum_{i=1}^{n}(-1) = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k\,\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(-x_i) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Вычислим $\Delta = \dfrac{\partial^2 S}{\partial k^2}\cdot\dfrac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial k\,\partial b}\right)^2.$

$$\Delta = 4n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.^{*}$$

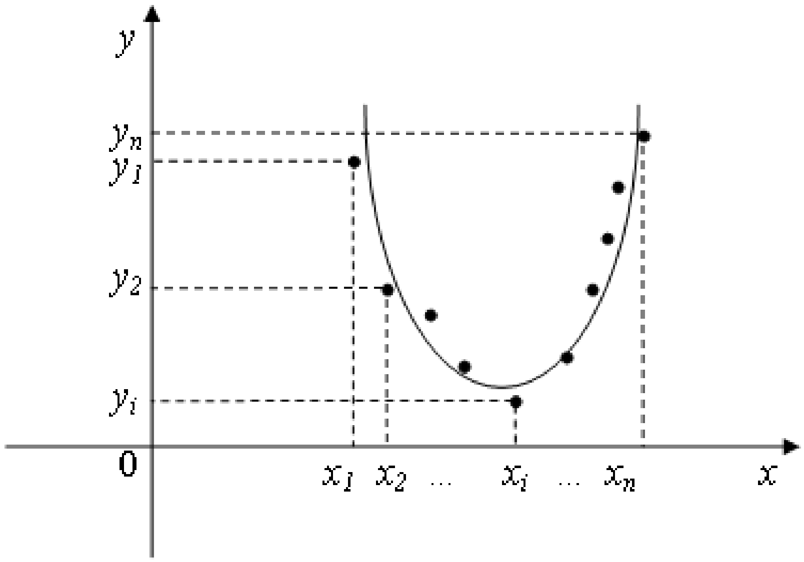
---

[*] Последнее равенство читатель может установить самостоятельно, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского.

Очевидно, $\Delta > 0$, следовательно, в найденной точке (k,b) функция $S = S(k,b)$ имеет экстремум; а так как $\dfrac{\partial^2 S}{\partial k^2} > 0$, то, согласно достаточному условию экстремума функции двух переменных, в точке (k,b) функция имеет минимум.

Полученная функция $y = kx + b$ называется *линейной регрессией*, а коэффициенты k и b – *коэффициентами регрессии* (величины y на x).

Зависимость между экспериментально полученными величинами может быть близка к квадратичной (рис.2). В этом случае задача состоит в нахождении коэффициентов a_2, a_1, a_0 для составления уравнения вида $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.



Можно доказать, что для определения коэффициентов a_2, a_1, a_0 следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

В экспериментальной практике в качестве приближающих функций, помимо линейной $y = kx + b$ и квадратичной $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, в зависимости от характера точечного графика часто используются следующие приближающие функции:

$$y = ax^m,\quad y = ae^{mx},\quad y = \frac{1}{ax+b},\quad y = \frac{a}{x} + b,\quad y = \frac{x}{ax+b},\quad y = a\ln x + b.$$

Очевидно, что когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Пример

Д.И. Менделеев в труде «Основы химии» приводит данные растворимости y натриевой селитры $NaNO_3$ на 100 г воды в зависимости от температуры t^0:

t_i^0	0	4	10	15	21	29	35	51	68
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Соответствующая зависимость может быть представлена линейной функцией $y = kt + b$.

Требуется найти аппроксимирующую (приближаемую) функцию в предположении, что она является линейной.

Найдем коэффициенты k и b.

Для этого составим и решим нормальную систему уравнений

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} y_i t_i, \\ k\sum_{i=1}^{n} t_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

n – число эмпирических точек, $n = 9$.

Выполним предварительные расчеты и для удобства занесем их в таблицу (столбцы t_i, y_i, t_i^2, $t_i y_i$)

№	t_i	y_i	t_i^2	$t_i y_i$	$y_{рас.i} = kt_i + b_i$	δ_i	δ_i^2
1	0	66,7	0	0	67,55	-0,85	0,7225
2	4	71,0	16	284	71,03	-0,03	0,0009
3	10	76,3	100	763	76,25	0,05	0,0025
4	15	80,6	225	1209	80,6	0	0
5	21	85,7	441	1799,7	85,82	-0,12	0,0144
6	29	92,9	841	2694,1	92,78	0,12	0,0144
7	35	99,4	1225	3479	98	1,4	1,96
8	51	113,6	2601	5793,6	111,92	1,68	2,8224
9	68	125,1	4624	8506,8	126,71	-1,61	2,5921
$\sum$	**233**	**811,3**	**10073**	**24529,2**			**8,19**

Таким образом, нормальная система принимает вид

$$\begin{cases} k \cdot 10073 + b \cdot 233 = 24529{,}2 \\ k \cdot 233 + b \cdot 9 = 811{,}3. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$k \approx 0{,}87$$

$$b \approx 67{,}55$$

Следовательно, уравнение искомой прямой

$$y = 0{,}87t + 67{,}55$$

Вычислим теперь для исходных значений t_i расчетные значения $y_{рас.i} = kt_i + b_i$ и занесем полученные результаты в таблицу (столбец $y_{рас.i} = kt_i + b_i$)

Найдем $\delta_i = y_i - (kx_i + b)$ и занесем результаты в таблицу (столбец δ_i).

Вычислим сумму квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \approx 8{,}19.$$

2. Индивидуальные задания

Задание 1 (для студентов экономических специальностей)

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1</td><td>В таблице приведены данные численности занятого населения (x, млн.) и валового выпуска продукции (y, у.е.).
<table><tr><td>x_i</td><td>80</td><td>82</td><td>83</td><td>84</td><td>85</td><td>86</td><td>88</td><td>89</td><td>90</td><td>91</td></tr><tr><td>y_i</td><td>32</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>40</td><td>39</td><td>40</td></tr></table>В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать валовой выпуск продукции в случае, если занятое население увеличится на 10% по сравнению с последними данными (90 млн.)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>В таблице приведены данные об уровне безработицы (x) и уровне преступности (y) в некотором населенном пункте.
<table><tr><td>x_i</td><td>0,5</td><td>1,2</td><td>2</td><td>3,1</td><td>4</td><td>5,2</td><td>5,9</td><td>6,1</td><td>6,2</td><td>6,3</td></tr><tr><td>y_i</td><td>4,25</td><td>4,32</td><td>4,4</td><td>4,51</td><td>4,6</td><td>4,72</td><td>4,79</td><td>4,9</td><td>5,0</td><td>5,2</td></tr></table>В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать уровень преступности в случае, когда безработица отсутствует.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>В таблице приведены данные о динамике темпов прироста курса акций (y, в %) за определенный период (t – одна неделя).
<table><tr><td>t_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>y_i</td><td>10,2</td><td>8,3</td><td>5,4</td><td>4,1</td><td>2,2</td><td>0</td><td>-1,6</td><td>-3,9</td><td>-5,9</td><td>-7,8</td></tr></table>В предположении, что между t и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kt + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы о возможной динамике темпов прироста на 12 неделе.</td></tr>
</table>

4

Торговое предприятие имеет сеть, состоящую из 10 магазинов, информация о деятельности которых: годовой товарооборот (y, млн. руб.) и торговая площадь (x, тыс. м^2) представлена в таблице.

x_i	0,24	0,41	0,55	0,58	0,78	0,94	0,98	1,21	1,28	1,32
y_i	19,8	38,1	41,0	43,1	56,3	68,5	75,0	89,1	91,1	91,3

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать годовой товарооборот в случае, если торговая площадь составит ровно 1 тыс. м^2.

5

Показатели по объему производства (x, у.е.) и затратам (y, тыс. руб.), взятые из отчетной ведомости предприятия за 10 месяцев, приведены в таблице.

x_i	2,32	2,33	2,38	2,41	2,44	2,48	2,51	2,55	2,58	2,60
y_i	427	430	440	444	448	455	460	462	465	466

Полагая, что зависимость между x и y задается формулой $y = kx + b$, где b – постоянные затраты в тыс. руб., k – переменные затраты на 1 условную единицу продукции, определить параметры k и b методом наименьших квадратов. Рассчитать возможные затраты на производство в случае, если объем производства достигнет 3 у.е.

6

В таблице приведена динамика валового выпуска (y, у.е.) за последние 10 лет (x – год)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	178	182	190	199	200	213	220	231	235	242

Предполагая линейную зависимость валового выпуска от времени, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз валового выпуска на следующий год.

7

Показатели стоимости основных производственных фондов (x, млн. руб.) и среднесуточной производительности (y, тонны) приведены в таблице.

x_i	2,1	2,3	2,4	2,9	4,1	4,7	5,5	7,2	10,2	14,3
y_i	27	29	30	35	36	44	47	55	63	73

Предполагая линейную зависимость y от x, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз среднесуточной производительности при стоимости основных производственных фондов 16 млн. руб.

8

В таблице приведены данные о количестве пропусков занятий (x) студентом в течение учебного семестра и результатах (y, %) написания экзаменационного теста.

x_i	1	3	5	6	8	10	12	14	15	16
y_i	85	75	70	60	50	40	20	10	10	5

Предполагая наличие линейной зависимости между x и y определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз результатов теста при отсутствии пропусков.

9

В таблице приведены данные об объемах производства (x, у.е.) некоторой компании в течение 10 месяцев и соответствующей операционной прибылью (y,тыс. руб.).

x_i	500	520	523	530	550	555	560	562	565	570
y_i	61	66,8	67	69	74	76,7	78	79	79,3	81

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы о возможной месячной прибыли, если объем производства достигнет 600 у.е.

10 В таблице приведены данные об уровне безработицы (x) и уровне преступности (y) в некотором населенном пункте.

x_i	0,6	1,3	2,2	3,3	4,2	5,3	6,0	6,3	6,4	6,5
y_i	4,2	4,27	4,32	4,47	4,53	4,68	4,85	5,01	5,15	5,22

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать уровень преступности в случае, когда безработица отсутствует.

11 В таблице приведены данные численности занятого населения (x, млн.) и валового выпуска продукции (y, у.е.).

x_i	70	73	74	75	76	77	79	80	81	83
y_i	219	241	250	264	265	272	281	291	309	320

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать валовой выпуск продукции в случае, если занятое население увеличится на 10% по сравнению с начальными данными (80 млн.)

12 Показатели по объему производства (x, у.е.) и затратам (y, тыс. руб.), взятые из отчетной ведомости предприятия за 10 месяцев, приведены в таблице.

x_i	4,25	4,3	4,4	4,42	4,45	4,5	4,53	4,55	4,6	4,62
y_i	530	540	553	554	557	560	565	568	571	572

Полагая, что зависимость между x и y задается формулой $y = kx + b$, где b – постоянные затраты в тыс. руб., k – переменные затраты на 1 условную единицу продукции, определить параметры k и b методом наименьших квадратов. Рассчитать возможные затраты на производство в случае, если объем производства достигнет 3 у.е.

13 В таблице приведена сведения об объеме спроса (y, у.е.) на некоторую продукцию и цены на эту продукцию (x, тыс. руб.).

x_i	10	10,6	11	12	12,5	12,8	13	13,2	13,3	13,7
y_i	68	64	59	52	45	42	38	37	35	34

Предполагая линейную зависимость объема спроса от цены на продукцию, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз объема спроса в случае, если цена на продукцию достигнет 14 тыс. руб.

14 Показатели стоимости основных производственных фондов (x, млн. руб.) и среднесуточной производительности (y, тонны) приведены в таблице.

x_i	2,6	2,8	2,9	3,4	4,6	5,2	6,1	7,7	10,6	14,0
y_i	19	18	20	23	26	31	37	45	53	68

Предполагая линейную зависимость y от x, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз среднесуточной производительности при стоимости основных производственных фондов 2 млн. руб.

