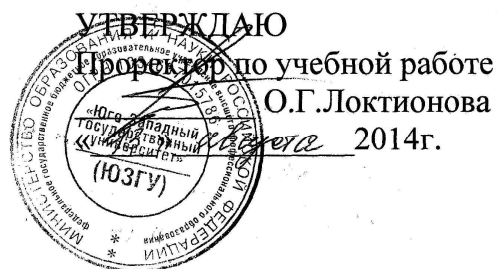


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 04.02.2021 18:59:27  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012cfa476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

**МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики



# Векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Индивидуальные задания и методические указания  
по выполнению модуля

Курск 2014

УДК 514.12

Составитель А.В.Бойков

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент  
кафедры высшей математики *Дмитриев В.И.*

**Векторная алгебра. Аналитическая геометрия:** индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.В.Бойков. Курск, 2014. 30 с. табл. 3. Ил.: 2, Библиогр.: с.30.

Методические указания отражают требования образовательных стандартов 3-го поколения подготовки бакалавров и специалистов по техническим специальностям. Работа содержит теоретические индивидуальные упражнения, практические индивидуальные задания, контрольные вопросы, указания к использованию ЭВМ, рекомендуемую литературу по темам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия”.

Предназначены для студентов технических специальностей

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать \_\_\_\_\_ . Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л.1,75. Уч.-изд. л.1,58. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Индивидуальные задания.....	5
1.1. Теоретические упражнения.....	5
1.2. Практические задания.....	8
1.2.1. Задание 1.....	8
1.2.2. Задание 2.....	9
1.2.3. Задание 3.....	10
1.2.4. Задание 4.....	10
1.2.5. Задание 5.....	11
1.2.6. Задание 6.....	11
1.2.7. Задание 7.....	11
1.2.8. Задание 8.....	11
1.2.9. Задание 9.....	11
1.2.10. Задание 10.....	15
1.2.11. Задание 11.....	23
1.2.12. Задание 12.....	24
2. Использование ЭВМ.....	24
3. Контрольные вопросы.....	28
Список рекомендуемой литературы.....	30

## ВВЕДЕНИЕ

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студента. В Юго-Западном государственном университете самостоятельная работа студентов организуется на основе положения о балльно-рейтинговой системе оценки качества освоения основных образовательных программ и имеет модульную структуру. Опыт нашего и других вузов показывает, что эта система активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса математики.

Предлагаемые методические указания являются пособием к одному из модулей этой системы. Методические указания посвящены разделам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия” (до тем кривые и поверхности второго порядка) и содержат индивидуальные задания (теоретическое упражнение и практические задания), контрольные вопросы, рекомендуемую литературу, указания к использованию ЭВМ (Mathcad) при выполнении заданий модуля. Указания по выполнению заданий модуля приводятся в пособии [7].

Предусмотрены три уровня сложности заданий модуля. Студенту предлагается выполнить одно теоретическое упражнение и некоторое количество практических заданий, в зависимости от выбранного им (или преподавателем) уровня сложности (или направления подготовки):

первый уровень - №№ 3-5, 8, 9(а,б), 11(а,б);

второй уровень - №№ 1-9, 11(а-е,и-л);

третий уровень - №№ 1-12.

# 1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбор индивидуального задания к модулю-2 осуществляется по номеру варианта студента  $n$ . При этом используются параметр  $P_k$  – остаток от деления номера варианта  $n$  на число  $k$ , и выражение  $[n/k]$  – целая часть от деления  $n$  на  $k$ . Например, если  $n = 7$ , то  $P_2=1$ ,  $P_3=1$ ,  $P_4=3$ ,  $P_5=2$ ,  $P_6=1$ ,  $P_7=0$ ,  $P_8=7$ ,  $P_9=7$  и т.д. Если  $n = 7$  и  $k = 4$ , то  $[n/k] = [7/4] = 1$ .

## 1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

Выполнить теоретическое упражнение номер  $m$ , где  $m = P_{30} + 1$ .

1. Сформулировать и доказать свойства проекции вектора на ось.
2. Записать и доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек “начала” и “конца” вектора.
3. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
4. Записать и доказать формулы, выражающие координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, через координаты концов этого отрезка.
5. Записать и доказать формулы для длины и направляющих косинусов вектора, выражающие эти величины через декартовы координаты вектора.
6. Доказать свойства скалярного произведения векторов.
7. Записать и доказать формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их декартовы координаты.
8. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
9. Записать и доказать формулы для косинуса угла между двумя векторами в пространствах  $V_2$  и  $V_3$ .
10. Доказать свойство  $[\vec{a}; \vec{b}] = -[\vec{b}; \vec{a}]$  векторного произведения векторов.
11. Используя свойства векторного произведения, доказать формулу, выражающую векторное произведение векторов через их декартовы координаты.

