ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курский государственный технический университет»

Кафедра «Высшая математика»

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

Методические указания и индивидуальные задания
к модулю 5 системы РИТМо по дисциплине «Математика»
для студентов технических и экономических специальностей

Курск 2008

УДК 517

Составители: Т.Н. Лунева, Л.И. Федулеева

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Л.В. Карачевцева*

Интегрирование функций (неопределенный интеграл) [Текст] : методические указания и индивидуальные задания к модулю 5 системы РИТМо по дисциплине «Математика» / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Т.Н. Лунева, Л.И. Федулеева; Курск, 2008. 60 с. Библиогр.: с. 60.

Излагаются краткие рекомендации по нахождению неопределенных интегралов различными методами интегрирования и с помощью таблиц интегралов. Приведены индивидуальные задания, контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 22.01.08. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,16. Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Курский государственный технический университет.
Издательско-полиграфический центр Курского государственного технического университета. 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Важным фактором усвоения изучаемых разделов математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студентов, которая заключается в непрерывном выполнении индивидуальных заданий (расчетно-графических, контрольных и типовых расчетов).

Настоящее пособие имеет своей целью помочь студенту овладеть приемами и методами решения задач по теме «Интегрирование функций». Оно содержит методические указания по изучению техники интегрирования, типовые задачи с решениями и индивидуальные задания.

После проработки теоретического материала, разбора решенных задач, студент должен выполнить свои индивидуальные задания по варианту, номер которого указан ведущим преподавателем. Чтобы убедится в правильности самостоятельно выполненных заданий, необходимо осуществить проверку, выполнив операцию дифференцирования.

Для подготовки студента к защите выполненной работы представлен список контрольных вопросов. Кроме того, указан список литературы, отражающий в полной мере теоретический материал по данной теме.

При защите работы студент обязан объяснить решение любого примера из задания, ответить на любой из контрольных вопросов.

1. Указания к решению заданий

Интегрирование элементарных функций

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
5. $\int e^x dx = e^x + C;$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$
12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
14. $\int \mathrm{sh} x \, dx = \mathrm{ch} x + C;$
15. $\int \mathrm{ch} x \, dx = \mathrm{sh} x + C;$
16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C;$
17. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C;$
18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg} \dfrac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\sin x} - \mathrm{ctg} x\right| + C;$
19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}\right| + C.$

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

1.1. Примеры выполнения задания 1

Данные задания могут быть выполнены методом разложения подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью «табличного интегрирования» (этот метод основан на линейности неопределенного интеграла).

Пример 1. Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx$; б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx$;

в) $\int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx$; г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x}dx$.

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

$$а)\ \int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx =$$
$$= \int (x+2\sqrt{x}+4)\,dx = \int x dx + 2\int x^{1/2}dx + 4\int dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

$$б)\ \int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}dx = \int \left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right)dx =$$
$$= \int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right)dx = 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= 2\cdot(-\mathrm{ctg}x) + 3\cdot \mathrm{tg}x + C = 3\cdot\mathrm{tg}x - 2\cdot\mathrm{ctg}x + C.$$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

$$в)\ \int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx = \int \left(\frac{4}{9-x^2} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{9-x^2} \right)dx =$$

$$= -4\int \frac{dx}{x^2-9} - \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = -4\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

г) $$\int \frac{5^x\cdot e^x - 3^x}{2^x}dx = \int\left(\frac{5^x\cdot e^x}{2^x} - \frac{3^x}{2^x}\right)dx = \int\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}dx - \int\frac{3^x}{2^x}dx =$$

$$= \int\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x dx - \int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C =$$

$$= \frac{\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}}{\ln 5 + \ln e - \ln 2} - \frac{\frac{3^x}{2^x}}{\ln 3 - \ln 2} + C =$$

$$= \frac{5^x\cdot e^x}{2^x\cdot(\ln 5 + 1 - \ln 2)} - \frac{3^x}{2^x\cdot(\ln 3 - \ln 2)} + C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

1.2. Примеры выполнения задания 2

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt, \qquad (1.1)$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины **а** справедливо равенство:

$$d(x+a)=dx, \tag{1.2}$$

поэтому $\int f(x)dx=\int f(x)d(x+a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a\cdot x)=a\cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx=\frac{1}{a}\cdot d(a\cdot x), \qquad (a\neq 0) \tag{1.3}$$

поэтому

$$\int f(x)dx=\frac{1}{a}\cdot\int f(x)d(a\cdot x). \tag{1.4}$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sin(7x+2)dx$; б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{4x+3}$; г) $\int e^{-2x+7}dx$;

д) $\int 5^{7x-3}dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x+2)dx=\frac{1}{7}\cdot\int \sin(7x+2)d(7x+2)=-\frac{1}{7}\cdot\cos(7x+2)+C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k\neq 0$ имеют место формулы

$$\int \sin(kx+b)dx=-\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C \tag{1.5}$$

$$\int \cos(kx+b)dx=\frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C \tag{1.6}$$

б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx=-\int (3-x)^{1/3}d(3-x)=-\frac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C=$

$=-\frac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1, k \neq 0) \tag{1.7}$$

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{d(4x+3)}{4x+3} = \frac{1}{4} \cdot \ln|4x+3| + C.$

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k} \cdot \ln|kx+b| + C. \tag{1.8}$$

г) $\int e^{-2x+7} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x+7} d(-2x+7) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x+7} + C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int e^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx+b} + C. \tag{1.9}$$

д) $\int 5^{7x-3} dx = \frac{1}{7} \int 5^{7x-3} d(7x-3) = \frac{1}{7} \cdot \frac{5^{7x-3}}{\ln 5} + C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4 - \frac{x}{3}\right)} = -3 \cdot \int \frac{d\left(4 - \frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4 - \frac{x}{3}\right)} = -3 \cdot \mathrm{tg}\left(4 - \frac{x}{3}\right) + C$

(см. табличный интеграл 8).

1.3. Примеры выполнения задания 3

Данные задания могут быть решены методом замены переменной. При этом полезным будет вспомнить равенство

$$f'(x) \cdot dx = df(x) \quad (\text{или} \;\; y'dx = dy), \tag{1.10}$$

из которого вытекают следующие формулы:

$$x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1} \quad (\text{для } n \neq -1),$$

в частности:

$$x dx = \frac{1}{2} dx^2 \qquad\qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$$

$\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$ $\qquad$ $\frac{1}{x}dx = \ln a \cdot d(\log_a x)$

$e^x dx = d(e^x)$ $\qquad$ $a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot d(a^x)$

$\cos x dx = d \sin x$ $\qquad$ $\sin x dx = -d(\cos x)$

$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx)$ $\qquad$ $\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(ctgx)$

$\frac{1}{1+x^2}dx = d(arctgx)$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$

$\frac{-1}{1+x^2}dx = d(arcctgx)$ $\qquad$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -d(\arccos x)$

Пример 3. Найти интегралы

а) $\int x \cdot e^{-x^2} dx$; $\qquad$ б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx$;

в) $\int x^3 (2 + x^4)^5 dx$; $\qquad$ г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

д) $\int \frac{3^x}{4+3^x} dx$; $\qquad$ е) $\int (x+3) \cdot \cos(x^2 + 6x) dx$.

Решение.

а) сделаем замену переменной полагая $t = -x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t = -x^2$:

$$dt = d(-x^2) \qquad \text{или} \qquad dt = (-x^2)' dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \qquad \text{и} \qquad xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2 dx} = \int e^{-x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos x dx = d(\sin x) = d(\sin x + 2)$, тогда обозначим

$t = \sin x + 2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} d(\sin x + 2) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int t^{-1/3} dt =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{2}(\sin x + 2)^{2/3} + C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t = 2 + x^4$.

Тогда $dt = d(2 + x^4) = (2 + x^4)' dx = 4x^3 dx$, т.е. $dt = 4x^3 dx$, откуда $x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3 (2 + x^4)^5 dx = \int (2 + x^4)^5 \cdot x^3 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^5 dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{24} \cdot t^6 + C = \frac{1}{24} \cdot (2 + x^4)^5 + C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = d(\arcsin x)$ и заменой $t = \arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int (\arcsin x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int (\arcsin x)^3 d(\arcsin x) =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \cdot \arcsin^4 x + C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t = 4 + 3^x$. Тогда $dt = (4 + 3^x)' dx = 3^x \cdot \ln 3 dx$, откуда $3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int \frac{3^x}{4 + 3^x} dx = \int \frac{1}{4 + 3^x} \cdot 3^x dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln 3} dt = \frac{1}{\ln 3} \cdot \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln |t| + C = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln |4 + 3^x| + C = \log_3 (4 + 3^x) + C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t = x^2 + 6x$. Тогда $dt = d(x^2 + 6x) = (x^2 + 6x)'dx = (2x + 6)dx = 2(x + 3)dx$, т.е. $dt = 2(x + 3)dx$ и $(x + 3)dx = \frac{1}{2}dt.$

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int (x + 3) \cdot \cos(x^2 + 6x)dx = \int \cos(x^2 + 6x) \cdot (x + 3)dx =$$

$$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos tdt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(x^2 + 6x) + C.$$

1.4. Примеры выполнения задания 4

Данные задания должны быть решены методом интегрирования по частям, т.е. с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1.11)$$

В указанном равенстве произвольную постоянную мы не пишем, т.к. в правой части формулы остался неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную.

Полезно запомнить следующие 6 типов интегралов, которые удобно вычислить интегрированием по частям (n-натуральное число, a – действительное число)

1. $\int x^n \cdot e^x dx$;
2. $\int x^n \cdot \sin xdx$;
3. $\int x^n \cdot \cos xdx$;
4. $\int x^n \cdot \ln xdx$;
5. $\int x^n \cdot \mathrm{arctg} xdx$;
6. $\int x^n \cdot \arcsin xdx$.