15 Торговое предприятие имеет сеть, состоящую из 10 магазинов, информация о деятельности которых: годовой товарооборот (y, млн. руб.) и торговая площадь (x, тыс. м^2) представлена в таблице.

x_i	0,25	0,42	0,57	0,59	0,79	0,95	0,99	1,23	1,29	1,33
y_i	21,9	40,1	43,2	44,3	58,3	70,6	77,2	91,2	93,2	93,4

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать годовой товарооборот в случае, если торговая площадь составит ровно 1 тыс. м^2.

Задание 2 (для студентов экономических специальностей)

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от плотности населения (x, чел./км^2.) при возможном коэффициенте пропускания услуги (радиусе обслуживания базовой станции) $R = 1$ км.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td><td>95</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>2600</td><td>1800</td><td>1100</td><td>900</td><td>750</td><td>600</td><td>530</td><td>500</td><td>480</td><td>470</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения потенциального абонента при плотности населения 100 чел./км^2.
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
В таблице приведены данные о производительности труда (z) рабочего за одну смену в зависимости от времени (t, час.)
<table>
<tr><td>t_i</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>6,5</td><td>7</td><td>7,5</td></tr>
<tr><td>z_i</td><td>35</td><td>45</td><td>53</td><td>60</td><td>72</td><td>79</td><td>81</td><td>80</td><td>79</td><td>76</td></tr>
</table>
В предположении, что между t и z существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $z = a_2 t^2 + a_1 t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать производительность труда рабочего в первый час рабочего дня, то есть при t=1.
</td></tr>
</table>

3	В таблице приведены данные о показателях конкуренции (x) и средневзвешенные по частоте упоминания количества патентов (y).

x_i	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,9
y_i	4,5	4,8	5,3	5,9	6,1	6,4	6,1	5,4	4,8	4,3

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать количество патентов, в случае, если показатель конкуренции составит 1.

4	При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от радиуса обслуживания базовой станции (x, км.) при плотности населения $\rho = 10$ чел./км^2.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
y_i	8000	3500	2100	1300	1100	900	850	830	820	815

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения потенциального абонента в случае, если радиус обслуживания базовой станции составит 7 км.

5	В таблице приведены данные о потреблении электроэнергии (P, кВт) городскими предприятиями некоторого города в зависимости от времени (t, час.)

t_i	0,5	1	2	3	4	5	6	6,5	7	7,5
$P_i \cdot 10$	1000	1001	1004	1010	1020	1030	1050	1060	1070	1080

В предположении, что между t и P существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $P = a_2 t^2 + a_1 t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать потребление электроэнергии в конце рабочего дня, то есть при t=8.

6

В таблице приведены данные о росте объема выручки (y, тыс. у.е.) косметической компании в зависимости от числа клиентов (x).

x_i	900	950	1000	1040	1080	1100	1120	1130	1135	1140
$y_i \cdot 10$	992	1101	1203	1289	1381	1432	1478	1505	1514	1530

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать объем выручки, если число клиентов достигнет 1150 человек.

7

В таблице приведены данные расходах на рекламу (x, тыс. у.е.) и сбыте продукции (y, тыс. ед.)

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	1,6	2,5	4	5,3	7,4	9,7	12	15	18	19,9

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать сбыт продукции при отсутствии рекламы.

8

В таблице приведены данные о показателях конкуренции (x) и средневзвешенные по частоте упоминания количества патентов (y)

x_i	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96
y_i	3,3	3,6	4,2	4,5	4,8	5,3	5,9	6,1	6,4	6,1

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать количество патентов, в случае, если показатель конкуренции равен 0,85.

9

При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от плотности населения (x, чел./км^2.) при возможном коэффициенте пропускания услуги (радиусе обслуживания базовой станции) $R = 3$ км.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95
y_i	1000	600	480	430	415	412	410	405	400	392

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения потенциального абонента при плотности населения 100 чел./км^2.

10

В таблице приведены данные о продуктивности животных (x, кг/гол.) и себестоимости единицы продукции (y, руб.)

x_i	1100	1200	1300	1500	1700	1800	2000	2400	2700	2900
y_i	369	357	324	293	245	233	202	162	151	152

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать себестоимость единицы продукции, если продуктивность животных упадет до 3000 кг/гол.

11

При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от радиуса обслуживания базовой станции (x, км.) при плотности населения $\rho = 80$ чел./км^2.

x_i	1	1,2	1,4	1,7	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	1100	920	850	830	800	785	770	760	750	745

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогно-

<table>
<tr><td></td><td>зировать стоимость подключения потенциального абонента в случае, если радиус обслуживания базовой станции составит 5 км.</td></tr>
<tr><td>12</td><td>
В таблице приведены данные о производительности труда (z) рабочего за одну смену в зависимости от времени (t, час.)
<table>
<tr><td>t_i</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>7,5</td></tr>
<tr><td>z_i</td><td>13</td><td>25</td><td>35</td><td>45</td><td>60</td><td>72</td><td>79</td><td>81</td><td>79</td><td>76</td></tr>
</table>
В предположении, что между t и z существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $z = a_2 t^2 + a_1 t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать производительность труда рабочего в конце рабочего дня, то есть при t=8.
</td></tr>
<tr><td>13</td><td>
В таблице приведены цены (x, тыс. руб.) на продукцию и месячной выручки предприятия (y, тыс. руб.)
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1,2</td><td>2</td><td>2,6</td><td>3,2</td><td>3,6</td><td>4,1</td><td>5,0</td><td>5,9</td><td>7,2</td><td>7,3</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>120</td><td>250</td><td>322</td><td>365</td><td>430</td><td>480</td><td>555</td><td>605</td><td>643</td><td>675</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать выручку предприятия в случае, если цена на продукцию составит 8 тыс. руб.
</td></tr>
<tr><td>14</td><td>
При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от плотности населения (x, чел./км^2.) при возможном коэффициенте пропускания услуги (радиусе обслуживания базовой станции) $R = 1$ км.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>10</td><td>15</td><td>25</td><td>35</td><td>45</td><td>55</td><td>65</td><td>75</td><td>85</td><td>95</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>2600</td><td>2100</td><td>1300</td><td>1000</td><td>820</td><td>670</td><td>580</td><td>510</td><td>490</td><td>470</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии
</td></tr>
</table>

	$y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Проанализировать, какой может быть плотность населения, чтобы стоимость подключения потенциального абонента составила 450 у.е.?
15	В таблице приведены данные расходах на рекламу (*x,* тыс. у.е.) и сбыте продукции (*y*, тыс. ед.) <table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td><td>3,5</td><td>4</td><td>4,5</td><td>5</td><td>5,5</td></tr><tr><td>y_{i}</td><td>1,5</td><td>2,4</td><td>4,1</td><td>5,3</td><td>7,3</td><td>9,6</td><td>12,1</td><td>14,9</td><td>18,2</td><td>20</td></tr></table>В предположении, что между *x* и *y* существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать сбыт продукции при отсутствии рекламы.

Дополнительное задание (для студентов экономических специальностей)

В задании 1 определить также параметры квадратичной регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, вычислить сумму квадратов отклонений, сравнить с результатом, полученным в задании 1, и сделать вывод.

В задании 2 определить также параметры линейной регрессии $y = kx + b$, вычислить сумму квадратов отклонений, сравнить с результатом, полученным в задании 2, и сделать вывод.

Задание 1 (для студентов инженерных специальностей)

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>З а д а н и е</th></tr>
<tr><td>1</td><td>В таблице приведены данные о расходе топлива (y, л на 100 км) автомобиля с двигателем объемом 2 литра с автоматической трансмиссией в зависимости от скорости движения (x, км/ч).
<table><tr><td>x_i</td><td>10</td><td>30</td><td>40</td><td>70</td><td>90</td><td>110</td><td>130</td><td>140</td><td>150</td><td>160</td></tr><tr><td>y_i</td><td>4,5</td><td>4,8</td><td>5,1</td><td>6</td><td>7,5</td><td>8,1</td><td>9</td><td>9,8</td><td>11,3</td><td>14</td></tr></table>В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать расход топлива при скорости 175 км/ч.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>В таблице приведены данные о сроке службы колеса вагона в годах (x) и износа толщины обода колеса, (y, мм).
<table><tr><td>x_i</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td><td>3,5</td><td>4</td><td>4,5</td><td>5</td></tr><tr><td>y_i</td><td>0,4</td><td>0,7</td><td>1,2</td><td>1,7</td><td>1,9</td><td>2,2</td><td>2,6</td><td>3</td><td>3,5</td><td>3,8</td></tr></table>В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы об износе толщины обода колеса через 5,5 лет.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>В таблице приведены данные о расходе топлива (y, л на 100 км) автомобиля с двигателем объемом 1,5 литра с автоматической трансмиссией в зависимости от скорости движения (x, км/ч).
<table><tr><td>x_i</td><td>10</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>90</td><td>110</td><td>130</td><td>140</td><td>150</td><td>160</td></tr><tr><td>y_i</td><td>3,8</td><td>4</td><td>4,2</td><td>4,8</td><td>5,5</td><td>6</td><td>7</td><td>8,1</td><td>10</td><td>12</td></tr></table>В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать расход топлива при скорости 170 км/ч.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>В таблице приведены данные об остаточной величине глубины протектора передних колес автомобиля в мм (y) в зависимости от величины пробега (x, тыс. км).
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>9,0</td><td>8,5</td><td>7,9</td><td>7,5</td><td>7,0</td><td>6,1</td><td>5,0</td><td>4,1</td><td>3</td><td>2,0</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы об износе протектора колеса через 42 тыс. км.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>В таблице приведены данные о расходе топлива (y, л на 100 км) автомобиля с дизельным двигателем объемом 2,2 литра с механической трансмиссией в зависимости от скорости движения (x, км/ч).
<table>
<tr><td>x_i</td><td>10</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>90</td><td>110</td><td>120</td><td>130</td><td>140</td><td>150</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>1,5</td><td>1,8</td><td>3</td><td>3,9</td><td>4,8</td><td>5,5</td><td>5,7</td><td>7</td><td>8,1</td><td>9,4</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать расход топлива при скорости 160 км/ч.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>В таблице приведены данные об остаточной величине глубины протектора задних колес автомобиля в мм (y) в зависимости от величины пробега (x, тыс. км).
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>9,0</td><td>8,2</td><td>7,4</td><td>6,6</td><td>5,8</td><td>4,9</td><td>4,1</td><td>3,3</td><td>2,5</td><td>1,8</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы о предельно допустимом пробеге колес автомобиля при минимально допустимой глубине протектора 1,6 мм.</td></tr>
</table>

7

В таблице приведены данные о зависимости теплопроводности легких бетонов (y, Вт/(м$\cdot$С^o) от плотности (x, кг/м^3).

x_i	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
y_i	0,2	0,22	0,24	0,28	0,33	0,38	0,4	0,42	0,44	0,47

Предполагая линейную зависимость y от x, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз теплопроводности при плотности 1800 кг/м^3.

8

В таблице приведены данные о количестве пропусков занятий (x) студентом в течение учебного семестра и результатах (y, %) написания экзаменационного теста.

x_i,	1	2	4	6	8	10	12	13	15	17
y_i	85	75	70	60	50	40	20	15	10	5

Предполагая наличие линейной зависимости между x и y определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$, используя метод наименьших квадратов. Получить прогноз результатов теста при пропуске в 18 ч.

9

В таблице приведены данные о зависимости прочности портландцемента (y, МПа) от его удельной поверхности (x, см^2/г).