12. Записать и доказать формулы для вычисления площади параллелограмма и треугольника с помощью векторного произведения векторов.
13. Записать и доказать формулу, выражающую смешанное произведение векторов через их декартовы координаты.
14. Доказать свойства смешанного произведения векторов.
15. Записать и доказать формулы для вычисления объема параллелепипеда и треугольной пирамиды с помощью смешанного произведения векторов.
16. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие компланарности векторов пространства  $V_3$ .
17. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет уравнение  $Ax + By + C = 0$ , где  $\vec{N} = (A; B)$  нормальный вектор этой прямой.
18. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0)$  с угловым коэффициентом  $k$ .
19. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет параметрические уравнения
- $$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$
- где  $(x_0; y_0)$  – произвольная точка прямой, а вектор  $\vec{q} = (m; n)$  – направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
20. Доказать, что любая прямая в пространстве имеет параметрические уравнения
- $$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$
- где  $(x_0; y_0; z_0)$ , – произвольная точка прямой, а вектор  $\vec{q} = (k; m; n)$  – направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
21. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными общими уравнениями. Доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.

22. Вывести формулу для тангенса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными уравнениями с угловым коэффициентом. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
23. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
24. Записать и доказать формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве.
25. Записать и доказать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
26. Доказать, что любая плоскость в пространстве имеет уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $\vec{N} = (A; B; C)$  нормальный вектор этой плоскости.
27. Вывести уравнение плоскости проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.
28. Вывести формулу для косинуса угла между двумя плоскостями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
29. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми в пространстве, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
30. Вывести формулу для синуса угла между прямой и плоскостью. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

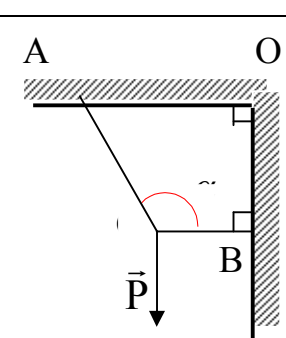
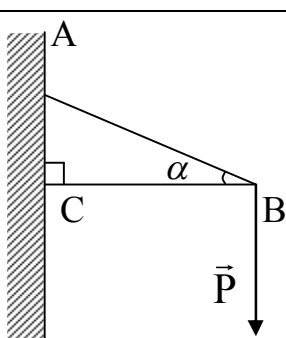
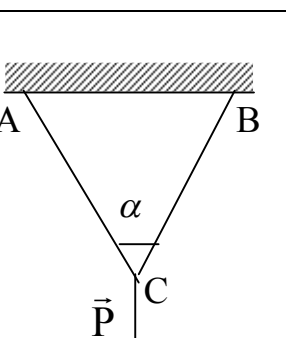
## 1.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

### 1.2.1. ЗАДАНИЕ 1

Решить задачу номер  $m$  из табл.1.1, где  $m = P_4 + 1$ .

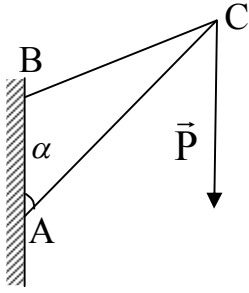
Таблица 1.1

Индивидуальные условия к заданию 1

№ задачи $m$	Условие задачи	Угол $\alpha$
1	2	3
1	 <p>К двум тросам подвешен груз <math> \vec{P}  = 100</math> кГ. Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол ACB равен <math>\alpha</math>, угол OBC равен <math>90^\circ</math>.</p>	$\alpha = 90^\circ + 2^\circ \cdot ([n/4] + 1)$
2	 <p>Груз весом <math> \vec{P}  = 100</math> кГ поддерживается двумя стержнями AB и CB. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол ACB равен <math>90^\circ</math>, угол ABC равен <math>\alpha</math>.</p>	$\alpha = 3^\circ \cdot ([n/4] + 1)$
3	 <p>К двум тросам AC и BC, одинаковой длины, подвешен груз весом <math> \vec{P}  = 100</math> кГ. Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол ACB равен <math>\alpha</math>.</p>	$\alpha = 6^\circ \cdot ([n/4] + 1)$



Продолжение табл. 1.1

1	2	3
4	 <p>Груз весом <math> \vec{P}  = 100</math> кГ поддерживается двумя стержнями AC и BC. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол BAC равен <math>\alpha</math>, и угол ABC равен <math>120^\circ</math></p>	$\alpha = 2^\circ \cdot ([n/4] + 1)$