Для интегралов 1, 2, 3 следует принимать за **u** множитель x^n, т.е. обозначить $u = x^n$. Это приведет к интегралу сходного типа, но уменьшит степень x на единицу. После n-кратного применения этого приема мы получим один из табличных интегралов

$$\int e^x dx, \qquad \int \sin xdx, \qquad \int \cos xdx.$$

В интегралах 4, 5, 6, за **u** следует принять множитель при степенной функции, т.е. $\ln x$, $\mathrm{arctg} x$ или $\arcsin x$ соответственно.

Пример 4. Найти интегралы, применяя метод интегрирования по частям

а) $\int (2+3x)\cdot e^{x/3}dx$; б) $\int (x^3+1)\cdot \ln x dx$;

в) $\int (2-x)\cdot \cos(1-4x)dx$; г) $\int x^2 \cdot \sin x dx$.

Решение.

а) Введем обозначения $u = 2+3x, \quad dv = e^{x/3}dx$. Тогда

$du = d(2+3x) = (2+3x)'dx = 3dx$ и $v = \int dv = \int e^{x/3}dx = 3\cdot e^{x/3}$.

Применяя формулу интегрирования по частям (1.11) получаем

$$\int (2+3x)\cdot e^{x/3}dx = (2+3x)\cdot 3e^{x/3} - \int 3e^{x/3}\cdot 3dx =$$

$$= (6+9x)e^{x/3} - 9\int e^{x/3}dx = (6+9x)e^{x/3} - 9\cdot 3e^{x/3} + C =$$

$$= (9x-21)\cdot e^{x/3} + C.$$

б) Обозначим $u = \ln x, \quad dv = (x^3+1)dx$.

Тогда

$$du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x} \text{ и } v = \int dv = \int (x^3+1)dx = \frac{x^4}{4} + x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям (1.11) получаем

$$\int (x^3+1)\cdot \ln x dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{4}+1\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx - \int dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4+x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} - x + C.$$

в) Полагаем, что $u = 2-x, \quad dv = \cos(1-4x)dx$.

Тогда $du = d(2-x) = (2-x)'dx = -dx$ и

$$v = \int dv = \int \cos(1-4x)dx = -\frac{1}{4}\int \cos(1-4x)d(1-4x) = -\frac{1}{4}\cdot \sin(1-4x).$$

Применяя формулу (1.11) получаем

$$\int (2-x)\cdot \cos(1-4x)dx =$$

$$= (2-x)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot \sin(1-4x) - \int -\frac{1}{4}\cdot \sin(1-4x)(-dx) =$$

$$= -\frac{1}{4}(2-x)\cdot\sin(1-4x) - \frac{1}{4}\int\sin(1-4x)dx =$$
$$= \frac{x-2}{4}\cdot\sin(1-4x) - \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\int\sin(1-4x)d(1-4x) =$$
$$= \frac{x-2}{4}\cdot\sin(1-4x) + \frac{1}{16}(-\cos(1-4x)) + C =$$
$$= \frac{x-2}{4}\cdot\sin(1-4x) - \frac{1}{16}\cos(1-4x) + C.$$

г) В данном примере для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям придется применять дважды.

Полагаем, что $u = x^2$, $\sin x dx = dv$. Тогда $du = dx^2 = 2xdx$ и $v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2\cdot\int x\cos x dx.$$

Повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к табличному интегралу. Действительно, обозначим теперь $u = x$, $\cos x dx = dv$. Тогда $du = dx$, $v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$ и

$$\int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 \cdot \cos x + 2(x\cdot\sin x - \int \sin x dx) =$$
$$= -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x + 2\cdot\cos x + C.$$

1.5. Пример выполнения задания 5

Простейшими рациональными дробями называются рациональные дроби следующих типов

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, $(n = 2,3,...)$

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $(n = 2,3,...)$

где A, a, p, q, M, N – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Покажем методы интегрирования этих функций. Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет труда. Если воспользоваться формулой (1.2) и формулами таблицы интегралов, то получим

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \cdot \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C \quad \text{и}$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A \cdot \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Рассмотрим интегрирование рациональной дроби III типа.

$$J_3 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \quad \left(\text{где } \frac{D}{4} = \frac{p^2}{4} - q < 0\right)$$

Выделим в знаменатель дроби полный квадрат

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Сделаем в J_3 замену переменной, учитывая, что

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0,$$

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt,$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2.$$

Тогда

$$J_3 = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = M \cdot \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - M \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \int \frac{dt}{t^2+a^2}.$$

Первый интеграл вычисляем методом замены переменных

$$\int \frac{tdt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+a^2) + C,$$

а второй интеграл – табличный. Возвращаясь к исходной переменной $\left(x = t - \frac{p}{2}\right)$, получаем

$$J_3 = \frac{M}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - p^2/4}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\right) + C.$$

Интегрирование дроби IV типа можно осуществить, используя реккурентные формулы, однако, удобнее воспользоваться справочным пособием (например, «Таблицы интегралов и другие математические формулы», автор Г.Б.Двайт).

Пример 5. Найти интегралы от выражений, содержащих квадратный трехчлен:

а) $\int \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$;

в) $\int \frac{x}{\sqrt{-9+15x-3x^2}}dx$.

Решение.

а) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби подынтегрального выражения $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ и сделаем замену $x+2=t$, $x=t-2,\ dx=dt.$

Получаем

$$J=\int \frac{3x-4}{x^2+4x+5}dx=\int \frac{3x-4}{(x+2)^2+1}dx=\int \frac{3(t-2)-4}{t^2+1}dt=$$

$$=3\cdot\int \frac{tdt}{t^2+1}-10\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{3}{2}\cdot\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}-10\int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Воспользуемся табличными интегралами 3 и 10:

$$J=\frac{3}{2}\ln(t^2+1)-10\mathrm{arctg}t+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-10\mathrm{arctg}(x+2)+C.$$

б) Выделим полный квадрат в подкоренном выражении подынтегральной функции

$4x^2+4x+5=(4x^2+4x+1)+4=(2x+1)^2+4$ и сделаем замену $2x+1=t,\ x=\frac{1}{2}(t-1),\ dx=\frac{1}{2}dt$.

Получаем

$$J=\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\int \frac{x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(t-1)+1}{\sqrt{t^2+4}}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+4}}dt=\frac{1}{4}\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}+\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+4)}{\sqrt{t^2+4}}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}.$$

Воспользуемся табличными интегралами 2 и 13:

$$J=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{t^2+4}}{1/2}+\frac{1}{4}\cdot\ln|\,t+\sqrt{t^2+4}\,|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}+\frac{1}{4}\ln|\,2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\,|+C.$$

в) Выделим полный квадрат в подкоренном выражении подынтегральной функции

$$-9+15x-3x^2=-3(x^2-5x+3)=-3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+3\right)=$$

$$=-3\cdot\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}\right]=3\cdot\left[\frac{13}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\right]$$

и сделаем замену $x-\frac{5}{2}=t,\quad x=t+\frac{5}{2},\quad dx=dt.$

Получаем

$$J=\int\frac{x}{\sqrt{-9+15x-3x^2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{3\cdot[13/4-(x-5/2)^2]}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int\frac{t+\frac{5}{2}}{\sqrt{13/4-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(13/2)^2-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{tdt}{\sqrt{13/4-t^2}}=$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{13}/2\right)^2-t^2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(13/4-t^2\right)}{\sqrt{13/4-t^2}}.$$

Воспользуемся табличными интегралами 11 и 2

$$J=\frac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{13}/2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{13/4-t^2}}{1/2}+C=$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{3}}\cdot\arcsin\left(\frac{2x-5}{\sqrt{13}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{-x^2+5x-3}+C.$$

1.6. Примеры выполнения задания 6

Рассмотренный в 1.5. метод интегрирования правильных рациональных дробей, знаменатель которых имеет вторую степень (выделение полного квадрата в знаменателе с последующей заменой переменной) имеет существенный недостаток: он не обобщается в том случае, когда степень знаменателя больше двух. Покажем другой возможный метод интегрирования правильных рациональных дробей.

Пример 6. Найти интеграл от рациональной дроби, разложив ее на сумму простейших дробей:

а) $\int \dfrac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$; б) $\int \dfrac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx$;

в) $\int \dfrac{x^2-5x+11}{(x-1)(x^2+4)}dx$.

Решение.

а) Разлагаем знаменатель подынтегральной функции на неприводимые множители

$$x^3+2x^2-8x=x(x^2+2x-8)=x(x+4)(x-2).$$

Используя полученное разложение, запишем представление правильной дроби (подынтегрального выражения) в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+4}.$$

Из последнего равенства найдем значения коэффициентов A, B, C. Приводя дроби правой части к общему знаменателю, получаем равенство

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x+4)(x-2)}=\frac{A(x-2)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+4)},$$

т.е. $$A(x-2)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-2)=x^2-2x+2.$$

Подставляя в последнее равенство числовые значения x, находим значения коэффициентов:

если $x=0$, то имеем $-8A=2$ и $A=-1/4$.
если $x=2$, то имеем $12B=2$ и $B=1/6$.
если $x=-4$, то имеем $24C=26$ и $C=13/12$.

Тогда

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\,dx = \int\left(\frac{-1/4}{x}+\frac{1/6}{x-2}+\frac{13/12}{x+4}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot \ln|x| + \frac{1}{6}\cdot \ln|x-2| + \frac{13}{12}\cdot \ln|x+4| + C.$$

б) Разлагаем знаменатель подынтегральной функции на неприводимые множители

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2.$$

Используя полученное разложение, запишем представление правильной дроби (подынтегрального выражения) в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}.$$

Из последнего равенства находим значения коэффициентов A, B, C. После приведения к общему знаменателю дробей правой части получим равенство

$$\frac{x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx}{x(x+2)^2},$$

т.е. $$A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx = x+1.$$

Подставляя в последнее равенство числовые значения x, находим значения коэффициентов:

если $x=0$, то имеем $4A=1$ и $A=1/4$.