$x_i \cdot 10^3$	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
y_i	25	28	30	32	36	39	41	44	46	47

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Сделать выводы о прочности при удельной поверхности $6{,}2 \cdot 10^3$.

10

В таблице приведены результаты измерений положения y (м) материальной точки в зависимости от времени t (сек).

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	5,1	6,9	9,1	10,8	13,2	14,9	17,2	18,8	21,2	22,9

В предположении, что между t и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kt + b$ методом наименьших квадратов. Сделать вывод о возможном положении точки через 12 сек.

11

Для исследования износа рабочей части резца в зависимости от времени работы взяли 10 новых резцов и каждый день измеряли толщину рабочей части. Результаты сведены в таблицу, где y (мм) – толщина рабочей части резца, x – продолжительность работы в днях:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i,	0,1	0,15	0,3	0,4	0,45	0,55	0,65	0,75	0,9	1

В предположении, что между x и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать износ толщины рабочей части резца за 12 дней.

12

В таблице приведены данные о растворимости (y) натриевой селитры $NaNO_3$ на 100 г воды в зависимости от температуры (t, ^{0}С).

t_i	0	2	10	16	21	30	35	51	63	67
y_i	66,7	69,2	76,3	81,6	85,7	94,7	99,4	113,6	119,8	123

В предположении, что между t и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kt + b$ методом наименьших квадратов. Вычислить возможную растворимость при температуре 60^{0}С.

13

За изменением реакции разложения аммиака следили по изменению давления (P, мм ртутного столба) в различные моменты времени (t, сек). Результаты наблюдений приведены в таблице.

t	100	200	300	400	500	600	700	800	1000
P	11	22,1	33,2	44	55,2	66,3	77,5	87,9	110

В предположении, что между t и P существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $P = kt + b$ методом наименьших квадратов. Сделать вывод о возможном давлении при t=900.

14

В таблице приведены результаты измерений сопротивления проводника (R, Ом) в зависимости от температуры ($t, ^0C$).

t	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
R	15	19	23	27	31	34	37	39	42	45

В предположении, что между t и R существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $R = kt + b$ методом наименьших квадратов. Сделать вывод о возможном сопротивлении проводника при температуре 60^0C.

15

В таблице приведены результаты измерений положения y (м) материальной точки в зависимости от времени t (сек).

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	6,3	9,9	14,1	18,2	21,9	26,1	29,8	33,8	37,9	41,9

В предположении, что между t и y существует линейная зависимость, определить параметры линейной регрессии $y = kt + b$ методом наименьших квадратов. Сделать вывод о возможном положении точки через 11 сек.

Задание 2 (для студентов инженерных специальностей)

<table>
<tr><th>Вариант</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
В таблице приведены данные о высоте подброшенного над землей вверх тела (h, м) в зависимости от времени (t, сек) прошедшего с момента броска.
<table>
<tr><td>t_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>h_i</td><td>2,3</td><td>3,71</td><td>4,8</td><td>5,9</td><td>6,3</td><td>6,25</td><td>5,87</td><td>4,82</td><td>3,7</td><td>2,2</td></tr>
</table>
В предположении, что между t и h существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $h = a_2 t^2 + a_1 t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать высоту тела на 11 сек.
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака. В таблице приведены данные об изменении высоты (h, м) и времени (t, мин).
<table>
<tr><td>t_i</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>20</td></tr>
<tr><td>h_i</td><td>3,6</td><td>3,2</td><td>2,57</td><td>1,95</td><td>1,45</td><td>1,09</td><td>0,9</td><td>0,6</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr>
</table>
В предположении, что между t и h существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $h = a_2 t^2 + a_1 t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать время, когда бак опустеет.
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
В таблице приведены данные о времени работы (t, у.е.) некоторого алгоритма в зависимости от количества его элементов (x).
<table>
<tr><td>x_i</td><td>9</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>21</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr>
<tr><td>t_i</td><td>152</td><td>280</td><td>380</td><td>500</td><td>630</td><td>780</td><td>860</td><td>1025</td><td>1130</td><td>1225</td></tr>
</table>
В предположении, что между x и y существует квадратич-
</td></tr>
</table>

ная зависимость, определить параметры регрессии $t = a_2x^2 + a_1 + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать время работы алгоритма, состоящего из 30 элементов.

4

При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от радиуса обслуживания базовой станции (x, км.) при плотности населения $\rho = 10$ чел./км^2.

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6
y_i	8002	3507	2101	1302	1102	901	849	831	820	815

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения потенциального абонента в случае, если радиус обслуживания базовой станции составит 6,5 км.

5

В таблице приведены данные о высоте подброшенного над землей вверх тела (h, м) в зависимости от времени (t,сек) прошедшего с момента броска.

t_i	1,2	2	3	4	5,1	5,9	7	8	9	9,8
h_i	2,3	3,71	4,81	5,9	6,3	6,25	5,87	4,82	3,7	2,29

В предположении, что между t и h существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $h = a_2t^2 + a_1t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать высоту тела на 10 сек.

6

С ростом диагонали экрана качество изображения падает по квадратичной зависимости. В таблице приведены данные о длине диагонали экрана (x, дюйм) и качестве изображения (y, %) при нахождении на фиксированном расстоянии от экрана.

x_i	14	15	17	19	20	21	22	24	27	32
y_i	70	69	68,5	67	66,5	65,5	65	63	60	53

	В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Проанализировать, каким может быть качество изображения при диагонали экрана 40 дюймов.
7	Зависимость температуры T (в градусах Кельвина) от времени t (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и приведена в таблице <table><tr><td>t_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3,2</td><td>3,6</td><td>4</td><td>5,0</td><td>5,9</td><td>6</td><td>7,3</td></tr><tr><td>T_i</td><td>550</td><td>640</td><td>704</td><td>719</td><td>735</td><td>756</td><td>810</td><td>855</td><td>865</td><td>924</td></tr></table>В предположении, что между T и t существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $T = a_2t^2 + a_1t + a_0$ методом наименьших квадратов. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1500 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.
8	В таблице приведены данные о времени работы (τ, мсек.) некоторого алгоритма в зависимости от количества его элементов (x). <table><tr><td>x_i</td><td>9</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>21</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr><tr><td>τ_i</td><td>150</td><td>283</td><td>377</td><td>503</td><td>628</td><td>778</td><td>861</td><td>1024</td><td>1130</td><td>1228</td></tr></table>В предположении, что между x и τ существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $\tau = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать время работы алгоритма, состоящего из 10 элементов.
9	При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от плотности населения (x, чел./км^2.) при возможном коэффициенте пропускания услуги (радиусе обслуживания базовой

станции) $R = 3$ км.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95
y_i	1000	602	479	430	416	412	410	406	400	391

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения потенциального абонента при плотности населения 100 чел./км^2.

10

В таблице приведены данные о зависимости выделяемой резистором мощности P (усл. ед.) от напряжения U (усл. ед.)

U_i	10	30	60	80	100	120	140	160	180	200
P_i	10	90,2	359	638	999,9	1438	1961	2562	3240	4001

В предположении, что между U и P существует квадратичная зависимость $P = a_2U^2 + a_1U + a_0$, определить параметры регрессии методом наименьших квадратов. Спрогнозировать мощность при напряжении 170 .

11

При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от радиуса обслуживания базовой станции (x, км.) при плотности населения $\rho = 80$ чел./км^2.

x_i	1	1,2	1,4	1,7	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	1100	920	850	830	800	785	770	760	750	745

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения в случае, если радиус обслуживания базовой станции составит 5 км.

12	В таблице приведены данные о высоте подброшенного над землей вверх тела (h, м) в зависимости от времени (t,сек) прошедшего с момента броска.

t_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
h_{i}	10,2	10,37	10,5	10,6	10,76	10,8	10,9	11	11,1	11,2

В предположении, что между t и h существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $h = a_2t^2 + a_1t + t_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать высоту тела на 2-ой сек.

13	С ростом диагонали экрана качество изображения падает по квадратичной зависимости. В таблице приведены данные о длине диагонали экрана (x, дюйм) и качестве изображения (y, %) при фиксированном расстоянии от экрана.

x_i	14	15	17	19	20	21	22	24	27	32
y_{i}	70	69,5	68,5	67,5	66	65	64,5	62,5	60	53,5

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Проанализировать, каким может быть качество изображения при диагонали экрана 42 дюйма.

14	В таблице приведены данные о показателях конкуренции (x) и средневзвешенные по частоте упоминания количества патентов (y)

x_i	0,87	0,88	0,89	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96
y_{i}	3,35	3,62	4,21	4,5	4,9	5,3	5,8	6,11	6,3	6,1

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать количество патентов, в случае, если показатель конкуренции равен 0,86.

15

При моделировании распространения сетей беспроводного доступа были получены следующие данные о стоимости подключения потенциального абонента (y, у.е.) в зависимости от требуемой пропускной способности (x, Мбит/с.) при плотности населения $\rho = 80$ чел./км^2

x_i	0,1	0,2	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,8
y_i	300	340	401	470	540	602	640	680	731	880

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать стоимость подключения, если желаемая скорость доступа составляет 2 Мбит/с.

Дополнительное задание (для студентов инженерных специальностей)

В задании 1 определить также параметры квадратичной регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, вычислить сумму квадратов отклонений, сравнить с результатом полученным в задании 1 и сделать вывод.

В задании 2 определить также параметры линейной регрессии $y = kx + b$, вычислить сумму квадратов отклонений, сравнить с результатом полученным в задании 2 и сделать вывод.

3. Образцы выполнения заданий

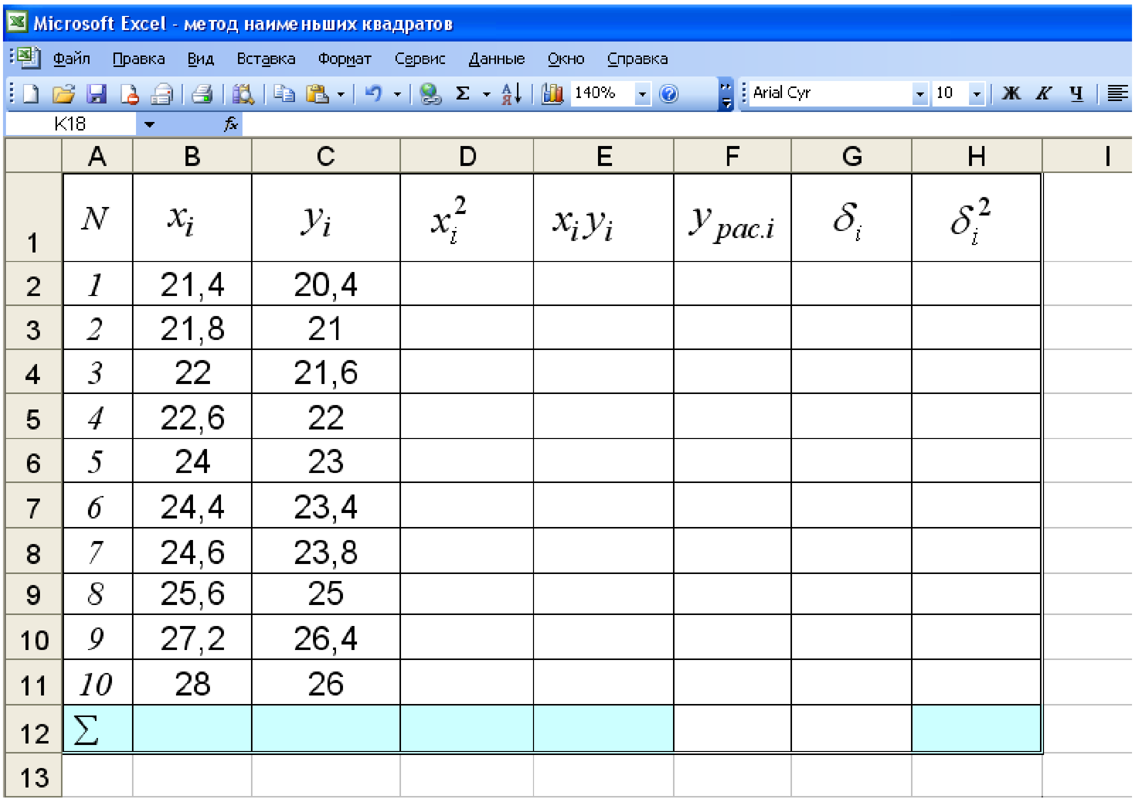
3.1 Образец выполнения задания 1 в MSExcel

