МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«3» 05 ____________ 2018 г.

Определенный интеграл

Методические указания и индивидуальные задания к М- 8

Курск 2018

УДК 510 (083)

Составители Л.И. Студеникина, Е.А. Панина

Рецензент
Кандидат физико-математичеких наук, доцент кафедры
высшей математики *В.И.Дмитриев*

Определенный интеграл: методические указания и индивидуальные задания к М-8 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И.Студеникина, Е.А.Панина. Курск, 2018. 33 с. табл. 8. Библиогр.: с. 33

Представлены индивидуальные задания, состоящие из теоретических упражнений и практических заданий к модулю для студентов экономических специальностей, обучающихся по системе интенсивной рейтинговой технологии модульного обучения. Работа содержит примеры выполнения наиболее сложных заданий.

Работа предназначена для студентов экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 23.04.2018. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 100 экз. Заказ 1972 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Важным фактором изучения вузовского математического курса является самостоятельная работа студентов. Одна из форм организации самостоятельной работы − система рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения.

Опыт показывает, что данная система активизирует самостоятельную работу студентов, способствует повышению общего уровня математической культуры. Предлагаемая методическая разработка является одним из блоков в модульно-рейтинговой системе дисциплины «Математика».

Студентам предлагается выполнить в соответствии со своим вариантом 10 задач. Задания №1-3,7 – первого уровня сложности, 4-6, 8 – второго уровня. В 9-ом задании выбрать N как номер группы в потоке. Ряд заданий способствует развитию навыков в применении методологии и методов количественного и качественного анализа с использованием экономико-математического аппарата. Перед решением индивидуальных заданий следует ответить на теоретические вопросы и выполнить упражнения.

В ходе подготовки к защите выполненной работы, следует обратиться к дополнительной литературе, которая приведена в библиографическом списке.

Желаем успеха!

1 Теоретические упражнения

Упражнение 1

Установить последовательность действий при вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ осью Ox и прямыми $x = a,\ x = b$.

1. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i.

2. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей системой точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

3. Вычислим произведение $f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

4. Найдем значение функции $f(\xi_i)$.

5. Вычислим предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} I_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

6. Составим интегральную сумму $I_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

7. Если существует конечный предел не зависящий от способа деления отрезка на части и выбора точки ξ_i, то его значение численно равно искомой площади криволинейной трапеции.

Упражнение 2

Достаточным условием интегрируемости функции является __________

1) неотрицательность
2) кусочная непрерывность
3) монотонность
4) ограниченность

Упражнение 3

Формула Ньютона-Лейбница имеет вид _____________

1) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ 2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + C$ 4) $\int_a^b f(x)dx = F(x) + C$

Упражнение 4

Некорректно записано свойство определенного интеграла №___

1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, A = const$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, для $ñ \in [a, b]$

5) Если $f(x) \le g(x)$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6) Если на [a, b] выполнено неравенство $m \le f(x) \le M$, где m - наименьшее значение, M – наибольшее значение функции $y = f(x)$ на [a, b], то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

7) Если f(x) непрерывна на [a, b], то существует $\xi \in [a, b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

8) Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования.

Упражнение 5

Продолжите формулировку теоремы.

Пусть u(x), v(x) – две непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [a, b], тогда справедлива формула интегрирования по частям: $\int_a^b u\,dv =$ ________

1) $uv\Big|_a^b + \int_a^b v\,du$ 2) $\int_a^b v\,du - uv\Big|_a^b$

3) $uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ 4) $uv - \int v\,du$

Упражнение 6

Выбрать правильное утверждение.

Пусть F(x) – первообразная для f(x) на некотором отрезке [a, b]. Пусть x=φ(t), дифференцируемая монотонная функция на [α; β], причем φ(α)=a, φ(β)=b, тогда $\int_a^b f(x)dx =$ ______

1) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 2) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \varphi'(t))dt$

3) $\int_\alpha^\beta f(t)\cdot\varphi(t)dt$ 4) $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt$

Упражнение 7

Вставьте пропущенные слова в определениях.

а) Функция f(x) определена на промежутке [a, +∞) и интегрируема на каждом конечном отрезке [a, b], где $a < b$.

Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ называется ________.