если $x=-2$, то имеем $-2C=-1$ и $C=1/2$.

если $x=1$, то имеем $9A+3B+C=2$.

Подставляя найденные значения $A=1/4$ и $C=1/2$, вычислим значение B: $\frac{9}{4}+3B+\frac{1}{2}=2$, откуда $B=-1/4$.

Тогда

$$\int\frac{x+1}{x^3+4x^2+4x}dx = \int\frac{x+1}{x(x+2)^2}dx = \int\left(\frac{1/4}{x}-\frac{1/4}{x+2}+\frac{1/2}{(x+2)^2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\cdot\ln|x+2|+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+C.$$

в) Разлагаем подынтегральную функцию (правильную дробь) на простейшие дроби:

$$\frac{x^2-5x+11}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Приводя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая числители в обеих частях, получим

$$x^2-5x+11=A(x^2+4)+(Mx+N)(x-1).$$

Полагая сначала в этом тождестве $x=1$, а затем приравнивая коэффициенты при x^2 и x, получим систему уравнений

$$\begin{cases}7=5A\\ 1=A+M\\ -5=-M+N,\end{cases}$$

для которой решением являются числа

$$A=\frac{7}{5},\quad M=-\frac{2}{5},\quad N=-\frac{27}{5}.$$ (Проверить самостоятельно)

Следовательно, $\dfrac{x^2-5x+11}{(x-1)(x^2+4)}=\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2x+27}{x^2+4}.$

Используя выше изложенные методики и табличные интегралы, получим

$$\int\frac{x^2-5x+11}{(x-1)(x^2+4)}dx=\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{5}\int\frac{2x+27}{x^2+4}dx=$$

$$=\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{5}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{27}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{7}{5}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-$$

$$-\frac{27}{5}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=\frac{7}{5}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{5}\cdot\ln(x^2+4)-\frac{27}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Рассмотренный при решении примеров п.1.6 метод разложения правильной дроби на простейшие, иногда называют методом неопределенных коэффициентов.

Замечание. Следует отметить, что в предыдущих примерах были рассмотрены лишь правильные дроби, т.е. такие, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. Заметим также, что используя алгоритм деления многочленов «углом», известный из школьного курса, можно представить любую неправильную дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^3-3x+4}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{6}{x-2}.$$

Тогда интеграл от исходной дроби сводится (с помощью метода разложения) к сумме интегралов от многочлена и правильной дроби, т.е.

$$\int\frac{x^3-3x+4}{x-2}dx=\int x^2dx+2\int xdx+\int dx+6\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+6\cdot\ln|x-2|+C.$$

1.7. Примеры выполнения задания 7

Рассмотрим методы интегрирования тригонометрических функций, решая конкретные примеры

Пример 7. Найти интегралы

а) $\int\frac{1}{\sin^2x\cdot\cos^2x}dx$; б) $\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx$;

в) $\int\sin^2x\cdot\cos^3x\,dx$; г) $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}5x}}{\cos^2 5x}dx$;

д) $\int\cos^2x\,dx$; е) $\int\frac{dx}{\cos^4 3x}$;

ж) $\int\sin 3x\cdot\cos 5x\,dx$; з) $\int\sin^{1/3}x\cdot\cos^5x\,dx$;

к) $\int\mathrm{tg}^4x dx$.

Решение.

а) Для нахождения интеграла воспользуемся тригонометрическим тождеством $1=(\sin^2x+\cos^2x)$ и применим формулы таблицы интегралов 8 и 9:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C.$$

б) Для нахождения интеграла воспользуемся заменой: $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, а также формулой $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, т.е. $\sin^2 x = 1 - t^2$. Учитывая вышеизложенное, получаем

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot (\sin x dx)}{\cos^4 x} = \int \frac{1 - t^2}{t^4} (-dt) =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-4} dt + \int t^{-2} dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Заметим, что в данном примере замена определялась тригонометрической функцией, имеющей четную степень в подынтегральном выражении.

в) В данном примере полагаем $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x\, dx$.

Следовательно,

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\cos x dx) = \int t^2 (1 - t^2) dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x - \frac{1}{5} \cdot \sin^5 x + C.$$

г) Заметим, что использование замены $t = \mathrm{tg}5x$ приводит к табличному интегрированию. Действительно,

$$dt = d(\mathrm{tg}5x) = (\mathrm{tg}5x)' dt = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 \cdot dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos^2 5x} dx = \frac{1}{5} dt.$$

Тогда

$$\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}5x}}{\cos^2 5x} dx = \int \sqrt{\mathrm{tg}5x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 5x} dx \right) = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int t^{1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{t^3} + C = \frac{2}{15} \cdot \sqrt{\mathrm{tg}^3 5x} + C.$$

д) Интегралы от тригонометрических функций, содержащих функции $\sin x$ и $\cos x$ в четных степенях находятся с помощью формул

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

т.е.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

е) Для вычисления данного интеграла воспользуемся уже известным приемом представления: $1 = \sin^2 3x + \cos^2 3x$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^4 3x} = \int \frac{\sin^2 3x + \cos^2 3x}{\cos^4 3x}dx = \int\left(\frac{\sin^2 3x}{\cos^4 3x} + \frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx =$$

$$= \int tg^2 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int tg^2 3x d(tg3x) + \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{tg^3 3x}{3} + \frac{1}{3}\cdot tg3x + C = \frac{1}{9}\cdot tg^3 3x + \frac{1}{3}\cdot tg3x + C.$$

ж) Интегралы вида $\int \sin\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \cdot \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cdot \cos\beta x dx$, (где α, β – некоторые действительные числа) находятся с помощью известных тригонометрических формул:

$$\sin\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]$$

$$\sin\alpha x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Тогда

$$\int \sin 3x \cdot \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int[\sin 8x - \sin 2x]dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin 8x d(8x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = \frac{1}{4}\cdot\cos 2x - \frac{1}{16}\cdot\cos 8x + C.$$

з) Для нахождения данного интеграла воспользуемся заменой $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, а также формулой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, т.е. $\cos^2 x = 1 - t^2$. Учитывая вышеизложенное, получаем

$$\int \sin^{1/3} x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^{1/3} x \cdot \cos^4 x \cdot (\cos x dx) =$$

$$= \int \sin^{1/3} x \cdot (\cos^2 x)^2 \cdot (\cos x dx) = \int t^{1/3}(1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int t^{1/3}(1 - 2t^2 + t^4) dt = \int t^{13/3} dt - 2\int t^{7/3} dt + \int t^{1/3} dt =$$

$$= \frac{3}{16} \cdot (\sin x)^{16/3} - \frac{3}{5} \cdot (\sin x)^{10/3} + \frac{3}{4} \cdot (\sin x)^{4/3} + C.$$

к) Интегралы вида $\int tg^m x\, dx$ (или $\int ctg^m x\, dx$), где m – целое положительное число, вычисляются с помощью формулы:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \text{ (или соответственно } ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1).$$

$$\int tg^4 x dx = \int tg^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int tg^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} dx \right) - \int tg^2 x dx =$$

$$= \int tg^2 x d(tgx) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x + C.$$

1.8. Примеры выполнения заданий 8

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция могут быть сведены к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = tg\frac{x}{2} \qquad (x \neq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z).$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Если для подынтегральной функции имеет место тождество $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то для приведения интеграла к рациональному виду можно применить подстановку

$$t = \mathrm{tg} x,$$

тогда $$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тригонометрические подстановки используются также для интегрирования некоторых иррациональных функций.

1) Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно используют подстановку $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$); отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \quad (\text{или } \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \sin t).$$

2) Если подынтегральное выражение содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то используют подстановку $x = a \cdot \dfrac{1}{\cos x}$, тогда $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \mathrm{tg} t$.

3) Если подынтегральное выражение содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то используют подстановку $x = a \cdot \mathrm{tg} t$, тогда $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot \dfrac{1}{\cos x}$.

Заметим, что использование тригонометрических подстановок не всегда оказывается рациональным.

Пример 8. Найти интегралы, применяя тригонометрические подстановки:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{x^2} dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$;

д) $\int \frac{\sin^2 x}{2\cos 2x - 3}dx$; е) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение.

а) используем подстановку $x = 3\sin t$ $(t = \arcsin\frac{x}{3})$, тогда $dx = d(3\sin t) = 3\cos tdt$ и $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\cos t$.

Находим $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{(3\sin t)^2}{3\cos t}\cdot 3\cos tdt = 9\int \sin^2 tdt =$

$$= \frac{9}{2}\int(1-\cos 2t)dt = \frac{9}{2}\cdot t - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot t - \frac{9}{2}\cdot \sin t\cdot\cos t + C = \frac{9}{2}\cdot t - \frac{1}{2}(3\sin t)\cdot(3\cos t) + C =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{9-x^2} + C.$$

б) Преобразуем подкоренное выражение подынтегральной функции, выделив полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 13 = (x^2 - 2\cdot 3x + 9) + 4 = (x-3)^2 + 4,$$

затем воспользуемся подстановкой $x - 3 = 2tgt$, откуда

$$x = 3 + 2\cdot tgt \text{ и } dx = 2\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt.$$

Итак, $\int \frac{x}{\sqrt{(x-3)^2+4}}dx = \int \frac{3+2\cdot tgt}{\sqrt{4tg^2 t + 4}}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}dt =$

$$= 2\int \frac{3+2tgt}{2\left(\frac{1}{\cos t}\right)}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \int\frac{3+2tgt}{\cos t}dt = 3\int\frac{dt}{\cos t} + 2\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= 3\int\frac{dt}{\cos t} - 2\int(\cos t)^{-2}d\cos t = 3\cdot\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\cdot\frac{(\cos t)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= 3\cdot\ln\left|tgt + \frac{1}{\cos t}\right| + \frac{2}{\cos t} + C$$

(см. табличные интегралы 19 и 2).