1.2.2. ЗАДАНИЕ 2

Решить задачу номер  $m$  из табл.1.2, где  $m = P_5 + 1$

Таблица 1.2

Индивидуальные условия к заданию 2

№ задачи $m$	Условие задачи
1	2
1	Точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\vec{AB} = (-1; P_3; 0)$ , $\vec{AC} = (1; P_5; -2)$ , $O(2; -1; P_7)$
2	Точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки O, если $A(P_3; -1; -2)$ , $C(-3; P_5; 1)$ , $\vec{AB} = (4; 0; P_7)$

Продолжение табл. 1.2

1	2
3	В параллелограмме ABCD точка K – середина стороны CD. Найти координаты точки A, если $\overrightarrow{AK} = (1; -5; P_3)$ , $\overrightarrow{BD} = (-2; P_7; -3)$ , $B(P_5; 0; 7)$
4	В параллелограмме ABCD точка O – точка пересечения диагоналей. Найти координаты точки K, – середины стороны AD, если $B(P_3; P_5; P_7)$ , $C(-2; 1; -3)$ , $O(4; 0; -1)$
5	В трапеции ABCD стороны AB и CD - основания, Точка N( $P_7; P_3; P_5$ ) – середина стороны BC. Найти координаты точки A, если $\overrightarrow{AB} = (8; 12; -4)$ , $\overrightarrow{CD} = (-2; -3; 1)$ , $\overrightarrow{AD} = (5; 0; 7)$

### 1.2.3. ЗАДАНИЕ 3

Даны три силы:  $\vec{F}_1 = P_2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{F}_2 = 3 \cdot \vec{i} + P_3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$  и  $\vec{F}_3 = -2 \cdot \vec{j} + P_5 \cdot \vec{k}$ . Найти равнодействующую  $\vec{R}$  сил  $(-\vec{F}_1), \vec{F}_2, \vec{F}_3$  и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $M_0(0; 1; P_7)$  в положение  $M(P_6; 0; 1)$ .

### 1.2.4. ЗАДАНИЕ 4

Сила  $\vec{F} = (P_3; P_5; -2)$  приложена к точке  $C(P_4; -1; P_7)$ . Определить величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

### 1.2.5. ЗАДАНИЕ 5

Найти ненулевой вектор ортогональный векторам  $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -3)$  и  $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$ . Сделайте проверку.

### 1.2.6. ЗАДАНИЕ 6

Даны точки:  $A(-1; -P_3; 2)$ ,  $B(P_5; 2; 0)$  и  $C(P_5 \cdot (P_3 + 2); P_3^2 + 3 \cdot P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$ . Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

### 1.2.7. ЗАДАНИЕ 7

Даны точки:  $A(1; -P_2; -1)$ ,  $B(1 - P_3; 0; 1)$ ,  $C(-1; 1; P_5 - 2)$ ,  $D(P_2; P_4; P_8)$ . Образуют ли эти точки пирамиду? Если да, то чему равен объём пирамиды? Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

### 1.2.8. ЗАДАНИЕ 8

Даны точки  $A(-1 - P_7; P_5 - 2)$  и  $B(P_5 - 2; P_5 + 4)$ . Найти:  
а) точку  $C(x_1; y_1)$  – середину отрезка  $AB$ ;  
б) точку  $D(x_2; y_2)$ , которая делит отрезок  $AB$  в отношении  $(P_9 + 1) : (9 - P_9)$ .

### 1.2.9. ЗАДАНИЕ 9

На плоскости даны точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ . Координаты точек взять в табл. 1.3. Сделайте чертёж треугольника  $ABC$  и найдите:

- а) длину и уравнение стороны ВС (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);  
 б) косинус угла А и угол А (в градусах);  
 в) уравнение прямой, проходящей через точку А параллельно стороне ВС;  
 г) высоту, проведенную к стороне ВС, и её уравнение;  
 д) уравнение медианы, проведенной к стороне ВС;  
 е) уравнение биссектрисы угла А.

Таблица 1.3

Координаты точек А, В, С к заданию 9

n	x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>3</sub>
1	2	3	4	5	6	7
1	14	-1	-1	7	-7	-1
2	-1	-1	2	-1	2	3
3	-7	-2	7	-2	2	10
4	-1	-1	4	1	-5	-1
5	-5	-2	3	13	-5	7
6	-1	6	-1	-2	5	-2
7	8	-6	8	1	-4	10
8	-5	-6	11	6	0	6
9	-2	1	2	-2	6	1
10	-3	-11	5	4	-3	10
11	5	-7	5	7	-7	2
12	9	-4	-3	5	-3	1
13	8	7	-1	7	-7	-1
14	15	9	8	9	-1	-3
15	1	-9	1	2	-11	7
16	4	2	-5	14	-14	2
17	-3	-1	12	7	-9	7
18	9	9	-5	9	0	-3
19	-9	3	-9	-5	6	-5
20	-7	-3	-7	1	5	6
21	6	-6	-2	9	-2	0
22	-2	8	3	-4	8	8
23	-1	-1	8	11	-8	-1
24	-7	12	-7	1	5	-4