Если данный предел ________ и ________, то говорят, что _________ _________ сходится, в противном случае ________.

б) Пусть неограниченная функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема на любом отрезке [a, c], где $a < c < b$. Выражение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется ________ ________ функции f(x) на промежутке [a, b). Если данный предел существует и конечен, то говорят, что ________ интеграл ________ и равен $\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$; в противном случае он ________.

Упражнение 8

Установить соответствие.

1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически. 2. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в декартовых координатах. 3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. 4. Длина дуги кривой в декартовых координатах. 5. Длина дуги кривой заданной параметрически. 6. Длина дуги кривой в полярных координатах.	а) $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$ б) $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ в) $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$ г) $\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$ д) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ е) $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ ж) $\pi\int_a^b y(x)dx$

2. Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.1

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_1^2\left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int_1^3\left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int_1^4\left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int_1^2\left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int_0^1\left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int_2^4\left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int_2^5\left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int_0^1\left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int_1^2\frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int_1^2\left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int_{-2}^{-1}\left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int_1^2\left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int_1^2\left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int_1^3\frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int_0^1\left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17	$\int_2^3\left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2\left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$

1	2	3	4
19	$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$	20	$\int_1^9 \left(\frac{x^{3/2} + x + 5}{x} + \cos 2x\right)dx$
21	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1 + x^2}\,dx$	22	$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$
23	$\int_1^2 e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$	24	$\int_0^2 \frac{2^x + 5^x}{10^x}dx$
25	$\int_2^4 e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$	26	$\int_1^3 4x\left(3 + \frac{1}{2x^2}\right)dx$
27	$\int_0^2 \left(2^x e^x + \frac{1}{1+x^2} + x^3\right)dx$	28	$\int_2^3 \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}dx$
29	$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - x + 5}{x}dx$	30	$\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^3}{x}dx$
31	$\int_0^2 \left(\frac{1}{5+4x} + \sin(1+2x)\right)dx$	32	$\int_1^4 \left(e^{2x-1} + \frac{1}{4x-2}\right)dx$
33	$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1+x} + \frac{6}{1+3x}\right)dx$	34	$\int_0^1 \left(\frac{1}{(2+x)^3} + \cos 2x\right)dx$
35	$\int_1^2 \left(e^{3x-5} + \frac{x^4 + 2x^3 + x + 6}{x}\right)dx$	36	$\int_0^1 \left(5^{1-2x} - \sin(1-4x)\right)dx$

Задание 2. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.2

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{6x+1}}$	2	$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{5x+1}}$
3	$\int\limits_2^3 \frac{xdx}{1-\sqrt{4x+1}}$	4	$\int\limits_1^2 \frac{dx}{5+\sqrt{3x-1}}$
5	$\int\limits_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$	6	$\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int\limits_6^7 \frac{2x^2dx}{\sqrt{x-5}}$	8	$\int\limits_{-1}^1 \frac{3xdx}{\sqrt{x+4}}$
9	$\int\limits_2^3 \frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+7x}-6}$
11	$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+4}dx$	12	$\int\limits_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{6x+1}}$
13	$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{3x+1}}$	14	$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{7x+1}}$
15	$\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	16	$\int\limits_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$
17	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{8x+1}}$	18	$\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	20	$\int\limits_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$

1	2	3	4
21	$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$	22	$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$
23	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	24	$\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$
25	$\int_0^1 \frac{dx}{3+\sqrt{9x+1}}$	26	$\int_0^2 \frac{dx}{4+\sqrt{6x+2}}$
27	$\int_2^3 \frac{dx}{x+3\sqrt{x-1}}$	28	$\int_0^1 \frac{dx}{6+\sqrt{7x+1}}$
29	$\int_0^2 \frac{dx}{10+\sqrt{12x+1}}$	30	$\int_2^{10} \frac{dx}{x+6\sqrt{x-1}}$
31	$\int_1^4 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$	32	$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}+3}$
33	$\int_1^3 \frac{dx}{4+\sqrt{11x+5}}$	34	$\int_0^2 \frac{6dx}{12+\sqrt{3x+1}}$
35	$\int_2^5 \frac{dx}{x+4\sqrt{x-1}}$	36	$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{5x+1}}$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.3