Возвращаясь к переменной x, выразим функцию $tgt = \frac{x-3}{2}$, тогда

$$\frac{1}{\cos t}=\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+13}.$$

Окончательно,

$$\int\frac{x}{\sqrt{(x-3)^2+4}}dx=3\ln\left|\operatorname{tg}t+\frac{1}{\cos t}\right|+2\frac{1}{\cos t}+C=$$

$$=3\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+13}\right|+\sqrt{x^2-6x+13}+C.$$

в) Воспользуемся заменой (подстановкой) $x=5\operatorname{tg}t$, тогда $dx=5\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Находим интеграл:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+25}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{25(\operatorname{tg}^2 t+1)}}{5\operatorname{tg}t}\cdot 5\frac{dt}{\cos^2 t}=5\int\frac{1}{\operatorname{tg}t\cdot\cos t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=5\int\frac{1}{\sin t\cdot\cos^2 t}dt=5\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin t\cdot\cos^2 t}dt=5\int\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}+5\int\frac{dt}{\sin t}=$$

$$=-5\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t}+5\int\frac{dt}{\sin t}=-5\cdot\frac{(\cos t)^{-1}}{-1}+5\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=$$

$$=5\frac{1}{\cos t}+5\ln\left|\frac{1}{\sin t}-\operatorname{ctg}t\right|+C$$

(см. табличные интегралы 2 и 18).

Возвращаясь к переменной x, выразим функцию: $\operatorname{tg}t=\frac{x}{5}$, тогда

$$\frac{1}{\cos t}=\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}=\sqrt{\frac{x^2}{25}+1}=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{x^2+25}$$

$$\frac{1}{\sin t}=\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t+1}=\sqrt{\frac{25}{x^2}+1}=\frac{1}{x}\sqrt{25+x^2}.$$

Окончательно,

$$\int\frac{\sqrt{x^2+25}}{x^2}dx=5\cdot\frac{1}{5}\sqrt{x^2+25}+5\ln\left|\frac{1}{x}\sqrt{25+x^2}-\frac{5}{x}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+25}+5\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x}\right|+C$$

г) Используя подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, будем иметь:

$$\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t}=$$

$$=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

д) Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{\sin^2 x}{2\cos 2x-3}=\frac{\sin^2 x}{2(\cos^2 x-\sin^2)-3}$$

и воспользуемся подстановкой $t=\operatorname{tg}x$,

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x-2\sin^2 x-3}dx=\int\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{2\cdot\frac{1}{1+t^2}-2\cdot\frac{t^2}{1+t^2}-3}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{t^2}{(-5t^2-1)}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=-\int\frac{t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)}dt.$$

Разлагаем правильную подынтегральную дробь на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{5t^2+1}\ ,$$

$t^2=(At+B)(5t^2+1)+(Ct+D)(t^2+1)$ или

$t^2=(5A+C)t^3+(5B+D)t^2+(A+C)t+(B+D)$.

Записав систему равенств коэффициентов при одинаковых степенях

$t^3: \quad 0 = 5A + C$

$t^2: \quad 1 = 5B + D$

$t^1: \quad 0 = A + C$

$t^0: \quad 0 = B + D$

и решив ее, получим $A = 0, \quad C = 0, \quad B = 1/4, \quad D = -1/4$. Тогда

$$-\int \frac{t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)}dt = -\int \left(\frac{1/4}{t^2+1} - \frac{1/4}{5t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 + 1/5} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{20} \cdot \sqrt{5} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{5} \cdot t) - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{arctg} t + C_0 =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{20} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{5} \cdot \mathrm{tg} x) - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x) + C_0 = \frac{\sqrt{5}}{20} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{5} \cdot \mathrm{tg} x) - \frac{x}{4} + C_0$$

е) Воспользуемся подстановкой $t = \mathrm{tg} x$, тогда

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot \mathrm{tg} x) + C.$$

Замечание. В некоторых примерах могут быть использованы разные подстановки, например, $t = \mathrm{tg} x$ или $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Выбор следует остановить на той подстановке, которая приводит к наиболее простому способу интегрирования.

1.9. Примеры выполнения задания 9

Рассмотрим случаи, в которых замена переменной позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций.

I. Интегралы виды $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$ вычисляются с помощью замены: $t = \sqrt[n]{x}$, $x = t^n$, $dx = nt^{n-1}dt$.

II. Интегралы от дробно-линейных функций, т.е. интегралы виды $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где $ad - bc \neq 0$ вычисляются с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

III. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Могут быть найдены с помощью обратной подстановки $t = \frac{1}{mx+n}$.

IV. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ в простейших случаях сводятся к табличным, необходимая замена переменной определяется после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене ax^2+bx+c.

Пример 9. Найти интегралы

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$; б) $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{4x-1}}dx$;

в) $\int \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}\,dx$; г) $\int \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx$.

Решение.

а) Воспользуемся подстановкой $t = \sqrt[4]{2x-1}$ или $(2x-1) = t^4$. Тогда $d(2x-1) = 2dx = 4t^3dt$ и $dx = 2t^3dt$. Указанная подстановка приводит интеграл к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2t^3dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1| + C =$$

$$= \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C.$$

б) Подстановка $x = \frac{1}{t}$, $dx = \frac{-1}{t^2}dt$ приводит интеграл к виду

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{4x-1}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{4/t-1}} \cdot \frac{-1}{t^2}dt = -\int \frac{dt}{t\sqrt{4/t-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t-t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2 - 4t + 4) + 4}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4 - (t-2)^2}} = -\arcsin\left(\frac{t-2}{2}\right) + C =$$

$$= -\arcsin\left(\frac{1/x - 2}{2}\right) + C = -\arcsin\left(\frac{1-2x}{2x}\right) + C.$$

в) Воспользуемся подстановкой $t = \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}$, откуда $\frac{4-x}{2x-1} = t^2$.

Выразим $x = \frac{t^2+4}{2t^2+1}$, тогда $dx = \left(\frac{t^2+4}{2t^2+1}\right)' dt = \frac{-14t}{(2t^2+1)^2} dt$.

Интеграл примет вид

$$\int \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-14t}{(2t^2+1)^2} dx = -14\int \frac{t^2}{(2t^2+1)^2} dt =$$

$= -\frac{7}{2}\int \frac{t^2}{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dt$ – результат вычисления данного интеграла можно найти в справочнике Двайта «таблицы интегралов» с.30, №122.2.

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} dx = -\frac{7}{2}\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2 + 1/2\right)^2} =$$

$$= -\frac{7}{2} \cdot \left[-\frac{t}{2\left(t^2 + 1/2\right)} + \frac{1}{2 \cdot 1/\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{1/\sqrt{2}}\right)\right] + C =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{t}{2t^2+1} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) + C = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} \cdot \left(2 \cdot \frac{4-x}{2x-1} + 1\right)^{-1} -$$

$$- \frac{7\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}}\right) + C = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{4-x}{2x-1}} \cdot \frac{2x-1}{7} -$$

$$- \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{8-2x}{2x-1}}\right) + C = \frac{1}{2}\sqrt{(4-x)(2x-1)} - \frac{7\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{8-2x}{2x-1}} + C.$$

Заметим, что интеграл $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)^2}dt$ может быть найден с помощью подстановки $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{tg}z,\ dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z}$.

Действительно,

$$\int \frac{t^2}{(2t^2+1)^2}dt = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 z}{(\mathrm{tg}^2 z+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\mathrm{tg}^2 z}{(1/\cos^4 z)} \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int \sin^2 z dz = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \int \frac{1}{2}(1-\cos 2z)dz = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(z - \frac{1}{2}\sin 2z\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}[z - \sin z \cdot \cos z] + C.$$

Возвращаясь к переменной t, выразим функции:

$$z = \mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot t), \quad \sin z = \frac{\mathrm{tg}z}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 z+1}} = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{\sqrt{2t^2+1}},$$

$$\cos z = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2 z+1}} = \frac{1}{\sqrt{2t^2+1}}.$$

Тогда $\int \frac{t^2}{(2t^2+1)^2}dt = \frac{1}{4\sqrt{2}}z - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sin z \cdot \cos z + C =$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot t}{\sqrt{2t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t^2+1}} + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) - \frac{t}{4(2t^2+1)} + C.$$

Заметим, что полученный результат:

$$\int \frac{t^2}{(2t^2+1)^2}dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^2}{\left(t^2+1/2\right)^2}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\sqrt{2} \cdot t) - \frac{t}{2t^2+1}\right] + C$$

соответствует результату, найденному с помощью таблицы.

Дальнейшие преобразования (переход к переменной x) ранее уже были приведены.