Для анализа зависимости объема потребления y (в тыс. руб.) от располагаемого дохода x (в тыс. руб.) отобрана выборка объема n=10 (помесячно с сентября по июнь включительно), результаты которой приведены в таблице. Определить параметры линейной регрессии $y = kx + b$ методом наименьших квадратов. Спрогнозировать потребление при доходе x=30 тыс. руб.

x_i	21,4	21,8	22,0	22,6	24,0	24,4	24,6	25,6	27,2	28,0
y_i	20,4	21,0	21,6	22,0	23,0	23,4	23,8	25,0	26,4	26,0

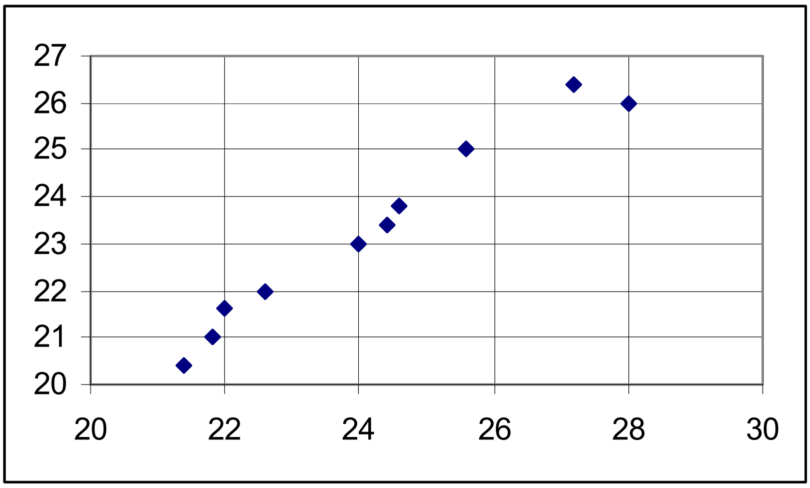
<u>Ход работы</u>

1) Ввести в таблицу согласно варианта эмпирические данные (столбцы *B*, *C*).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_{рас.i}$	δ_i	δ_i^2
2	1	21,4	20,4					
3	2	21,8	21					
4	3	22	21,6					
5	4	22,6	22					
6	5	24	23					
7	6	24,4	23,4					
8	7	24,6	23,8					
9	8	25,6	25					
10	9	27,2	26,4					
11	10	28	26					
12	$\sum$							
13								

2) Построить график исходных данных. Для этого в меню *Вставка* выбрать *Диаграмма*, указать тип диаграммы *Точечная*. Далее выбрать *Диапазон*: столбцы *B* и *C*. В *Ряд* добавить подписи по осям. По графику убедиться в возможной линейной зависимости между x и y.



3) Произвести необходимые вычисления (столбцы D, E) Вычислить суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (в строке 12), используя встроенную функцию СУММ.

Microsoft Excel - метод наименьших квадратов

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_{рас.i}$	δ_i	δ_i^2
2	1	21,4	20,4	457,96	436,56			
3	2	21,8	21	475,24	457,8			
4	3	22	21,6	484	475,2			
5	4	22,6	22	510,76	497,2			
6	5	24	23	576	552			
7	6	24,4	23,4	595,36	570,96			
8	7	24,6	23,8	605,16	585,48			
9	8	25,6	25	655,36	640			
10	9	27,2	26,4	739,84	718,08			
11	10	28	26	784	728			
12	$\sum$	241,6	232,6	5883,7	5661,3			
13								

4) Составить и записать систему уравнений для нахождения коэффициентов k и b.

$$\begin{cases} k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

В данном случае в результате имеем систему:

$$\begin{cases} k\cdot 5883{,}7 + b\cdot 241{,}6 = 5661{,}3 \\ k\cdot 241{,}6 + b\cdot 10 = 232{,}6. \end{cases}$$

5) Неизвестные k и b найти по формулам Крамера:

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ b = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных в составленной системе,

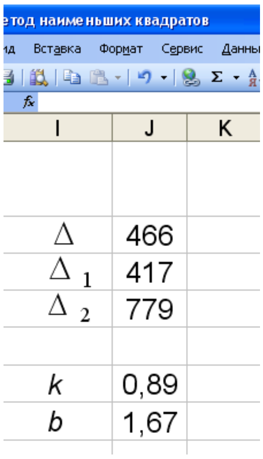
Δ_1 – определитель, полученный из определителя Δ заменой 1-го столбца на столбец свободных членов,

Δ_2 – определитель, полученный из определителя Δ заменой 2-го столбца на столбец свободных членов, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum\limits_i x_i^2 & \sum\limits_i x_i \\ \sum\limits_i x_i & n \end{vmatrix} = \sum_i x_i^2 \cdot n - \left(\sum_i x_i\right)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_i x_i y_i & \sum\limits_i x_i \\ \sum\limits_i y_i & n \end{vmatrix} = \sum_i x_i y_i \cdot n - \sum_i x_i \cdot \sum_i y_i,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sum\limits_i x_i^2 & \sum\limits_i x_i y_i \\ \sum\limits_i x_i & \sum\limits_i y_i \end{vmatrix} = \sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i.$$



I	J	K
Δ	466	
Δ_1	417	
Δ_2	779	
k	0,89	
b	1,67	

6) Составить и записать уравнение $y = kx + b$.

В рассматриваемом случае получаем уравнение $y = 0{,}89\,x + 1{,}67$.

7) В таблице (столбец *F*) для эмпирических значений x_i по найденному уравнению вычислить $y_{pac.i} = kx_i + b$.

Вычислить $\delta_i = y_i - y_{pac.i}$ (столбец *G*) и δ_i^2 (столбец *H*).

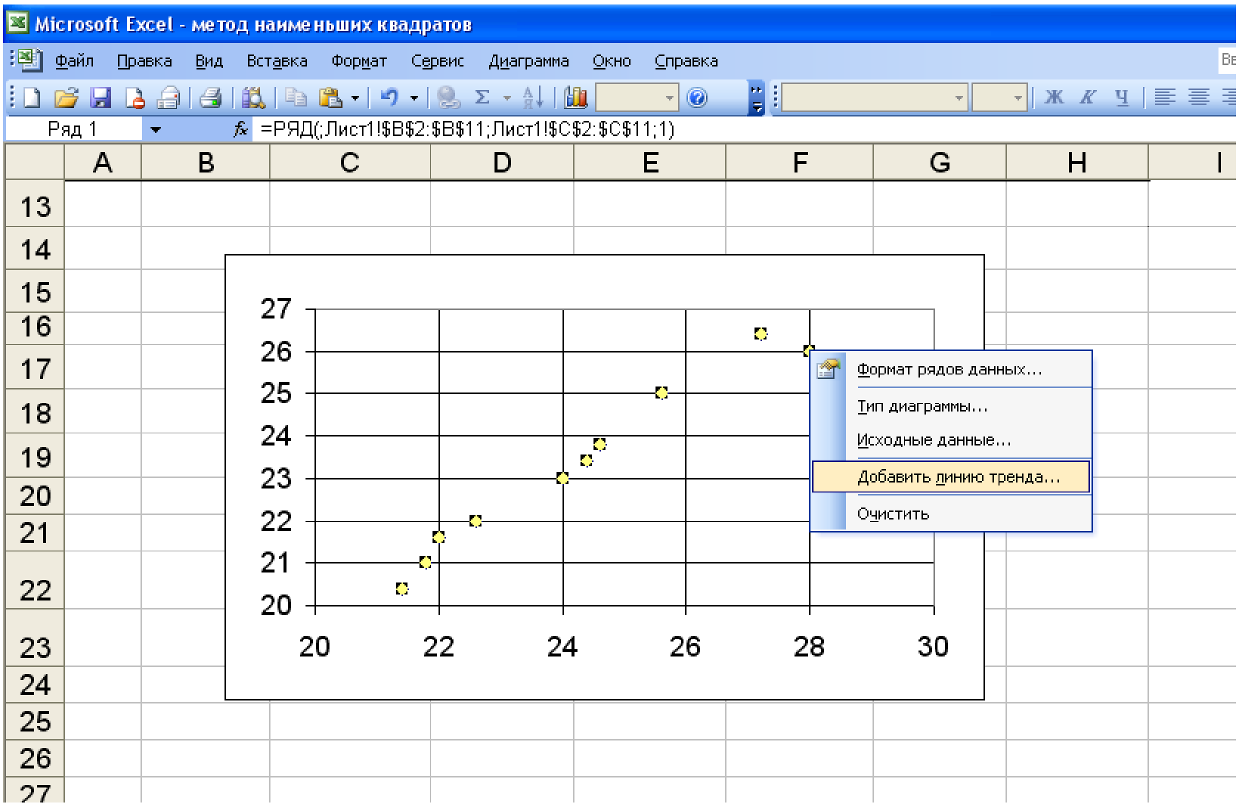
Вычислить сумму квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ (ячейка H12).

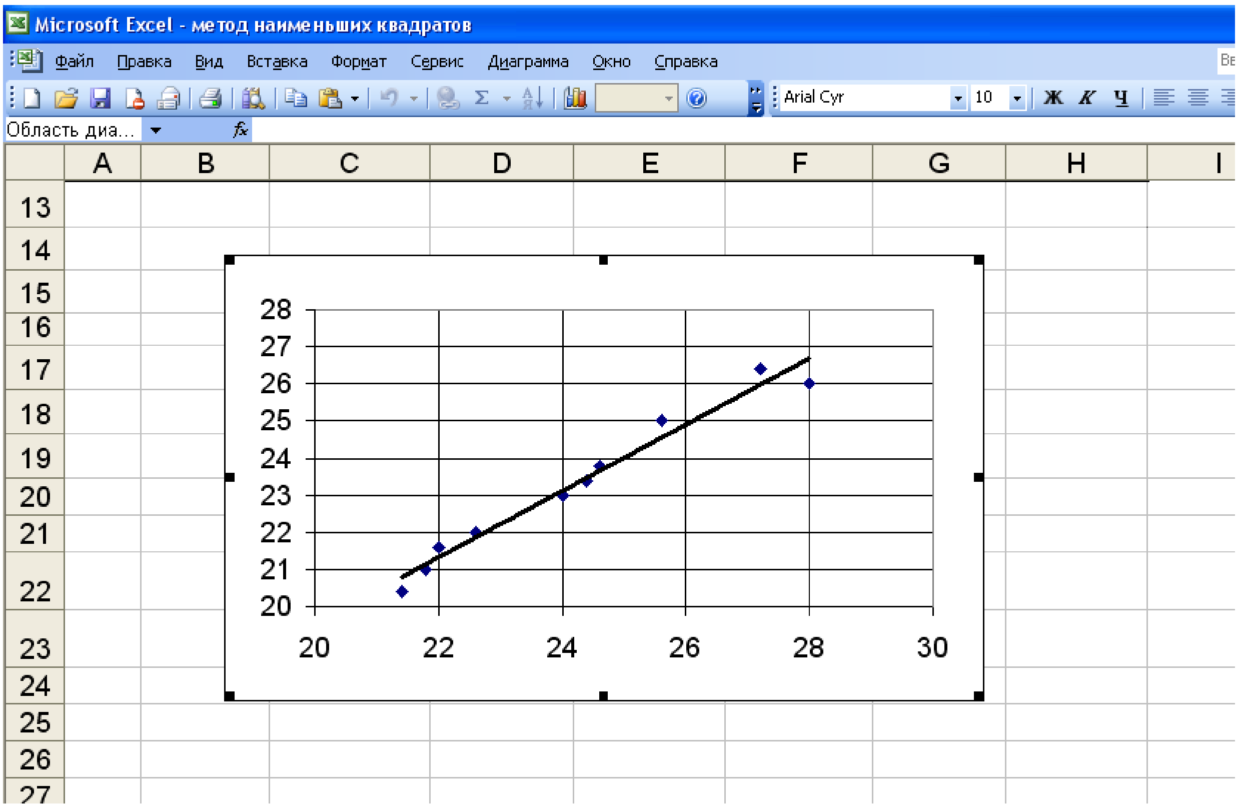
Microsoft Excel - метод наименьших квадратов