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4}$	2	$\int_0^1 (3x+7)^{10}dx$
3	$\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x}dx$	4	$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg}^8 x}{\cos^2 x}dx$	6	$\int_1^2 \frac{3x^2dx}{x^3+5}$
7	$\int_0^{1/2} \frac{\arccos^3 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8	$\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x}dx$
9	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$	10	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)}$
11	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^2 x+x}{1+x^2}dx$	12	$\int_1^3 \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
13	$\int_2^3 \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$	14	$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$
15	$\int_{2,5}^3 (2x-5)^{17}dx$	16	$\int_1^2 \frac{\operatorname{ctg}^{10}x}{\sin^2 x}dx$
17	$\int_1^2 x^2 5^{x^3-1}dx$	18	$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
19	$\int_0^{1/2} \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

1	2	3	4
21	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	22	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
23	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	24	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6}$
25	$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	26	$\int_0^1 (2x+3)\cos(x^2+3x+1)dx$
27	$\int_1^2 \frac{\ln^2 x+x^3}{x}dx$	28	$\int_{-1}^0 \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$
29	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$	30	$\int_{-1}^0 \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$
31	$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	32	$\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$
33	$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$	34	$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$
35	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	36	$\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12ctg3xdx$

Задание 4. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

Таблица 2.4

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x dx$	2	$\int_{-3}^{0}(x+3)\sin 4x dx$
3	$\int_{1}^{2} xe^{x}dx$	4	$\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3x dx$
5	$\int_{1}^{2}(4-3x)e^{-3x}dx$	6	$\int_{0}^{1}(4x+3)\cos 2x dx$
7	$\int_{1}^{2}\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$	8	$\int_{0}^{1}(3x+4)e^{3x}dx$
9	$\int_{1}^{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$	10	$\int_{1}^{3}\ln(2x+3)dx$
11	$\int_{0}^{\pi}(6x-10)\sin 2x dx$	12	$\int_{0}^{1}(x+1)\ln(x+1)dx$
13	$\int_{-1}^{0}\arcsin(x+1)dx$	14	$\int_{0}^{1}\ln(x^2+4)dx$
15	$\int_{0}^{2}(1-6x)\cos x dx$	16	$\int_{0}^{\frac{1}{9}}\arccos(9x-1)dx$
17	$\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\cos^2 x}$	18	$\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\sin^2 x}$
19	$\int_{2}^{4}x\sin^2 x dx$	20	$\int_{1}^{3}\operatorname{arcctg} 2x dx$

1	2	3	4
21	$\int\limits_{0}^{\pi/9} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$	22	$\int\limits_{1/2}^{1} \arcsin(1-x) dx$
23	$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$	24	$\int\limits_{-1}^{0} x \ln(1-x) dx$
25	$\int\limits_{1}^{2} \ln(4+5x) dx$	26	$\int\limits_{-1}^{0} (x+1) e^{-2x} dx$
27	$\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	28	$\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$
29	$\int\limits_{2}^{3} x \ln(x-1) dx$	30	$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$
31	$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$	32	$\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}} dx$
33	$\int\limits_{-2}^{-1} \ln(1-4x) dx$	34	$\int\limits_{0}^{1} (1-4x) \sin x dx$
35	$\int\limits_{0}^{\pi} (2x+6) \cos x dx$	36	$\int\limits_{3}^{4} (x-3) \sin 2x dx$

Задание 5 . Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Таблица 2.5

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+2}$	2	$\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$
3	$\int_{1}^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$
5	$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx$	6	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+6}$
7	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	8	$\int_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
9	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+10}$	10	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x-6}$
11	$\int_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	12	$\int_{4}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
13	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)}$	14	$\int_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$
15	$\int_{11/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-11x+2}$	16	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+2}$
17	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	18	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$
19	$\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$	20	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3x}$

1	2	3	4
21	$\int\limits_{1/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x-3-4x^2}$	22	$\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-8x-3}$
23	$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{8-2x-x^2}$	24	$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{5x-x^2-6}$
25	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+25}$	26	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-8x+30}$
27	$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-9x+6}$	28	$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-3x-2}$
29	$\int\limits_{1.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-6x+1}$	30	$\int\limits_{3/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-3x+2}$
31	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-3x+1}$	32	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2-10x+25}$
33	$\int\limits_{-3/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3x+6}$	34	$\int\limits_{-5/6}^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+5x+1}$
35	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+3}$	36	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-2x+7}$