2. Индивидуальные задания

Задание 1.
Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2. $\int \frac{5x^8+3}{x^3}\,dx$

3. $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

4. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

5. $\int \frac{2^x-3^x}{4^x}\,dx$

6. $\int \frac{2\,dx}{x^2-9}$

7. $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

8. $\int \frac{3-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

9. $\int \frac{2^x \cdot e^x - 1}{2^x}\,dx$

10. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$

11. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

12. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

13. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+2}\,dx$

14. $\int \frac{1+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$

15. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$

16. $\int \frac{2x\sin^2 x+3}{\sin^2 x}\,dx$

17. $\int \left(\sin x + \frac{e^x}{2} + \sqrt[6]{x} \right) dx$

18. $\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

19. $\int \frac{3^x+4^x}{2^x}\,dx$

20. $\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\,dx$

21. $\int \frac{1-\sqrt{x^2-4}}{2\sqrt{x^2-4}}\,dx$

22. $\int \frac{2+\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}\,dx$

23. $\int \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}}\,dx$

24. $\int \frac{2^x-5^x}{e^x}\,dx$

25. $\int \frac{3-\sqrt{4-x^2}}{4-x^2}\,dx$

26. $\int \frac{3^x \cdot e^x - 5^x}{2^x}\,dx$

27. $\int \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}}\,dx$

28. $\int \frac{2^x + 4^x + 1}{2^x}\,dx$

29. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})^2\,dx$

30. $\int \left(e^x - \frac{3}{1+x^2} \right) dx$

31. $\int \frac{4x\sin^2 x - 3}{\sin^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{\sqrt{x}\cdot e^x + \sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

33. $\int (\sqrt[3]{x}+1)^2\,dx$

34. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$

35. $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$

37. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{81-x^4}}\,dx$

38. $\int \frac{3^x + 5^x}{4^x}\,dx$

39. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}\,dx$

40. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

41. $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

42. $\int \frac{1-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}\,dx$

43. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx$

44. $\int \frac{2\cos^2 x + 3}{\cos^2 x}\,dx$

45. $\int \frac{2x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})^2\,dx$

47. $\int \frac{5-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

48. $\int \frac{5^x \cdot e^x + 4^x}{5^x}\,dx$

49. $\int \frac{2x+1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

50. $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$

51. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx$

52. $\int \frac{(x-2)^2}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

54. $\int \frac{3\,dx}{x^2-25}$

55. $\int \frac{2^x - 2\cdot 5^x}{3^x}\,dx$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+4}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

57. $\int \frac{x\cdot 2^x - \sqrt{x}}{x}\,dx$

58. $\int \frac{3\sin x\cdot e^x - 4e^{2x}}{e^x}\,dx$

59. $\int \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}\,dx$

60. $\int \frac{1-\sqrt{x^2-4}}{3\sqrt{x^2-4}}\,dx$

61. $\int 3^x(2^x - 3^{-x})\,dx$

62. $\int \frac{3}{36-x^2}\,dx$

63. $\int \frac{1}{\cos x}\left(\sqrt{x}\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)dx$

64. $\int (\sqrt{x}+\sqrt[5]{x})^2\,dx$

65. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}\,dx$

66. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

67. $\int \frac{x^2}{x^2+9}\,dx$

68. $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sin^2 x}\right)dx$

69. $\int \frac{5x^4-1}{\sqrt{x}}\,dx$

70. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$

71. $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

72. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4+x^2}}{2\sqrt{16-x^4}}\,dx$

73. $\int \frac{5^x - 2^{2x}}{3^x}\,dx$

74. $\int \frac{2+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

75. $\int \frac{x^2\sqrt{x^2-4}-5}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

76. $\int \frac{\sqrt{x^4-x^2}-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

77. $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$

78. $\int \frac{x^2+4}{x^2+1}\,dx$

79. $\int (2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\,dx$

80. $\int \frac{xe^x-\sqrt{x}}{x}\,dx$

Задание 2.
Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\int \sin(1-3x)dx$
2. $\int \cos(5x-1)dx$
3. $\int \sqrt{3x+1}\,dx$
4. $\int \sqrt[3]{2x-1}\,dx$
5. $\int e^{2x+1}\,dx$
6. $\int 2^{3-2x}\,dx$
7. $\int \frac{1}{3x+1}dx$
8. $\int \frac{dx}{2-3x}$
9. $\int \frac{1}{e^{1-7x}}\,dx$
10. $\int 5^{3x-1}\,dx$
11. $\int \cos(1-7x)\,dx$
12. $\int e^{5-7x}\,dx$
13. $\int \sqrt[4]{3x-1}\,dx$
14. $\int \sqrt[8]{1-2x}\,dx$
15. $\int \sqrt[6]{1-4x}\,dx$
16. $\int \frac{1}{1-5x}\,dx$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{3x+2}}\,dx$
18. $\int \cos\left(3-\frac{x}{5}\right)dx$
19. $\int e^{\frac{x}{5}+1}\,dx$
20. $\int e^{\frac{x}{3}-1}dx$
21. $\int e^{\frac{x-4}{3}}\,dx$
22. $\int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx$
23. $\int 2^{1-\frac{2x}{3}}\,dx$
24. $\int 5^{1-\frac{x}{2}}\,dx$
25. $\int \cos\left(2-\frac{3x}{7}\right)dx$
26. $\int \frac{1}{\cos^2(1-2x)}\,dx$
27. $\int \sin\left(1-\frac{x}{2}\right)dx$
28. $\int \sqrt[4]{1-7x}\,dx$
29. $\int (2x-3)^6\,dx$
30. $\int (5x-1)^{-1/4}\,dx$
31. $\int \sin\left(1-\frac{2x}{3}\right)dx$
32. $\int \frac{1}{\sin^2(5x+1)}\,dx$
33. $\int \frac{1}{5-3x}dx$
34. $\int (1-5x)^{1/5}\,dx$
35. $\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx$
36. $\int 2^{1-7x}\,dx$
37. $\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$
38. $\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^4 dx$
39. $\int 2^{\frac{x+1}{2}}\,dx$
40. $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}}\,dx$
41. $\int \frac{1}{(1-3x)^{1/5}}\,dx$
42. $\int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{5}}dx$
43. $\int \frac{1}{(2x-1)^{1/2}}\,dx$
44. $\int \frac{1}{3-5x}dx$
45. $\int \frac{1}{1-7x}\,dx$

46. $\int \frac{1}{3^{2-4x}}\,dx$ 47. $\int \sin\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$ 48. $\int \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$

49. $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$ 50. $\int \left(1-\frac{x}{4}\right)^5 dx$ 51. $\int \cos\left(1-\frac{x}{7}\right)dx$

52. $\int \frac{1}{e^{2x}}\,dx$ 53. $\int \frac{1}{2^{1-2x}}\,dx$ 54. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x+4}}\,dx$

55. $\int \cos\left(3-\frac{7x}{2}\right)dx$ 56. $\int \frac{1}{(3x+1)^8}\,dx$ 57. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}\,dx$

58. $\int 5^{1-\frac{x}{7}}\,dx$ 59. $\int \cos\left(3-\frac{4x}{3}\right)dx$ 60. $\int \frac{1}{1-8x}\,dx$

61. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx$ 62. $\int \sin\left(\frac{5x}{2}+1\right)dx$ 63. $\int \frac{1}{(3x-4)^2}\,dx$

64. $\int (1-7x)^{11}\,dx$ 65. $\int 4^{1-\frac{x}{5}}\,dx$ 66. $\int \sqrt[6]{1-4x}\,dx$

67. $\int \frac{1}{e^{5x+4}}\,dx$ 68. $\int \frac{1}{2^{1-9x}}\,dx$ 69. $\int \frac{1}{1-10x}\,dx$

70. $\int \frac{1}{5-2x}\,dx$ 71. $\int \frac{1}{\cos^2(3x-1)}\,dx$ 72. $\int \frac{1}{3-4x}\,dx$

73. $\int \sqrt{3-2x}\,dx$ 74. $\int (5x-1)^4\,dx$ 75. $\int (1-4x)^7\,dx$

76. $\int \frac{1}{(4-3x)^4}\,dx$ 77. $\int \frac{1}{\sin^2(1-4x)}\,dx$ 78. $\int \cos\left(2-\frac{x}{9}\right)dx$

79. $\int \frac{1}{(1-2x)^{1/3}}\,dx$ 80. $\int \left(2-\frac{4x}{3}\right)^9 dx$

Задание 3.

Найти интеграл, результат проверить дифференцированием.

1. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

2. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$

3. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x \, dx$

4. $\int (x^3+1)^4 \cdot x^2 dx$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$

7. $\int (e^x+1)^3 \cdot e^x dx$

8. $\int (x^2+5x+1)^2 (2x+5) \, dx$

9. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}} dx$

10. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} dx$

11. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$

12. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$

13. $\int \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$

14. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

16. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

17. $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+2} \, dx$

18. $\int \sin(e^x) \cdot e^x \, dx$

19. $\int \frac{2x \, dx}{x^4+1}$

20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

21. $\int x \cos x^2 \, dx$

22. $\int x \cdot e^{1-x^2} \, dx$

23. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

24. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

25. $\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x} dx$

26. $\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x} dx$

27. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx$

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

29. $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$

30. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$

31. $\int 2^{x^2} \cdot x \, dx$

32. $\int e^x \cos(e^x) \, dx$

33. $\int x\cdot e^{4-x^2}\,dx$

34. $\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx$

35. $\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx$

36. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

37. $\int x^2(2+x^3)^4\,dx$

38. $\int (x^3-4x)^{10}(3x^2-4)\,dx$

39. $\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$

40. $\int \frac{e^{\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}\,dx$

41. $\int 3^{\cos x}\cdot \sin x\,dx$

42. $\int e^{\cos x}\cdot \sin x\,dx$

43. $\int \frac{4x}{1+3x^2}\,dx$

44. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$

45. $\int x\cos(x^2+1)\,dx$

46. $\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$

47. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$

48. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

49. $\int x\cos(1-x^2)\,dx$

50. $\int (x^6-5x+1)^5(6x^5-5)\,dx$

51. $\int 2^{\sin x}\cdot \cos x\,dx$

52. $\int \sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}\cdot(2x+1)\,dx$

53. $\int 2^{\arcsin x}\cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

54. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

56. $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,dx$

57. $\int (x^3+2)^{1/3}\cdot x^2\,dx$

58. $\int x^2\sin(x^3+1)\,dx$

59. $\int \cos x\cdot \sqrt[3]{\sin x+3}\,dx$

60. $\int \sqrt[4]{2x^3+x}\cdot(6x^2+1)\,dx$

61. $\int \frac{x}{\sin^2(x^2-1)}\,dx$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}$

63. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

64. $\int \frac{\mathrm{arcctg}^4 x}{1+x^2}\,dx$

65. $\int 5^{\cos x}\cdot \sin x\,dx$

66. $\int x\cdot \cos(x^2-3)\,dx$

67. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$

68. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

69. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

70. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

71. $\int (x+1)\cdot \sin(x^2+2x)\,dx$

72. $\int 2^{\sin x}\cdot \cos x\,dx$

73. $\int 3^{x^3+1}\cdot x^2\,dx$

74. $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x}\,dx$

75. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

76. $\int \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{1+x^2}\,dx$

77. $\int \frac{\sin x}{\cos^{1/3} x}\,dx$

78. $\int \frac{dx}{(1+1)\ln^3(x+1)}\,dx$

79. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3(x+2)}{1+(x+2)^2}\,dx$

80. $\int \frac{\operatorname{tg}^3(x-1)}{\cos^2(x-1)})\,dx$

Задание 4.