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y_{рас.i}$	δ_i	δ_i^2
2	*1*	21,4	20,4	457,96	436,56	20,794	-0,394	0,1549
3	*2*	21,8	21	475,24	457,8	21,151	-0,151	0,0228
4	*3*	22	21,6	484	475,2	21,33	0,27	0,073
5	*4*	22,6	22	510,76	497,2	21,866	0,134	0,018
6	*5*	24	23	576	552	23,117	-0,117	0,0137
7	*6*	24,4	23,4	595,36	570,96	23,474	-0,074	0,0055
8	*7*	24,6	23,8	605,16	585,48	23,653	0,147	0,0216
9	*8*	25,6	25	655,36	640	24,547	0,453	0,2054
10	*9*	27,2	26,4	739,84	718,08	25,977	0,423	0,1793
11	*10*	28	26	784	728	26,691	-0,691	0,4782
12	$\sum$	241,6	232,6	5883,7	5661,3			1,1723
13								

$$S=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=1{,}1723.$$

8) Изобразить прямую регрессии на построенном графике. Для этого в меню, вызванном правой клавишей (при подведении курсора к экспериментальным точкам), выбрать *Добавить линию тренда*, тип линии тренда – *линейная*.





9) Построить график функции $y = k\,x + b$.

Это можно сделать на отдельном графике. Для чего в меню *Вставка* выбрать *Диаграмма*, указать тип диаграммы *График*. Далее выбрать *Диапазон*: столбцы *B* и *F* (в строках – данные столбца *B*, в столбцах – данные столбца *F*). Сравнить полученный график с линией тренда на первом графике.

График функции $y = k\,x + b$ можно построить и на первом графике. Для этого в меню, вызванном правой клавишей, выбрать *Исходные данные,* в появившемся окне *Ряд*, *Добавить*. Значения *X* – данные столбца *B*, значения *У* – данные столбца *F*) Тип диаграммы *График*.

10) По полученному уравнению спрогнозировать значение *y* по известному значению *x*. В рассматриваемом случае при доходе *x*=30 тыс. руб. потребление $y = 0{,}89 \cdot 30 + 1{,}67 = 28{,}45$ (тыс. руб.

Замечание

Найти коэффициенты *k* и *b* можно, используя функцию ЛИНЕЙН. При этом результат может незначительно отличаться от результата, полученного по формулам выше.

Порядок вычислений в этом случае следующий:

1. На листе с исходными данными выделить область пустых ячеек 1х2 (1 строка, 2 столбца) для получения оценок коэффициентов регрессии.

2. Активизировать *Мастер функций*, для чего в меню *Вставка* выбрать *Функция*. Затем в категории *Статистические* выбрать функция *ЛИНЕЙН*. Здесь *Известные значения y* – столбец *C*, *Известные значения x – B*, *Конст* и *Статистика* можно не указывать.

3. В левой верхней ячейке выделенной области появится значение коэффициента *k*. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажать на клавишу F2, а затем на комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

Коэффициенты *k* и *b* можно также получить, используя функцию *ИНДЕКС*. При этом *k* = *ИНДЕКС*(*ЛИНЕЙН*…; 1),
b = *ИНДЕКС*(*ЛИНЕЙН*…; 2).

3.2 Образец выполнения задания 2 в MSExcel

В таблице приведены данные о результатах деятельности некоторой торговой сети: выручке – y, (млн. руб.) и количестве покупателей – x, (млн. чел.) за некоторый период.

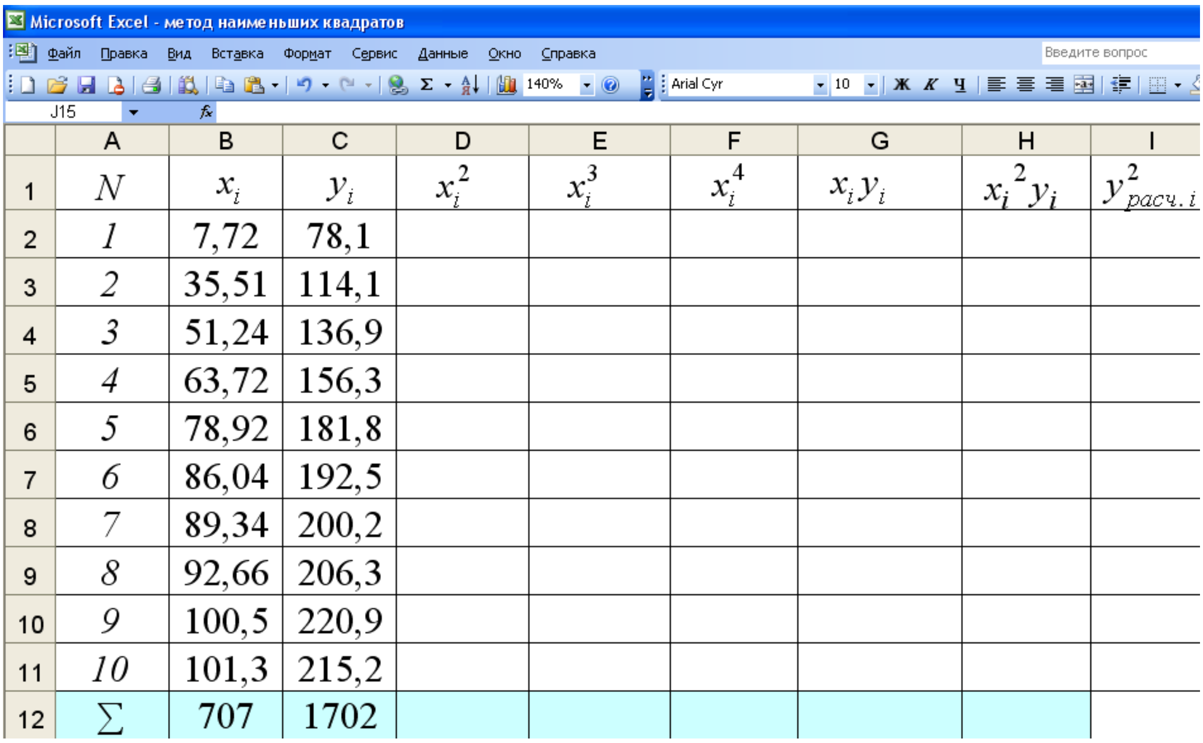
x_i·10	7,72	35,51	51,24	63,72	78,92	86,04	89,34	92,66	100,5	101,3
y_i·10	78,1	114,1	136,9	156,3	181,8	192,5	200,2	206,3	220,9	215,2

В предположении, что между x и y существует квадратичная зависимость, определить параметры регрессии $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ методом наименьших квадратов.

<u>Ход работы</u>

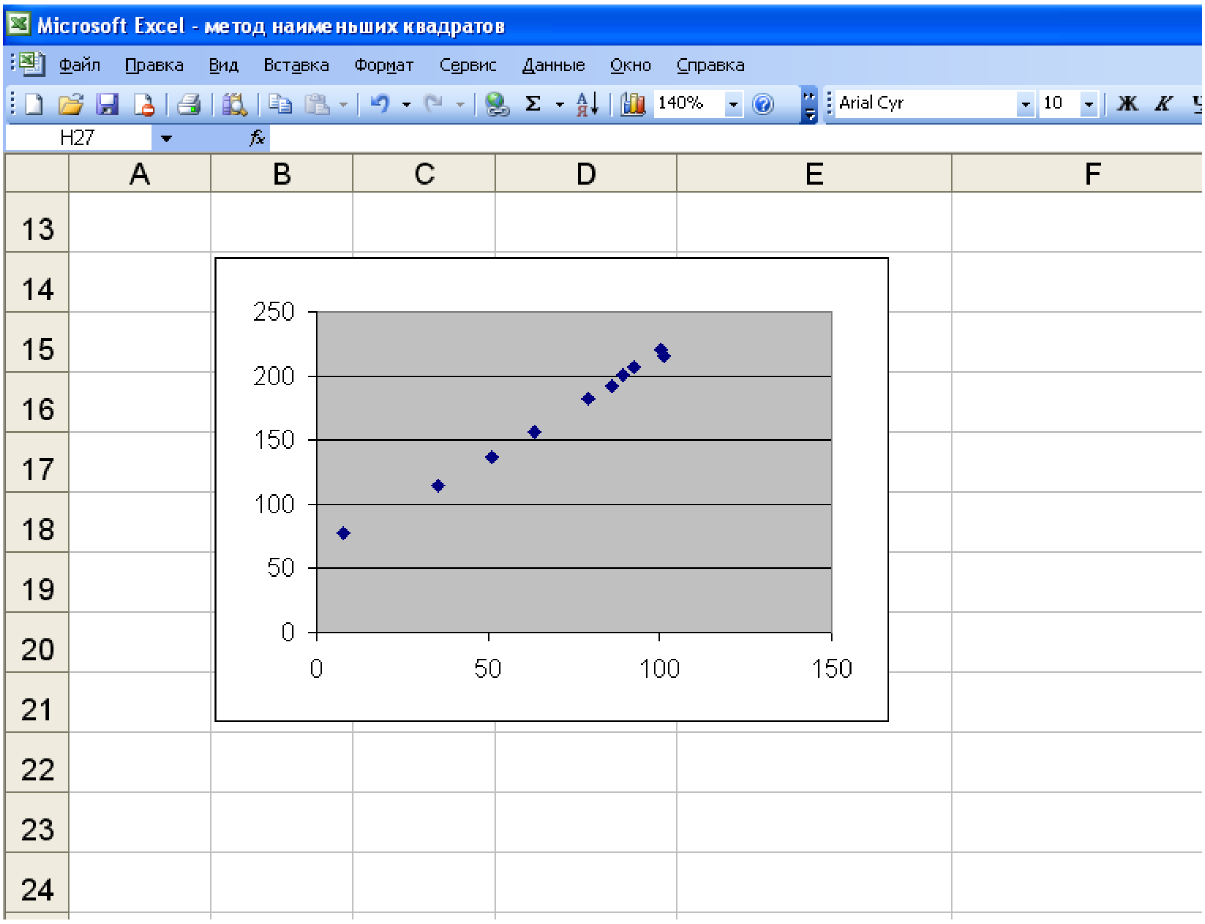
Выполнение задания 2 аналогично выполнению заданию 1.