Задание 6. Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся

Таблица 2.6

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
9	$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$
13	$\int_0^{1/3} \frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int_{-1/5}^0 \frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int_2^4 \frac{2dx}{(2-x)^2}$

1	2	3	4
19	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int_{3/2}^4 \frac{dx}{(2x-3)^2}$
21	$\int_{1/3}^1 \frac{dx}{(1-3x)^2}$	22	$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$
23	$\int_{-6}^0 \frac{dx}{(x+6)^2}$	24	$\int_{1/4}^1 \frac{dx}{(1-4x)^3}$
25	$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	26	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
27	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	28	$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^3}$
29	$\int_0^4 \frac{dx}{(x-4)^5}$	30	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
31	$\int_1^6 \frac{dx}{(x-6)^{1/4}}$	32	$\int_0^3 \frac{5dx}{\sqrt{3-x}}$
33	$\int_0^7 \frac{dx}{(x-7)^{1/5}}$	34	$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^2}$
35	$\int_{1/3}^1 \frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$	36	$\int_{-3/5}^0 \frac{dx}{(5x+3)^2}$

Задание 7. Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь

Таблица 2.7

№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$	№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$
1	2	3	4
1	$y=x^2-4x+3$ $y=x+3$	2	$y=x^2-8x+7$ $y=-5x+5$
3	$y=x^2+4x$ $y=x+4$	4	$y=9x^2+6x+1$ $y=-x+1$
5	$y=(x-2)^2$ $y=4x-8$	6	$y=-(x+3)(x-2)$ $y=x-2$
7	$y=3x-x^2$ $y=-x$	8	$y=2x^2-4x+1$ $y=2x-3$
9	$y=-x^2-8x+1$ $y=-x-2$	10	$y=x^2-2x$ $y=\frac{1}{2}x+5$
11	$y=(x+1)(x-4)$ $y=5x-4$	12	$y=x^2+6x+1$ $y=2x+1$
13	$y=2x^2+8x+1$ $y=6x+1$	14	$y=(x-1)^2$ $y=x+1$
15	$y=-x^2+x+5$ $y=-2x+7$	16	$y=x^2+3x+1$ $y=4x+1$
17	$y=-2x^2+5x-3$ $y=-3x-3$	18	$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ $y=4x+1$
19	$y=(x+5)(x-1)$ $y=3.5x-3.5$	20	$y=x^2+x+6$ $y=4x+6$
21	$y=-x^2+2x-1$ $y=-2x+2$	22	$y=2x^2-x+5$ $y=-5x+11$

1	2	3	4
23	$y = 3x^2 + x - 4$ $y = 10x - 10$	24	$y = 0.5x^2 - x + 2$ $y = 2x + 2$
25	$y = x^2 + 8x - 3$ $y = 11x - 5$	26	$y = x^2 + 4x - 1$ $y = 7x - 3$
27	$y = -x^2 + 6x - 2$ $y = 3x$	28	$y = x^2 + 9x + 4$ $y = 12x + 2$
29	$y = -x^2 + x + 10$ $y = -2x + 12$	30	$y = x^2 + 6x + 1$ $y = 9x - 1$
31	$y = x^2 - 7x + 4$ $y = -4x + 2$	32	$y = x^2 + 5x - 1$ $y = 8x - 3$
33	$y = -x^2 + 3x - 2$ $y = 2x - 2$	34	$y = -x^2 + x + 1$ $y = -2x + 3$
35	$y = x^2 - x - 6$ $y = 2x - 8$	36	$y = x^2 + 2x + 7$ $y = 5x + 5$

Задание 8. Вычислить длины дуг кривых

Таблица 2.8

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	2	3	4
1	$y = 2e^{\frac{x}{2}}$, $\ln 3 \le x \le \ln 8$	2	$y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$
3	$\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6 \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ox,Oy	4	$2y - x^2 + 3 = 0$ Между точками пересечения с осями Ox
5	$y = e^x$, $0 \le x \le 1$	6	$y = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
7	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$	8	$y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $0 \le x \le 9$
9	$y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2$	10	$y = 4 - \frac{x^2}{2}$, $y \ge 0$
11	$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, $0 \le x \le 5$	12	$y = \int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
13	$y = \int\limits_0^x \sqrt{\sin 2t}\,dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$	14	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
15	$\begin{cases} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	16	$x = a\cos t$ $y = -2a\ln\sin t$, от т.А (0,0) до В (x_0, y)
17	$\rho = 7(1 - \sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	18	$\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
19	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\pi \le t \le 2\pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$