Найти интеграл, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

1. $\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$
2. $\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
3. $\int \mathrm{arctg}2x\;dx$
4. $\int \ln x\,dx$
5. $\int \arcsin(x+1)\;dx$
6. $\int (1-3x)\cdot 2^{x}dx$
7. $\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$
8. $\int \ln(1-x)\,dx$
9. $\int (2x-1)\cos x\;dx$
10. $\int x\ln 2x dx$
11. $\int (2x+1)\cdot e^{2x}dx$
12. $\int x\cdot 2^{-x}dx$
13. $\int (x+1)\mathrm{arctg}x\,dx$
14. $\int \arcsin(x+2)\;dx$
15. $\int (1-x)\ln x\;dx$
16. $\int \ln(1-3x)\;dx$
17. $\int (2x-3)\cos 3x\;dx$
18. $\int (x+1)\cdot\sin 5x\;dx$
19. $\int x\cdot e^{1-x}dx$
20. $\int \ln\left(\dfrac{x}{2}+1\right)dx$
21. $\int (x+2)\ln x\;dx$
22. $\int (1-4x)\sin(x+1)\;dx$
23. $\int (2x-3)\cos(x+2)\;dx$
24. $\int x\cdot e^{2x-1}\;dx$
25. $\int \dfrac{x-2}{e^{x}}\;dx$
26. $\int \dfrac{2+x}{2^{x}}\;dx$
27. $\int (1-x)\sin 5x\;dx$
28. $\int 3x\cos(x-2)\,dx$
29. $\int (1-x)\ln(2x-1)\,dx$
30. $\int x\ln(3x+5)\;dx$
31. $\int \arcsin 7x\,dx$
32. $\int \arccos(x+1)\;dx$
33. $\int \mathrm{arctg}(x+1)\,dx$
34. $\int x\cdot 2^{1-4x}\;dx$
35. $\int \dfrac{2x-1}{3^{x}}\;dx$
36. $\int \dfrac{x+1}{5^{x}}\;dx$
37. $\int (2x+3)\sin(1-x)\,dx$
38. $\int (1-x)\cos(2-3x)\,dx$

39. $\int x \cdot 2^{3x+4} dx$

40. $\int x \cdot e^{1-2x} dx$

41. $\int \arccos 2x \, dx$

42. $\int (1-3x)\cos 3x \, dx$

43. $\int \ln(1-4x) dx$

44. $\int \mathrm{arcctg} 5x \, dx$

45. $\int \arcsin(x+1) \, dx$

46. $\int \arccos(x-1) \, dx$

47. $\int x \mathrm{arctg} 3x \, dx$

48. $\int (2x+1)\sin 2x \, dx$

49. $\int \ln(x-3) \, dx$

50. $\int \mathrm{arctg}(x+3) \, dx$

51. $\int \frac{2x+1}{2^x} dx$

52. $\int \frac{x}{e^x} dx$

53. $\int (x+1)\ln(x+1) dx$

54. $\int \arccos(2x+1) dx$

55. $\int x \cdot e^{1-5x} dx$

56. $\int 4x \cdot 5^{1-2x} dx$

57. $\int \arcsin 2x \, dx$

58. $\int \mathrm{arctg}(2x+1) \, dx$

59. $\int (3x-1)\cos x \, dx$

60. $\int 3x \ln(x+1) \, dx$

61. $\int x \mathrm{arctg} x \, dx$

62. $\int 2x \sin 3x \, dx$

63. $\int (1-x)\sin x \cos x \, dx$

64. $\int x \cdot e^{1-x} \, dx$

65. $\int \frac{x+1}{2^x} dx$

66. $\int (x+2) \cdot 3^{-\frac{x}{2}} \, dx$

67. $\int \frac{1-x}{e^x} dx$

68. $\int \frac{2x-1}{e^x} dx$

69. $\int (3-2x)\cos 5x \, dx$

70. $\int (2-x)\cos x \, dx$

71. $\int \arcsin 3x \, dx$

72. $\int (x-1) \cdot 4^{1-x} dx$

73. $\int \ln(3x-1) \, dx$

74. $\int (x+4)\mathrm{arctg} x \, dx$

75. $\int (1-5x)\sin(2x+1) \, dx$

76. $\int (2-x)\ln x \, dx$

77. $\int (2x-1) \cdot 2^{-x} dx$

78. $\int (1-x)\ln 5x \, dx$

79. $\int \ln(1-3x) \, dx$

80. $\int \arcsin(x+2) \, dx$

Задание 5.

Найти интеграл от выражений, содержащих квадратный трехчлен.

1. $\int \frac{2x-3}{x^2-6x+25}dx$

2. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$

3. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$

4. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$

5. $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

6. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$

7. $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

8. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$

9. $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx$

10. $\int \frac{2x+2}{2x^2+x+1}dx$

11. $\int \frac{x+1}{x^2-10x+26}dx$

12. $\int \frac{5x-1}{x^2+6x+18}dx$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

14. $\int \frac{4x-1}{4x^2+2x+3}dx$

15. $\int \frac{2x-1}{4x^2+4x+5}dx$

16. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$

17. $\int \frac{x}{2x^2-4x+10}dx$

18. $\int \frac{2x}{6x-10-x^2}dx$

19. $\int \frac{x+1}{x^2-6x+15}dx$

20. $\int \frac{2x+1}{15x-7-3x^2}dx$

21. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

22. $\int \frac{1-x}{5x^2-4x+1}dx$

23. $\int \frac{x+3}{x^2-14x+50}dx$

24. $\int \frac{2x+3}{x^2+14x+48}dx$

25. $\int \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+6x-10}}dx$

26. $\int \frac{x+1}{x^2+14x+53}dx$

27. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{-x^2+4x-10}}\,dx$

28. $\int \frac{1-x}{x^2+8x+17}\,dx$

29. $\int \frac{2-x}{9x^2-6x+2}\,dx$

30. $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+29}\,dx$

31. $\int \frac{x}{\sqrt{9x^2-6x+5}}\,dx$

32. $\int \frac{4x-1}{x^2+12x+37}\,dx$

33. $\int \frac{1-x}{x^2-12x+40}\,dx$

34. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-10x+29}}\,dx$

35. $\int \frac{x+2}{x^2-4x+20}\,dx$

36. $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+4x-5}}\,dx$

37. $\int \frac{5x-1}{-10+2x-x^2}\,dx$

38. $\int \frac{x+1}{\sqrt{-5+4x-x^2}}\,dx$

39. $\int \frac{4x-2}{x^2+x+1}\,dx$

40. $\int \frac{x+3}{x^2-3x+3}\,dx$

41. $\int \frac{5x-1}{x^2-2x+2}\,dx$

42. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

43. $\int \frac{5x+1}{4x^2+4x+10}\,dx$

44. $\int \frac{x+1}{\sqrt{-5+2x-x^2}}\,dx$

45. $\int \frac{x+1}{2x^2-x+1}\,dx$

46. $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-6x+13}}\,dx$

47. $\int \frac{1-x}{x^2+3x+3}\,dx$

48. $\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$

49. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+17}}\,dx$

50. $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$

51. $\int \frac{x+3}{9x^2-6x+5}\,dx$

52. $\int \frac{2x+1}{x^2+3x+4}\,dx$

53. $\int \frac{x-2}{2x^2-x+1}\,dx$

54. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-10x+26}}\,dx$

55. $\int \frac{x+2}{x^2-3x+4}\,dx$

56. $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+8}\,dx$

57. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-8-x^2}}\,dx$

58. $\int \frac{2x+2}{x^2+16x+65}\,dx$

59. $\int \frac{x}{4x^2-12x+10}\,dx$

60. $\int \frac{x-1}{25x^2-10x+2}\,dx$

61. $\int \frac{2x+1}{x^2-8x+20}\,dx$

62. $\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+17}}\,dx$

63. $\int \frac{2x-5}{2x-17-x^2}\,dx$

64. $\int \frac{x+3}{16x^2-8x+10}\,dx$

65. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+13}}\,dx$

66. $\int \frac{2-x}{x^2-2x+2}\,dx$

67. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

68. $\int \frac{3x-1}{x^2-8x+20}\,dx$

69. $\int \frac{2x+2}{x^2+x+3}\,dx$

70. $\int \frac{x-1}{2x^2-4x+1}\,dx$

71. $\int \frac{5x}{x^2+10x+26}\,dx$

72. $\int \frac{2-x}{9x^2-6x+5}\,dx$

73. $\int \frac{4x}{x^2+8x+25}\,dx$

74. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5x+1}}\,dx$

75. $\int \frac{1-2x}{x^2+5x+1}\,dx$

76. $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+3}\,dx$

77. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+37}\,dx$

78. $\int \frac{3x+1}{3x^2-6x+4}\,dx$

79. $\int \frac{1-x}{x^2+5x+1}\,dx$

80. $\int \frac{x-3}{x^2-10x+29}\,dx$

Задание 6.

Найти интеграл от рациональной дроби, предварительно разложив ее на сумму простейших дробей.