1) Ввести исходные данные.

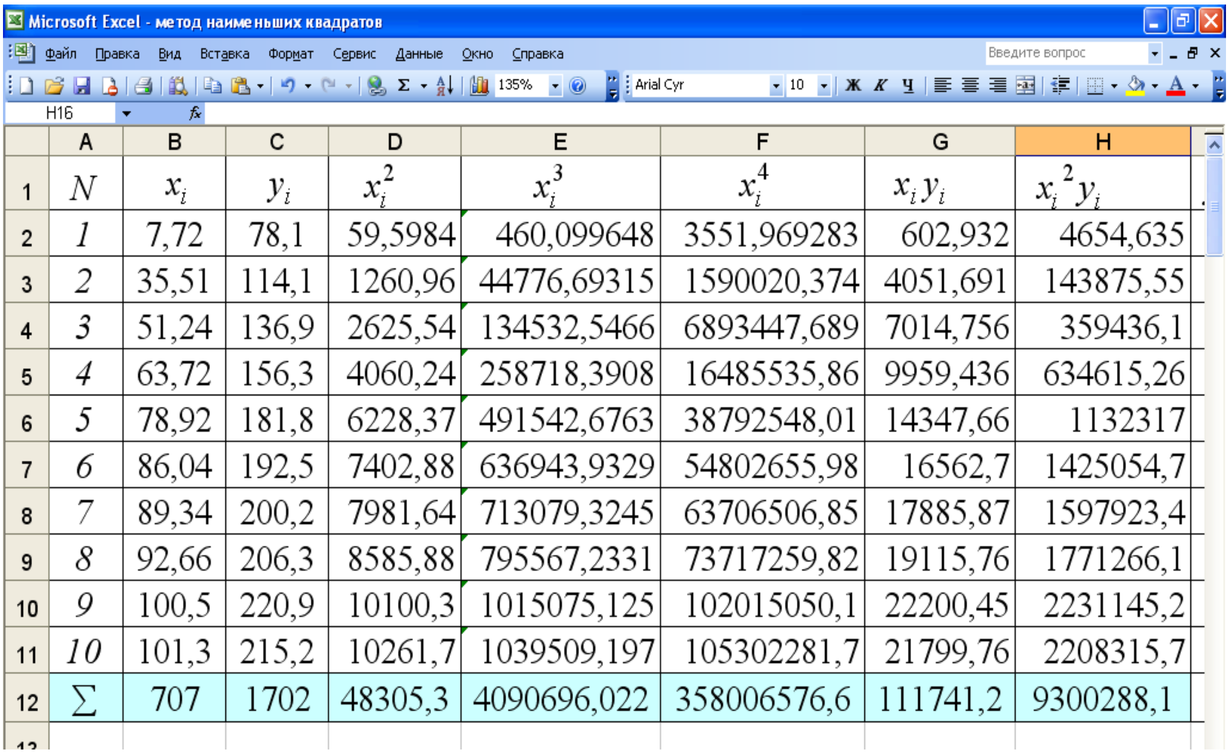


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	N	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$y^2_{расч.i}$
2	1	7,72	78,1						
3	2	35,51	114,1						
4	3	51,24	136,9						
5	4	63,72	156,3						
6	5	78,92	181,8						
7	6	86,04	192,5						
8	7	89,34	200,2						
9	8	92,66	206,3						
10	9	100,5	220,9						
11	10	101,3	215,2						
12	$\sum$	707	1702						

2) Построить график исходных данных. По графику убедиться в возможной квадратичной зависимости между x и y.



3) Произвести необходимые вычисления



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
2	1	7,72	78,1	59,5984	460,099648	3551,969283	602,932	4654,635
3	2	35,51	114,1	1260,96	44776,69315	1590020,374	4051,691	143875,55
4	3	51,24	136,9	2625,54	134532,5466	6893447,689	7014,756	359436,1
5	4	63,72	156,3	4060,24	258718,3908	16485535,86	9959,436	634615,26
6	5	78,92	181,8	6228,37	491542,6763	38792548,01	14347,66	1132317
7	6	86,04	192,5	7402,88	636943,9329	54802655,98	16562,7	1425054,7
8	7	89,34	200,2	7981,64	713079,3245	63706506,85	17885,87	1597923,4
9	8	92,66	206,3	8585,88	795567,2331	73717259,82	19115,76	1771266,1
10	9	100,5	220,9	10100,3	1015075,125	102015050,1	22200,45	2231145,2
11	10	101,3	215,2	10261,7	1039509,197	105302281,7	21799,76	2208315,7
12	$\sum$	707	1702	48305,3	4090696,022	358006576,6	111741,2	9300288,1

4) Составить и записать систему уравнений для нахождения коэффициентов a_2, a_1, a_0.

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

В данном случае в результате имеем систему:

$$\begin{cases} 10 a_0 + a_1 \cdot 707 + a_2 \cdot 48305{,}3 = 1702, \\ a_0 \cdot 707 + a_1 48305{,}3 + a_2 \cdot 4090696 = 111741{,}2, \\ a_0 \cdot 48305{,}3 + a_1 \cdot 4090696 + a_2 \cdot 358006577 = 9300288. \end{cases}$$

5) Найти неизвестные коэффициенты a_2, a_1, a_0.

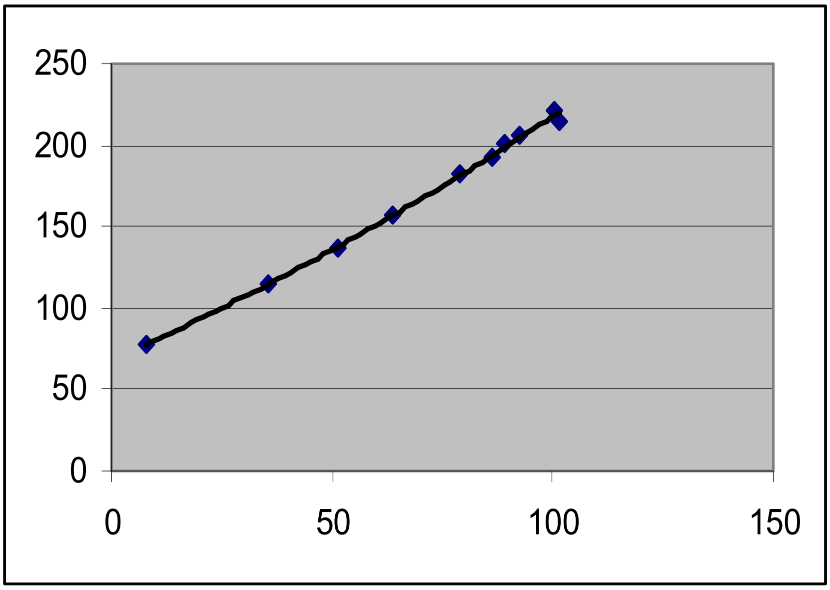
Здесь $a_0 \approx 8{,}036$, $a_1 \approx 2{,}703$, $a_2 \approx 0{,}001$.

6) Составить и записать уравнение $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

В рассматриваемом случае получаем уравнение:

$$y = 0{,}001 x^2 + 2{,}703\, x + 8{,}036\,.$$

7) Изобразить линию регрессию на построенном графике. Для этого *Добавить линию тренда*, тип линии тренда – *полиномиальная степени 2*.



8) Построить график найденной линии $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Сравнить полученный график с линией тренда на первом графике.

Замечание

Найти коэффициенты a_2, a_1, a_0. можно, используя функцию ЛИНЕЙН. Порядок вычислений в этом случае следующий:

1. На листе с исходными данными выделить область пустых ячеек 1x3 (1 строка, 3 столбца) для получения оценок коэффициентов регрессии.

2. В меню *Вставка* выбрать *Функция*. Затем в категории *Статистические* выбрать функция *ЛИНЕЙН*. Здесь *Известные значения y* – столбец y_i, *Известные значения x* – столбцы x_i и x_i^2. Поэтому при решении задачи в этом случае следует занести в таблицу столбец x_i^2, причем лучше это сделать сразу после внесения данных в столбец x_i, а затем уже столбец y_i. *Конст* и *Статистика* можно не указывать.

3. В левой верхней ячейке выделенной области появится значение коэффициента a_2. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажать на клавишу F2, а затем на комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

Коэффициенты a_2, a_1, a_0. можно также получить, используя функцию *ИНДЕКС*. При этом a_2=*ИНДЕКС*(*ЛИНЕЙН*…; 1), a_1=*ИНДЕКС*(*ЛИНЕЙН*…; 2), a_0= *ИНДЕКС*(*ЛИНЕЙН*…; 3).

3.3 Образец выполнения задания 1 в MathCAD

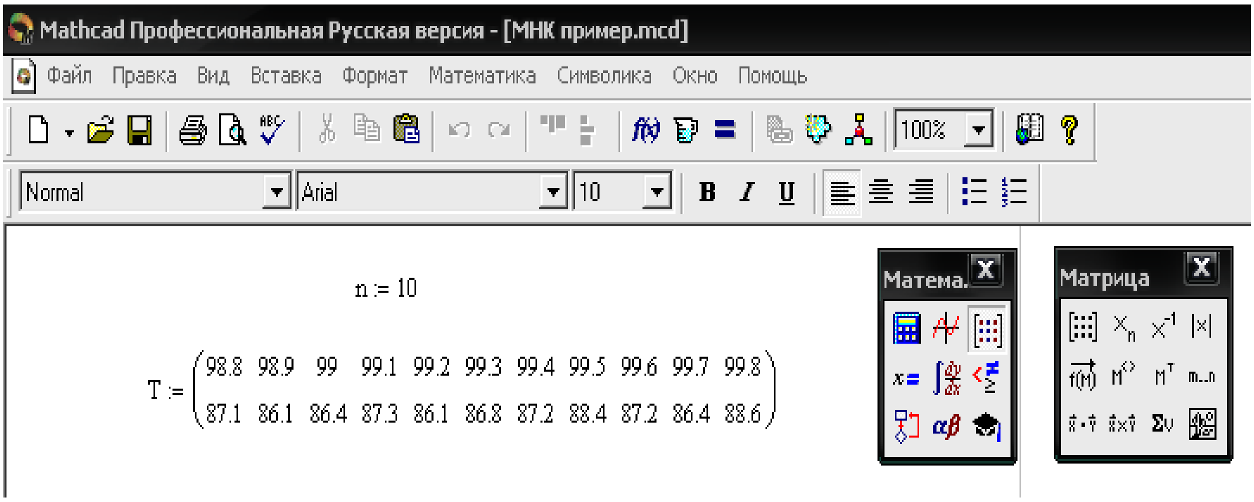
Для изучения зависимости октанового числа бензина (y_i) от чистоты катализатора (x_i, %) провели 11 измерений, результаты которых даны ниже в таблице:

x_i	98,7	98,9	99,0	99,1	99,2	99,3	99,4	99,5	99,6	99,7	99,8
y_i	87,1	86,1	86,4	87,3	86,1	86,8	87,2	88,4	87,2	86,4	88,6