1	2	3	4
21	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$	22	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
23	$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	24	$\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
25	$\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	26	$\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
27	$\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$	28	$\rho = 1 - \sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$
29	$\rho = 3(1 + \sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$	30	$\rho = 5(1 - \cos\varphi), -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$
31	$\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	32	$\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$
33	$\rho = 4(1 - \sin\varphi), 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	34	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$
35	$\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$	36	$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

Задание 9.

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + nx - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции **x** меняется от **0** до **N** единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.
N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Задание 10.

Для **n**=1 до 15
Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \frac{k}{at + b} + c$.

Таблица.2.9

№	k	a	b	c
1	k=1	a=3	b=2	c=2
2	k=1	a=4	b=2	c=3
3	k=2	a=3	b=3	c=4
4	k=2	a=4	b=3	c=5
5	k=3	a=5	b=2	c=3
6	k=3	a=1	b=2	c=6
7	k=4	a=2	b=1	c=3
8	k=4	a=3	b=1	c=4
9	k=4	a=4	b=1	c=5
10	k=5	a=2	b=2	c=1
11	k=5	a=3	b=4	c=2
12	k=6	a=1	b=2	c=3
13	k=6	a=2	b=4	c=5
14	k=7	a=3	b=2	c=1
15	k=7	a=3	b=4	c=3

Для **n**= 16 до 35
Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается

функцией $z = a - b^{-\alpha t + \beta}$, где t − время в единицах. Найти объём продукции, произведённой за первый месяц, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Таблица 2.10

№	a	b	α	β
16	a=27	b=2	α = 0,3	β =4
17	a=35	b=3	α = 0,1	β=3
18	a=31	b=2	α = 0,4	β=3
19	a=29	b=4	α = 0,2	β=2
20	a=19	b=2	α = 0,1	β=4
21	a=31	b=5	α = 0,6	β=2
22	a=18	b=2	α = 0,4	β=4
23	a=30	b=2	α = 0,4	β=4
24	a=32	b=3	α = 0,1	β=3
25	a=25	b=5	α = 0,5	β=2
26	a=27	b=3	α = 0,5	β=3
27	a=19	b=4	α =1	β=3
28	a=36	b=6	α = −0,5	β=2
29	a=49	b=7	α = −1	β=4
30	a=32	b=2	α = −0,5	β=4
31	a=31	b=2	α = −0,5	β=2
32	a=30	b=4	α = −0,5	β=2
33	a=41	b=9	α = −0,5	β=3
34	a=27	b=4	α = −0,5	β=4
35	a=30	b=9	α = −0,5	β=3

3. Образцы выполнения заданий

3.1. Пример 1

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1+x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$; при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

$$\int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int\limits_1^4 (2t^2-2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

3.2. Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Решение. Пусть $\ln x = t$, тогда $d\ln x = dt$, $\frac{1}{x}dx = dt$. При $x = 1$, $\ln 1 = t$, $t = 0$; при $x = e$, $\ln e = t$, $t = 1$. Получим $\int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$.

3.3. Пример 3

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{array} \right| = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x \cdot (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2\sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

3.4. Пример 4

Вычислить несобственные интегралы, если они сходится.

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$; в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(-3+x)^2}$.

Решение.

а)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2 + 2\cdot\frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14.5}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{d(x+3.5)}{(x+3.5)^2 + \frac{9}{4}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+3.5}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^a =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{3} \Bigg|_1^a = \frac{2}{3} \lim_{a\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{2a+7}{3} - \operatorname{arctg} 3 \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3 \right).$$

б)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-1/4}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{3/4}}{3/4}\right|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left. x^{3/4}\right|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}.$$

в)

$$\int_0^3 \frac{dx}{(-3+x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{(-3+x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}(-3+x)^{-2}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(-3+x)^{-1}}{-1}\right|_0^{3-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{x-3}\right|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{3-x}\right|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3-3+\varepsilon} - \frac{1}{3}\right) = +\infty, \text{ ò.å. íåñîáñòâåí íûé èíòåãðàë ðàñõîäèòñÿ}.$$

3.5. Пример 5

Вычислить длины дуг кривых.