1. $\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+4x+4)}dx$

2. $\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$

3. $\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

4. $\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+4)}dx$

5. $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$

6. $\int \frac{x+7}{x^3-2x^2+2x}dx$

7. $\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x^2+1)}dx$

8. $\int \frac{x^3+x}{x^4-4x^2+4}dx$

9. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$

10. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x^2+9)}dx$

11. $\int \frac{x+3}{(x^2+2)(x^2-2x+1)}dx$

12. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x^2+4x+4)(x^2+4)}dx$

13. $\int \frac{x^2-3x+1}{(x-4)(x^2-5x+6)}dx$

14. $\int \frac{x^2+x-3}{(x^2+x+1)(x-1)}dx$

15. $\int \frac{x^2+x+1}{x^4-81}dx$

16. $\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+4x^2}dx$

17. $\int \frac{x^2-x+5}{x^3+x^2}dx$

18. $\int \frac{2x-1}{x^3+x^2+4x+4}dx$

19. $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+1)(x-1)}dx$

20. $\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-4x}dx$

21. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3)(x-1)}dx$

22. $\int \frac{x^2}{(x^2+x+3)(x+1)}dx$

23. $\int \frac{x^2-4x+10}{x^3-5x^2-x+5}dx$

24. $\int \frac{x}{(x^2+6x+9)(x^2+3)}dx$

25. $\int \frac{x+3}{x^3+4x}\,dx$

26. $\int \frac{x}{(x^4+2x^2+1)(x-1)}\,dx$

27. $\int \frac{x^2-4x}{(x^2+5)(x-2)}\,dx$

28. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2+4)(x^2-1)}\,dx$

29. $\int \frac{x}{(x^2+x+5)(x+2)}\,dx$

30. $\int \frac{4x^2-1}{x^4-625}\,dx$

31. $\int \frac{2x+1}{x^4-4x^3+4x^2}\,dx$

32. $\int \frac{x^2-3}{x^4+6x^2+8}\,dx$

33. $\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2-4x+4)}\,dx$

34. $\int \frac{x+2}{(x^3+3)(x-1)}\,dx$

35. $\int \frac{3x^2+4}{x^4-81}\,dx$

36. $\int \frac{1}{(x^4+2x^2+1)(x-1)}\,dx$

37. $\int \frac{x^2+x}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$

38. $\int \frac{10x-1}{(x+4)(x^2+x+4)}\,dx$

39. $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$

40. $\int \frac{x+1}{x^3+8}\,dx$

41. $\int \frac{x^2+x}{(x^2-x+1)(x-1)}\,dx$

42. $\int \frac{2x^2-4x+3}{(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$

43. $\int \frac{x}{x^4-16}\,dx$

44. $\int \frac{x^3+x-3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

45. $\int \frac{x}{(x^2-4)(x^2+3)}\,dx$

46. $\int \frac{x-2}{(x^2-3x-4)(x^2+1)}\,dx$

47. $\int \frac{2x}{(x^2+9)(x^2-25)}\,dx$

48. $\int \frac{x^2+3}{x^4-8x^2+16}\,dx$

49. $\int \frac{x}{(x^2+x+2)(x^2-1)}\,dx$

50. $\int \frac{x+4}{x(x^4+6x^2+8)}\,dx$

51. $\int \frac{x+1}{(x^2-2x+1)(x^2+3)}\,dx$

52. $\int \frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}\,dx$

53. $\int \frac{x^2-2}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx$

54. $\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+x+5)}\,dx$

55. $\int \frac{x-1}{(x^2-4)(x^2+1)}\,dx$

56. $\int \frac{x-3}{x^3-4x}\,dx$

57. $\int \frac{x^2-4x+3}{x^3-9x}\,dx$

58. $\int \frac{2x-1}{x^3+2x-3}\,dx$

59. $\int \frac{1}{(x^2+4)(x^2-5x+6)}\,dx$

60. $\int \frac{3x^2-x+2}{(x^2-2x+1)(x^2+4)}\,dx$

61. $\int \frac{x^2+4x}{x^4-16}\,dx$

62. $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x}\,dx$

63. $\int \frac{x^3-4x+2}{(x^2-6x+9)(x^2+1)}\,dx$

64. $\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+3)}\,dx$

65. $\int \frac{x+3}{x^3+x^2-9x-9}\,dx$

66. $\int \frac{x^2-x+3}{(x^2+x+1)(x-4)}\,dx$

67. $\int \frac{2x-3}{x^3-x^2+2x}\,dx$

68. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+9)(x-3)}\,dx$

69. $\int \frac{x+1}{x^4-5x^2+6}\,dx$

70. $\int \frac{4x-3}{(x^2-6x+9)(x^2+1)}\,dx$

71. $\int \frac{2x^2-x+3}{x^3-4x}\,dx$

72. $\int \frac{3x^2-x+5}{(x^2+2)^2}\,dx$

73. $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3-16x}\,dx$

74. $\int \frac{x+1}{(x+4)(x^2-3x-4)}\,dx$

75. $\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

76. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2+3)(x-2)}\,dx$

77. $\int \frac{x+3}{(x-2x+1)(x^2+4)}\,dx$

78. $\int \frac{x+2}{x^3-6x^2+5x}\,dx$

79. $\int \frac{x}{x^4-3x^2-4}\,dx$

80. $\int \frac{x+1}{x(x^4+2x^2+1)}\,dx$

Задание 7.

Найти интеграл.

1. $\int \cos^7 x\,dx$
2. $\int \cos^4 0{,}5x\,dx$
3. $\int \sin^5 3x\,dx$
4. $\int \cos^3 4x\,dx$
5. $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$
6. $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$
7. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$
8. $\int \sin^3 \frac{3}{5}x\,dx$
9. $\int \cos^2 2x \sin 2x\,dx$
10. $\int \cos^3 0{,}5x\,dx$
11. $\int \sin^2 4x \cos 2x\,dx$
12. $\int \cos^{1/3} x \sin^3 x\,dx$
13. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$
14. $\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos^2 \frac{x}{3}\,dx$
15. $\int \cos^5 2x\,dx$
16. $\int \sin^{1/7} x \cos^3 x\,dx$
17. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\,dx$
18. $\int \sin^5 \frac{x}{2}\,dx$
19. $\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx$
20. $\int \sin^5 (1-x)\,dx$
21. $\int \sin^6 \frac{x}{2}\,dx$
22. $\int \frac{dx}{\sin^6 x/2}$
23. $\int \frac{dx}{\sin^4 2x \cos^2 2x}$
24. $\int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^3 \frac{x}{2}\,dx$
25. $\int \frac{\mathrm{ctg}x}{\cos^4 x}\,dx$
26. $\int \frac{dx}{\cos^4 3x}$
27. $\int \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}\,dx$
28. $\int \sin^4 \frac{x}{4}\,dx$
29. $\int \cos^5 (2-x)\,dx$
30. $\int \sin^{3/4} x \cos^5 x\,dx$
31. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$
32. $\int \frac{dx}{\cos^6 5x}$
33. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cos^4 3x}$
34. $\int \frac{dx}{\sin^6 x/2}$
35. $\int \sin^6 (1-x)\,dx$
36. $\int \sin^2 (1-x) \cos^2 (1-x)\,dx$

37. $\int \sin^3 3x \cos^2 3x\,dx$

38. $\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx$

39. $\int \cos^3 \frac{x}{3} \sin^2 \frac{x}{3}\,dx$

40. $\int \frac{\sqrt[4]{ctg^3 3x}}{\cos^2 3x}\,dx$

41. $\int \frac{dx}{\cos^4 x/4}$

42. $\int \frac{\cos^2 x/2}{\sin^6 x/2}\,dx$

43. $\int \sin^2(x+2)\cos^2(x+2)\,dx$

44. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}\,dx$

45. $\int \frac{dx}{\sin^6(1-x)}$

46. $\int \frac{dx}{\sin^4(1-x)}$

47. $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4}\,dx$

48. $\int \cos^7 \frac{x}{3}\,dx$

49. $\int \cos^6(1-x)\,dx$

50. $\int \cos^5(1-2x)\,dx$

51. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cos^4 5x}$

52. $\int \frac{dx}{\cos^6 2x}$

53. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x\,dx$

54. $\int \sin^7 5x\,dx$

55. $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin^6 3x}\,dx$

56. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$

57. $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$

58. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$

59. $\int \cos^5 0{,}5x\,dx$

60. $\int \cos^6 2x\,dx$

61. $\int \frac{dx}{\sin^2 0{,}5x \cos^4 0{,}5x}$

62. $\int \frac{dx}{\sin^6 2x}$

63. $\int \sin^6 0{,}5x\,dx$

64. $\int \sin^2 2x \cos^3 2x\,dx$

65. $\int \sin^5 3x\,dx$

62. $\int \sin^5(1-x)\,dx$

67. $\int \cos^5 2x dx$

68. $\int \sin^4 2x \cos^4 2x\,dx$

69. $\int \frac{tgx}{\sin^4 x}\,dx$

70. $\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 2x}}{\cos^2 2x}\,dx$

71. $\int \sqrt[4]{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^4 x\,dx$

72. $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x} \cdot \cos^5 2x\,dx$

73. $\int \frac{\cos^2 4x}{\sin^6 4x}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{\cos^6 0{,}5x}$

75. $\int \frac{dx}{\sin^4 5x}$

76. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cos^4 5x}$

77. $\int \sin^3(1-x)\cos^3(1-x)\,dx$

78. $\int \sin^5 0{,}5x \cos^2 0{,}5x\,dx$

79. $\int \operatorname{tg}^4 2x\,dx$

80. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$

Задание 8.

Найти интеграл, применяя тригонометрическую подстановку.