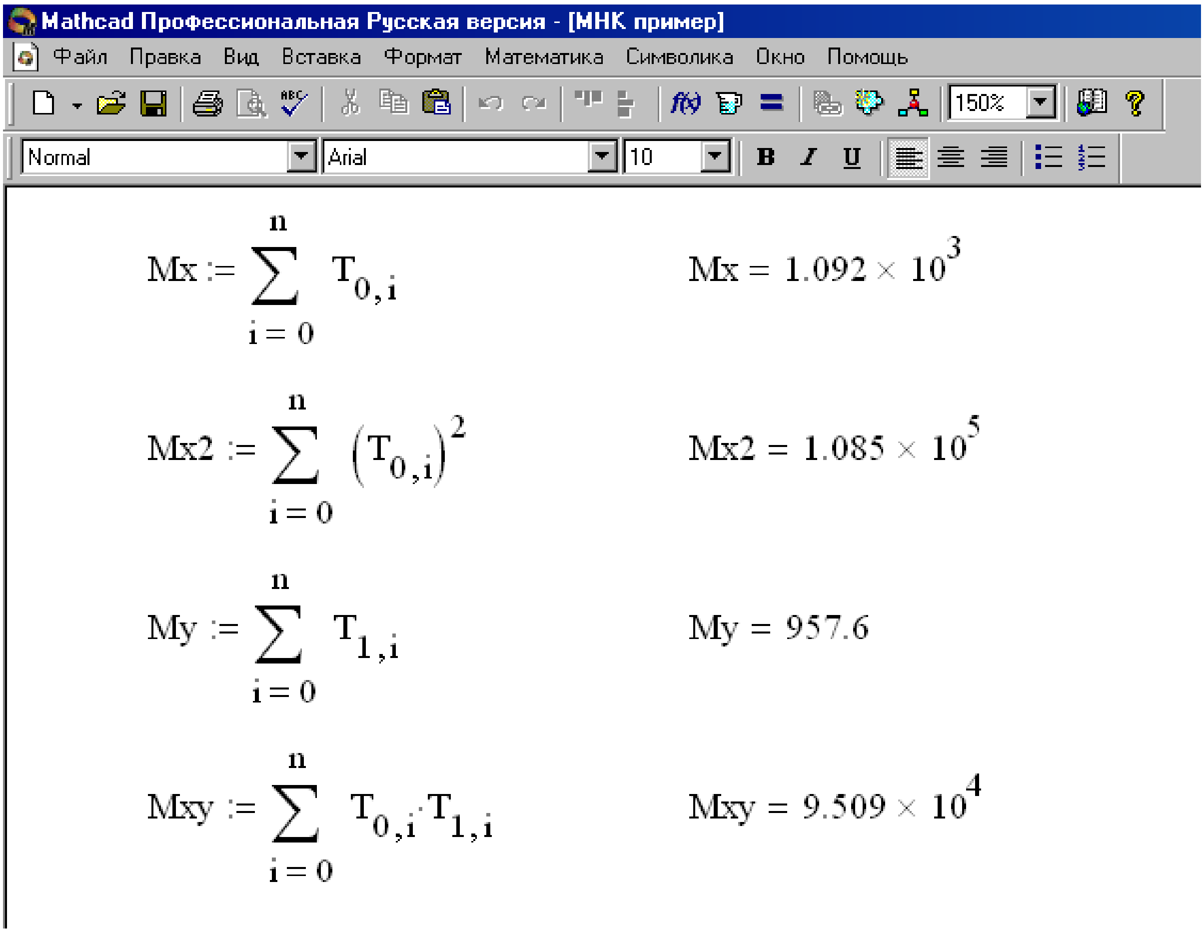
а) Найти коэффициенты k, b линейной зависимости $y = k\,x + b$ октанового числа от чистоты катализатора.
б) Вычислить значение октанового числа для чистоты катализатора 97%.

Ход работы

1) Введем значение n=10 (индексы переменных x_i, y_i меняются от 0 до 10). Далее, создадим матрицу T размерностью 2x11, введя в нее данные измерений из таблицы. Для этого на панели *Матрица* выбрать *Создать матрицу или вектор*, указать количество строк 2, количество столбцов 11.



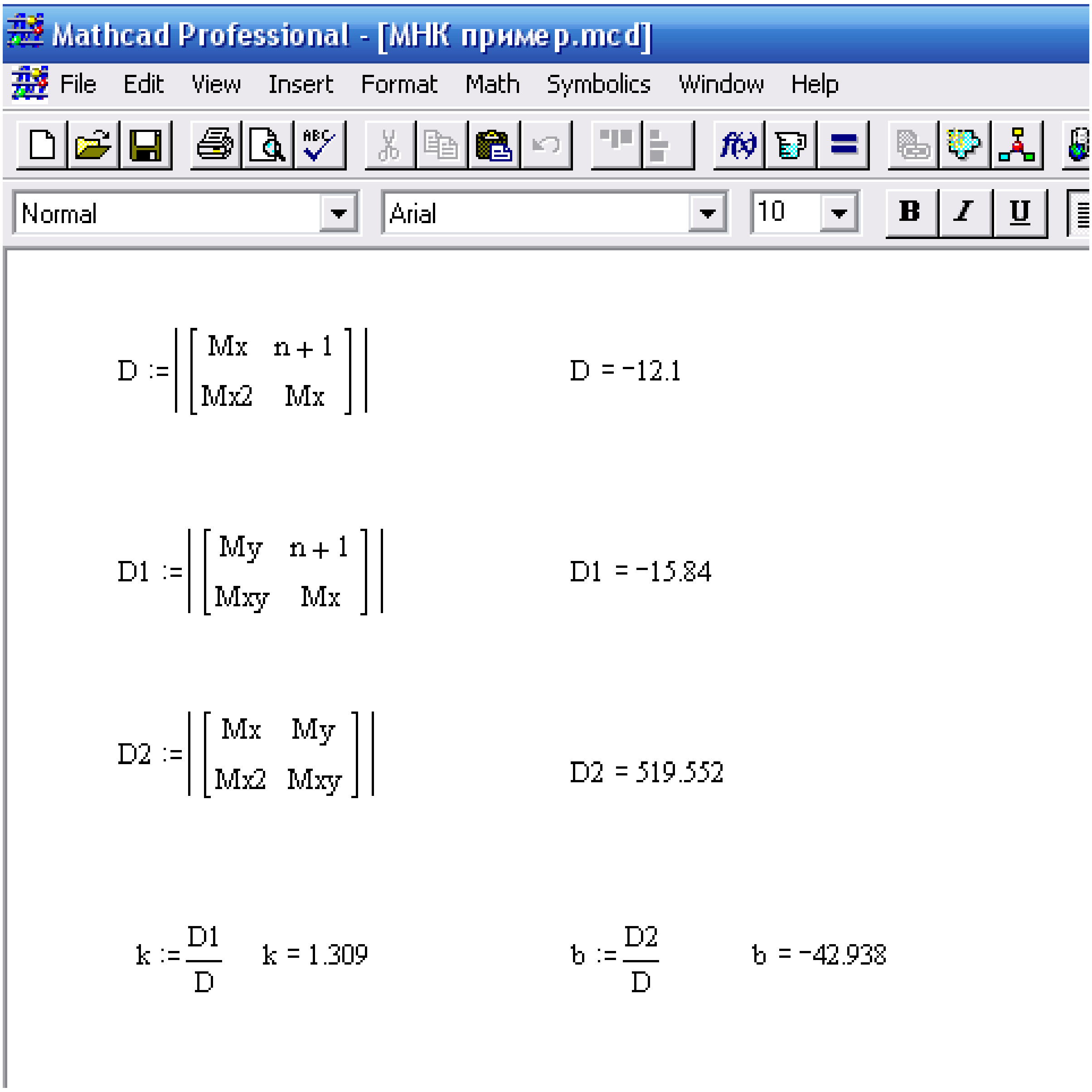
2) Вычислим суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i = M_x$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = M_y$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M_{x2}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = M_{xy}$, выбрав на панели *Мат.анализ* кнопку *Суммирование*.



3) Далее введем D:=, на панели *Матрицы* выберем кнопку *Вычисление определителя*, а затем *Создать матрицу или вектор*, указав количество строк =2, количество столбцов =2.

В первой строке в появившихся квадратах поочередно введем M_x и n+1. В квадратах второй строки введем M_{x2} и M_x. Рядом ввести D=. Аналогично вычисляем D1, D2. Получим следующие результаты.

4) Для окончательного вычисления коэффициентов линейной зависимости введем формулу k:=D1, знак деления, D. Рядом ввести k=. Ниже ввести b:= D2, знак деления, D. Рядом ввести b=. В итоге получаем следующее:



Искомое уравнение прямой имеет вид

$$y = 1{,}309x - 42{,}938.$$

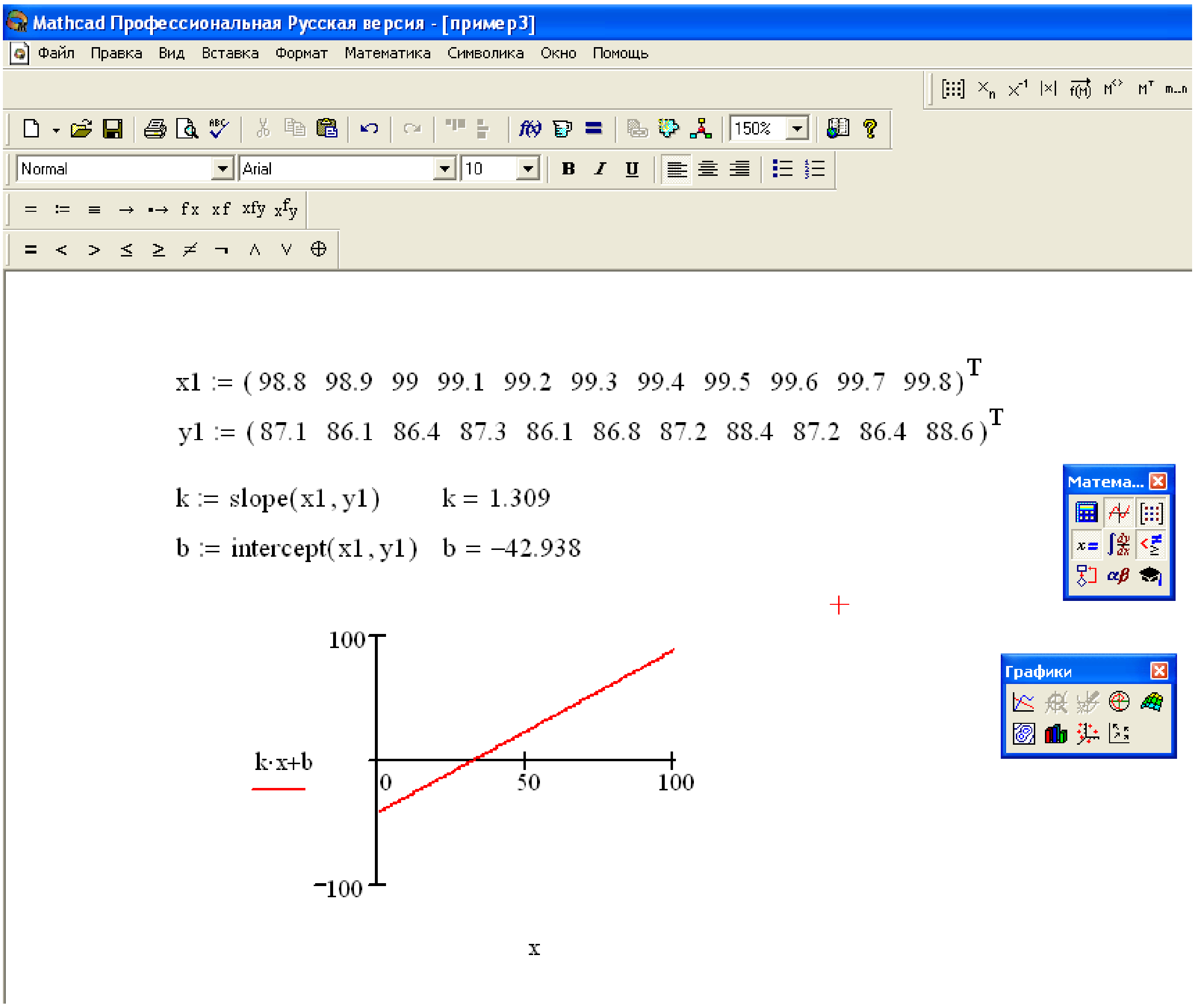
Для ответа на вопрос пункта б) достаточно подставить в найденную зависимость x=97, получим y=84,035.