а) $y = \dfrac{x^2}{2}$ îò $õ = 0$ äî $õ = 1$

Решение. Длина дуги кривой находится по формуле $L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.$

В нашем случае $y' = x,$ получим

$$\int_0^1 \sqrt{1+õ^2}dx = \left.\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) -$$

$$-0 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2,\ 0 \le t \le 3 \end{cases}$

Решение. При параметрическом задании кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

длина дуги вычисляется по формуле $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$

В нашем случае $x' = t^2 - 1; y' = 2t,$ тогда

$$L = \int\limits_0^3 \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2}\,dt = \int\limits_0^3 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^3 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\,dt = \int\limits_0^3 \sqrt{(t^2+1)^2}\,dt = \int\limits_0^3 (t^2+1)\,dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3^3}{3} + 3 = 12.$$

в) Вычислить длину дуги кривой $\rho = \varphi^2$ îò $\varphi = 0$ äî $\varphi = \pi.$

Решение.

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

$\rho' = 2\varphi$, значит,

$$L = \int\limits_0^\pi \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \varphi\sqrt{\varphi^2 + 4}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sqrt{\varphi^2 + 4}\,d(\varphi^2 + 4) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\varphi^2+4)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^\pi = \frac{(\varphi^2+4)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{3}((\pi^4 + 4)^{3/2} - 4^{3/2}) =$$

$$= \frac{1}{3}((\pi^2 + 4)^{3/2} - 8).$$

3.6. Пример 6

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + nx - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции **x** меняется от **0** до **N** единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$n = 5,\ N = 9.$

Решение. Согласно теореме о среднем значении

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Называется средним значением функции на отрезке $[a,b]$.

В нашем случае

$$f(\xi) = \frac{1}{9}\int_0^9 (3x^2 + 5x + 9)\,dx = \frac{1}{9}\left(\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{x} + 9x\right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(x^3 + 2{,}5x^2 + 9x\right)\Bigg|_0^9 = \frac{1}{9}\left(9^3 + 2{,}5\cdot 9^2 + 9\cdot 9\right) = 112{,}5$$

Определим, при каком объеме издержки принимают это значение.

Для этого надо решить уравнение

$$3x^2 + 5x + 9 = 112{,}5$$

$$3x^2 + 5x - 103{,}5 = 0$$

$$D = 25 - 4\cdot 3\cdot(-103{,}5) = 1267$$

$$x_1 = -6{,}8, \quad x_2 = 5{,}1$$

Учтем, что объем продукции не может быть отрицательным, получим

$$\xi = x = 5{,}1$$

3.7. Пример 7

Для $n = 1$ до 15

Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \dfrac{k}{at+b} + c$.

Решение.

Пусть $k = 7,\ à = 5,\ b = 1,\ ñ = 2$.

Если $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенным рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_2}^{t_2} f(t)dt.$$

В нашем случае

$$V = \int_1^2 \left(\frac{7}{5t+1} + 2 \right) dt = \left(\frac{7}{5} \ln |5t+1| + 2t \right) \Bigg|_1^2 = \frac{7}{5} \ln 11 + 4 - \frac{7}{5} \ln 6 - 2 =$$

$$= \frac{7}{5} \ln \frac{11}{6} + 2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст]: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. − 4-е изд., перераб. и доп. − М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2012. − 909 с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. − изд., стер. − М. : Интеграл-Пресс, 2007. − Т. 1. − 416 с.
3. Общий курс высшей математики для экономистов: [Текст]: учебник / Под общ. ред. В.И. Ермакова. − М.: ИНФРА-М, 2008. − 656с.
4. Сборник заданий по высшей математике. [Текст]: учебное пособие / Кузнецов Л.А.. − Спб : изд. «Лань», 2008 .− 240с.
5. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: [Текст]: учебное пособие) Б.П.Демидович. − 20-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань» , 2018. − 624с.