1. $\int \frac{1}{(1+\cos x)^2} dx$

2. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$

3. $\int \frac{1}{2\sin x \cos x + 1} dx$

4. $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} dx$

5. $\int \frac{1}{2\sin x + 3\cos x} dx$

6. $\int \frac{1}{3-\sin^2 x} dx$

7. $\int \frac{1-2\cos x}{\sin x - 2} dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$

9. $\int \frac{1}{3-2\sin x + \cos x} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-81}}{x} dx$

11. $\int \frac{1+\cos x}{3-\sin x} dx$

12. $\int \frac{2}{\sin^2 x - \sin 2x} dx$

13. $\int \frac{5}{1-\sin x} dx$

14. $\int \frac{3}{2\sin x + \cos x} dx$

15. $\int \frac{3}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$

16. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} dx$

17. $\int \frac{3}{1-5\cos^2 x} dx$

18. $\int \frac{2}{\sin^2 x - 5\cos^2 x} dx$

19. $\int \frac{1-\cos x}{2\sin x + 1} dx$

20. $\int \frac{\sin x}{5+\sin x} dx$

21. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx$

22. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$

23. $\int \frac{5}{\cos^2 x + \sin 2x} dx$

24. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

25. $\int \frac{2}{1-\sin x} dx$

26. $\int \frac{5}{1+\cos^2 x} dx$

27. $\int \frac{3}{2+\sin^2 x} dx$

28. $\int \frac{4}{2\sin x - 5\cos x} dx$

29. $\int \frac{3}{2-\sin x + \cos x} dx$

30. $\int \frac{\sqrt{x^2-100}}{x} dx$

31. $\int \frac{2}{1-\sin x + \cos x} dx$

32. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\sin 2x - 3} dx$

33. $\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 4\sin 2x - 3}$

34. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin 2x + 5\cos^2 x}$

35. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2}$

36. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

37. $\int \frac{3}{\sin x + \mathrm{tg} x} dx$

38. $\int \frac{4}{3\cos x + 2\sin x} dx$

39. $\int \frac{dx}{(3\mathrm{tg} x + 5)\sin 2x}$

40. $\int \frac{4}{1+5\sin^2 x} dx$

41. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg} x + \sin x}$

42. $\int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x}$

43. $\int \frac{\cos^2 x}{3\cos 2x - 4} dx$

44. $\int \frac{\sin^2 x}{3\cos 2x - 4} dx$

45. $\int \frac{2\mathrm{tg} x - 5}{(4\cos x - \sin x)^2} dx$

46. $\int \frac{\sin x + 1}{1 - 2\cos x} dx$

47. $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x - 1}$

48. $\int \frac{\sqrt{x^2-144}}{x} dx$

49. $\int \frac{\sqrt{x^2-121}}{x} dx$

50. $\int \frac{dx}{3\sin x - 7\cos x}$

51. $\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{4+3\cos 2x} dx$

52. $\int \frac{dx}{5\sin x - 2\cos x}$

53. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - 3\cos^2 x}$

54. $\int \frac{2\cos x - 1}{\sin x + 3\cos x} dx$

55. $\int \frac{2}{5-3\cos x}dx$

56. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$

57. $\int \frac{5}{\sin x+2\cos x}dx$

58. $\int \frac{2}{1-2\cos^2 x}dx$

59. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

60. $\int \frac{\sin x}{\cos x-2\sin x}dx$

61. $\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x}dx$

62. $\int \frac{1}{\sin^2 x-\sin 2x+4\cos^2 x}dx$

63. $\int \frac{3}{2+\cos^2 x}dx$

64. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$

65. $\int \frac{\cos x-1}{3-\sin x}dx$

66. $\int \frac{3}{1-\sin x+2\cos x}dx$

67. $\int \frac{2\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

68. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

69. $\int \frac{\mathrm{tg}x}{4\cos^2 x-\sin^2 x}dx$

70. $\int \frac{1}{5\sin x+3\cos x}dx$

71. $\int \frac{1}{5\cos x-\sin x}dx$

72. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

73. $\int \frac{3}{\cos^2 x+2\sin^2 x-1}dx$

74. $\int \frac{2}{\sin^2 x-3\cos^2 x+3}dx$

75. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

76. $\int \frac{3}{2-\cos x}dx$

77. $\int \frac{1}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$

78. $\int \frac{1}{1+2\cos^2 x}dx$

79. $\int \frac{1}{\cos^2 x-\sin 2x}dx$

80. $\int \frac{1-\sin x}{2\cos x+1}dx$

Задание 9.

Найти интеграл.

1. $\int\sqrt{\dfrac{1-x}{x-2}}\,dx$

2. $\int\dfrac{x}{1+\sqrt{2x-1}}\,dx$

3. $\int\sqrt{\dfrac{3-2x}{x-3}}\,dx$

4. $\int\dfrac{\sqrt{x-2}-10}{\sqrt{x-2}+7}\,dx$

5. $\int\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\,dx$

6. $\int\sqrt{\dfrac{6-x}{x-7}}\,dx$

7. $\int\dfrac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}\,dx$

8. $\int\dfrac{2}{\sqrt[3]{x+2}+1}\,dx$

9. $\int\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-2}\,dx$

11. $\int\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\,dx$

12. $\int\dfrac{5}{\sqrt{2x+1}+2}\,dx$

13. $\int\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx$

14. $\int\dfrac{3}{\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{x-2}}\,dx$

15. $\int\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

16. $\int\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$

17. $\int\dfrac{\sqrt{x+3}}{x}\,dx$

18. $\int\dfrac{3}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

19. $\int\dfrac{\sqrt{x+5}}{x}\,dx$

20. $\int\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+1}\,dx$

21. $\int\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}-5}\,dx$

22. $\int\dfrac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx$

23. $\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

24. $\int\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-10}\,dx$

25. $\int\dfrac{\sqrt{x-2}}{4+\sqrt[3]{x-2}}\,dx$

26. $\int\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx$

27. $\int \sqrt{\frac{5-x}{x+1}}\, dx$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{9-\sqrt[3]{2x-1}}\, dx$

29. $\int \frac{x}{1-\sqrt{x-2}}\, dx$

30. $\int \frac{3}{\sqrt{3-2x}+5}\, dx$

31. $\int \frac{2}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\sqrt{x}}\, dx$

32. $\int \frac{\sqrt{1-2x}+1}{\sqrt{1-2x}-1}\, dx$

33. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x+4}+1} dx$

34. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}-10}{\sqrt{x+1}+2}\, dx$

35. $\int \frac{\sqrt[3]{2x-5}+1}{3+\sqrt{2x-5}}\, dx$

36. $\int \sqrt{\frac{1-x}{x+5}}\, dx$

37. $\int \frac{3x}{1+\sqrt{x+1}}\, dx$

38. $\int \frac{\sqrt{1-5x}}{x}\, dx$

39. $\int \frac{4}{\sqrt{2-3x}-3}\, dx$

40. $\int \frac{2x}{4+\sqrt{x+1}} dx$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[4]{x+1}+1}\, dx$

42. $\int \frac{2}{(x-1)\sqrt{x+2}}\, dx$

43. $\int \frac{\sqrt{2-x}+1}{5-\sqrt{2-x}}\, dx$

44. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$

45. $\int \frac{1}{x\sqrt{5x-1}}\, dx$

46. $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\, dx$

47. $\int \frac{x}{1-\sqrt{3x+2}}\, dx$

48. $\int \frac{x+2+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}-1}\, dx$

49. $\int \frac{x+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-3}\, dx$

50. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\, dx$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}+\sqrt{(1-x)^3}}\, dx$

52. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[4]{3x+1}}\, dx$

53. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}\, dx$

54. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\, dx$

55. $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}\,dx$

56. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$

57. $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt[3]{x+2}+1}\,dx$

58. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}-10}{\sqrt{x+1}+7}\,dx$

59. $\int \sqrt{\frac{1-2x}{2x+3}}\,dx$

60. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-1}\,dx$

61. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x-1}+1}\,dx$

62. $\int \frac{1-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-3}\,dx$

63. $\int \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt[3]{x}}\,dx$

64. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

65. $\int \frac{3}{\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

66. $\int \frac{2}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

67. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}+1}\,dx$

68. $\int \frac{5}{x+\sqrt[3]{x+1}}$

69. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{x-1}}\,dx$

70. $\int \frac{5}{(x-4)\sqrt{x+1}}\,dx$

71. $\int \frac{2}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

72. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

73. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

74. $\int \frac{\sqrt[3]{5x-1}}{1+\sqrt[3]{5x-1}}\,dx$

75. $\int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}\,dx$

76. $\int \frac{5}{\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{1-x}}\,dx$

77. $\int \frac{5-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}\,dx$

78. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1-\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

79. $\int \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+2}\,dx$

80. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt[4]{1-2x}}\,dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
6. Объясните суть непосредственного интегрирования.
7. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
8. Найдите интеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двумя способами.
9. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
10. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
11. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить методом интегрирования по частям.
12. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на неприводимые множители.
13. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей (в случае различных действительных корней знаменателя).
14. Изложите правило разложения правильной рациональней дроби на сумму простейших дробей (в случае кратных действительных корней знаменателя).
15. Сформулируйте правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда знаменатель имеет некратную пару комплексно-сопряженных корней.
16. Сформулируйте правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда знаменатель имеет кратную пару комплексно-сопряженных корней.
17. Объяснить методы нахождения неопределенных коэффициентов.
18. В чем суть универсальной тригонометрической подстановки?
19. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

20. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^{m} x dx, \quad \int ctg^{n} x dx$.
21. Методы нахождения интегралов вида $\int stc^{2m} x dx, \quad \int \cos ec^{2n} x dx$.
22. С помощью какой подстановки рационализируется интегралы
$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}} \right) dx\,?$$
23. С помощью какой подстановки рационализируются интегралы
$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}} \right] dx\,?$$
24. С помощью каких подстановок находится интеграл $\int x^{m}(a+bx^{n})^{p} dx$?
25. Какие тригонометрические подстановки используются для $\int R(x, \sqrt{ax^{2}+bx+c})dx$?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1. М.: Высш. шк., 1973. 495 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Т.1. М.: 1971. 615 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. М.: 1978. 575 с.
4. Бугров Я.С., Никольский СМ. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980. 464 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1980. 365 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высш. шк., 1966. 463 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1018 с.
8. Кронштейн И.И., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1959. 350 с.
9. Двайт ГД. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1983. 248 с.
10. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1976. 470 с.
11. MATCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде WINDOWS 95: Пер. с англ. М.: Информационно-издательский дом "Филин", 1996. 712 с.
12. Очков В.Ф. MATHCAD 7 Pro для студентов и инженеров. М.: Компьютер Пресс, 1998. 384 с.