Для прогнозирования по полученной зависимости каких-либо результатов следует брать значения x не сильно различающимися с данными, по которым построили уравнение регрессии.

Замечание

Программа MATHCAD располагает функциями, позволяющими найти коэффициенты k, b без решения нормальной системы.

Функция *intercept (x,y)* возвращает значение смещения b в уравнении $f(x)=kx+b$, $slope(x,y)$ возвращает значение углового коэффициента k. Ниже представлено решение сформулированной задачи с помощью функций *intercept (x,y)*, $slope(x,y)$.



Определим линейную регрессию как функцию $f(x)$.
В нашем случае функция примет вид $f(x)=1{,}309x-42{,}938$.

3.4 Образец выполнения задания 2 в MathCAD

Определить зависимость частоты заболеваемости жителей города бронхиальной астмой от качества воздуха. Очевидно, чем хуже воздух, например, выше концентрация С угарного газа в атмосфере, тем больше хронических больных P на 1000 жителей. Статистические данные являются усредненными и приближенными.

C мг/куб.м	2	2,5	2,9	3,2	3,6	3,9	4,2	4,6	5,0
P бол./тыс.	19	20	32	34	51	55	90	108	171

Предполагая, что зависимость между приведенными данными близка к квадратичной, выполним приближение табличной функции полиномом второй степени $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$.

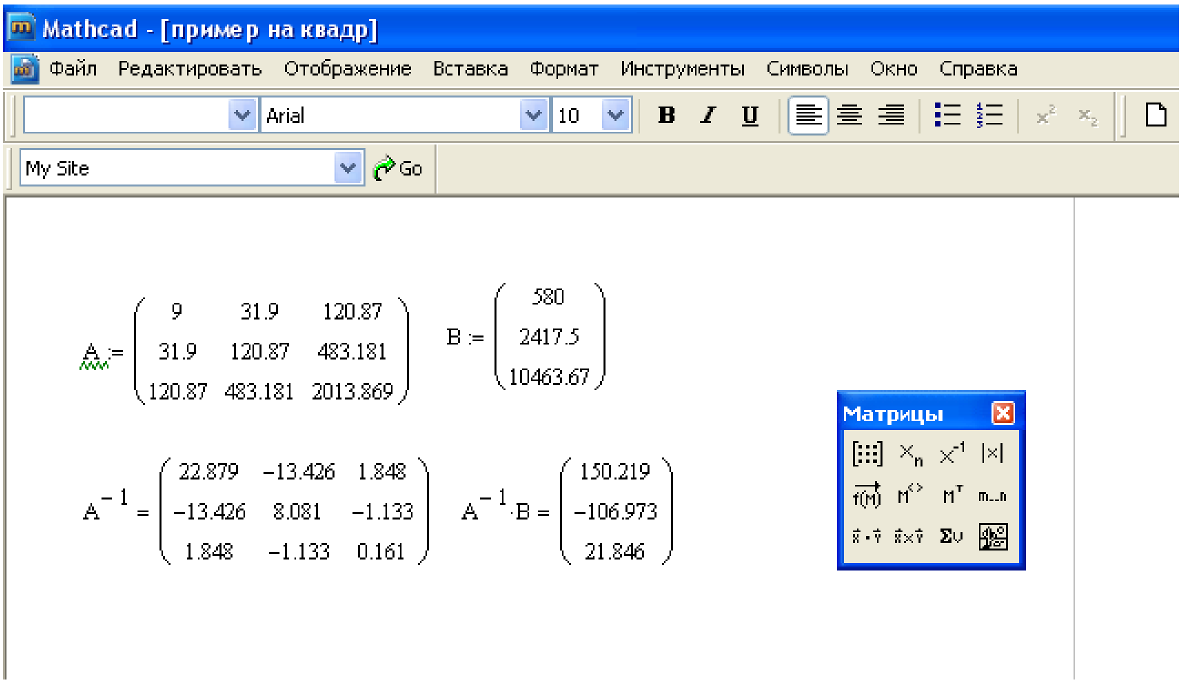
Можно решить задачу, составив нормальную систему

$$\begin{cases} n\,a_0 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Вычисление сумм производится аналогично ранее разобранному образцу. В нашем случае система имеет вид

$$\begin{cases} 9a_0 + a_1\,31{,}9 + a_2\,120{,}87 = 580, \\ a_0\,31{,}9 + a_1 120{,}87 + a_2\,483{,}181 = 2417{,}5, \\ a_0\,120{,}87 + a_1 483{,}181 + a_2\,2013{,}869 = 10463{,}67 \end{cases}$$

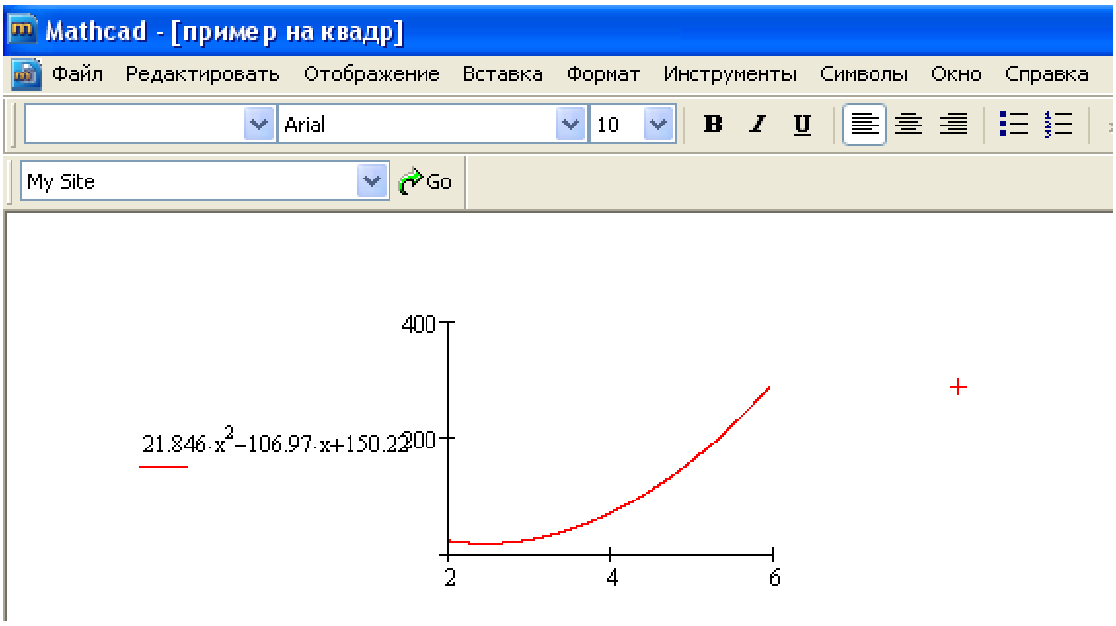
Решение системы выполним, используя формулы Крамера или с помощью обратной матрицы.



$$A := \begin{pmatrix} 9 & 31.9 & 120.87 \\ 31.9 & 120.87 & 483.181 \\ 120.87 & 483.181 & 2013.869 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 580 \\ 2417.5 \\ 10463.67 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 22.879 & -13.426 & 1.848 \\ -13.426 & 8.081 & -1.133 \\ 1.848 & -1.133 & 0.161 \end{pmatrix} \quad A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 150.219 \\ -106.973 \\ 21.846 \end{pmatrix}$$

Получив значения коэффициентов, записываем уравнение функции и строим график.



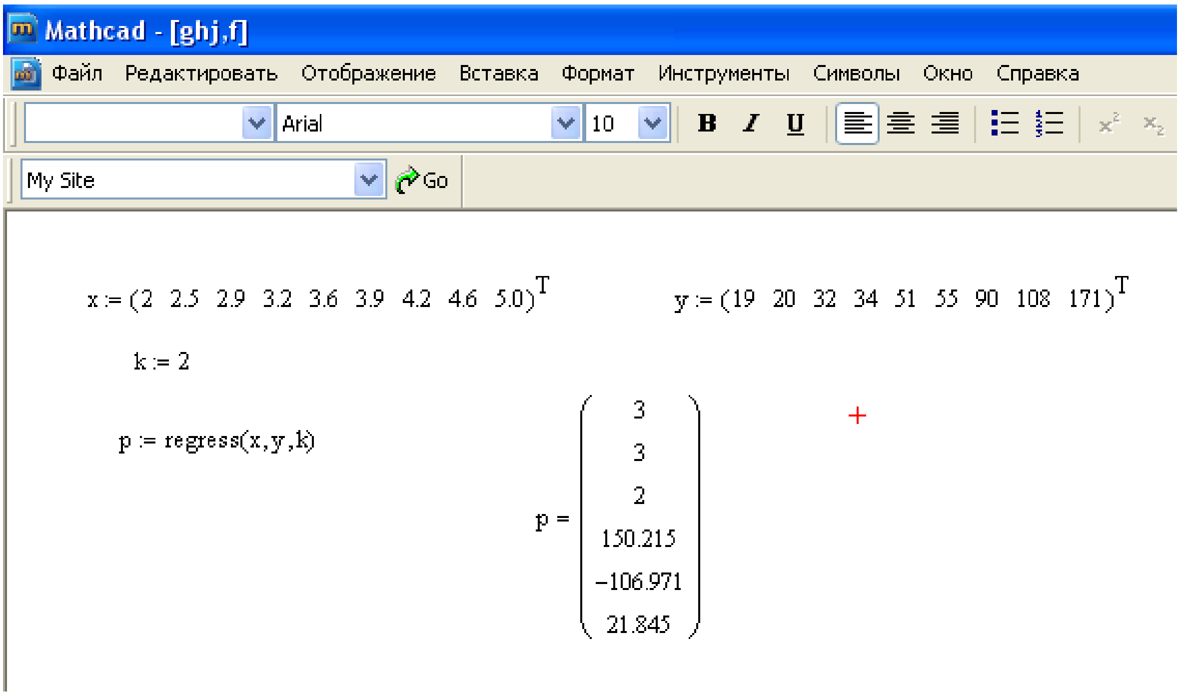
Замечание

Программа MATHCAD располагает функциями, позволяющими найти коэффициенты a_2, a_1, a_0 без решения нормальной системы.

Для этого используют функцию *regress* или *interp*.

p:=*regress*(x,y,k) – возвращает вектор коэффициентов полинома степени k;

r(t):=*interp*(p,x,y,t)- возвращает результат полиномиальной регрессии.



Контрольные вопросы

1. Понятие экспериментальной точки.
2. Что такое отклонения (невязки)?
3. Суть метода наименьших квадратов.
4. Необходимое условие экстремума функции многих переменных.
5. Достаточное условие экстремума функции многих переменных.
6. Понятие нормальной системы МНК.
7. Вид нормальной системы для эмпирической формулы $y = k\,x + b$.
8. Вид нормальной системы для эмпирической формулы $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Библиографический список

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов – М.: Высш.шк., 2003. – 479 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов – М.: Высш. шк., 1989., Т-2.
3. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 655 с.
4. Измайлов Г.К., Шелест В.Д. Информатика. Пакет MathCAD: Лабораторный практикум. Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2000.
7. Математический анализ для экономистов. / Под ред. А.А. Гриба и А.Ф. Тарасюка. М.: ФИЛИН, 2000.