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
25	1	3	7	3	4	7
26	-6	13	-14	7	-6	-8
27	2	10	-7	-2	7	-2
28	-5	-1	-1	-1	4	11
29	-5	12	7	-4	7	12
30	8	-3	14	5	-1	-3
31	-1	2	5	-6	11	2
32	0	0	12	-9	0	7
33	8	-7	13	5	-3	-7
34	12	7	-9	7	-3	-1
35	-3	-8	-8	4	-3	16
36	-7	2	5	-7	5	7
37	5	9	-4	9	-4	-3
38	-1	7	-7	-1	8	7
39	8	11	-8	-1	-1	-1
40	5	-4	-7	12	-7	1
41	-3	-1	1	-1	1	2
42	-7	-1	14	-1	-1	7
43	-5	9	0	-3	9	9
44	14	-9	-1	-1	14	7
45	5	6	-7	-3	-7	1
46	-2	9	-2	0	6	-6
47	11	6	0	6	-5	-6
48	-4	10	8	-6	8	1
49	-3	-3	5	3	13	-3
50	-2	7	2	7	7	-5
51	-6	-8	-6	13	-14	7
52	7	-5	-2	7	2	7
53	-1	-2	3	1	-1	4
54	-5	7	-5	-2	3	13
55	-3	-6	9	-1	-3	8
56	1	1	-11	1	-11	-8
57	12	-9	0	7	0	0
58	1	2	-11	7	1	-9
59	-3	-2	5	13	13	-2
60	5	4	-3	10	-3	-11
61	5	7	-7	2	5	-7
62	14	5	-1	-3	8	-3
63	13	5	-3	-7	8	-7
64	-4	-6	8	-6	8	-1

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
65	-1	-3	15	9	8	9
66	-1	7	-7	-1	14	-1
67	-2	0	6	-6	-2	9
68	7	-2	1	-10	7	-18
69	0	-3	9	9	-5	9
70	-3	5	-3	1	9	-4
71	7	1	-7	-5	1	-5
72	0	6	-5	-6	11	6
73	8	1	-4	10	8	-6
74	-8	-6	4	-1	-8	4
75	-3	8	-3	-6	9	-1
76	-11	7	1	-9	1	2
77	-14	7	-6	-8	-6	13
78	-1	-3	8	-3	14	5
79	-6	10	-6	-8	6	1
80	-9	7	-3	-1	12	7
81	0	7	0	0	12	-9
82	-7	1	5	6	-7	-3
83	9	-1	-3	8	-3	-6
84	-7	11	9	-1	9	11
85	-3	-7	8	-7	13	5
86	-7	-1	8	7	-1	7
87	2	7	7	-5	-2	7
88	-3	-5	-3	7	-11	1
89	-3	10	-3	-11	5	4
90	4	11	-5	-1	-1	-1
91	3	11	3	-4	11	-4
92	3	13	-5	7	-5	-2
93	-8	-1	-1	-1	8	11
94	2	-5	5	-1	2	3
95	-7	1	5	-4	-7	12
96	7	-2	2	10	-7	-2
97	-13	4	-1	-1	11	4
98	-3	1	9	-4	-3	5
99	-2	1	3	1	3	13
100	8	9	-1	-3	15	9

## 1.2.10. ЗАДАНИЕ 10

Решить задачу номер  $n$ .

1. На прямой  $2x + y + 11 = 0$  найти точку, равноудалённую от двух данных точек  $A(1;1)$ ,  $B(3,0)$ .
2. Найти координаты точки, симметричной точке  $(2,-4)$  относительно прямой  $4x + 3y + 1 = 0$ .
3. Найти уравнение диагонали параллелограмма, проходящей через точку пересечения его сторон  $x + y - 1 = 0$  и  $y + 1 = 0$ , если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке  $P(-1;0)$ .
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2;6)$  и образующей с осями координат треугольник, который находится во второй четверти и имеет площадь 3 кв.ед.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-1,2)$  так, что середина её отрезка, заключённого между параллельными прямыми  $x + 2y + 1 = 0$  и  $x + 2y - 3 = 0$  лежит на прямой  $x - y - 6 = 0$ .
6. Даны уравнения двух сторон треугольника  $4x - 5y + 9 = 0$  и  $x + 4y - 3 = 0$ . Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке  $(3;1)$ .
7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон  $2x - y + 4 = 0$  и  $2x - y + 10 = 0$  и уравнение одной из его диагоналей  $x + y + 2 = 0$ .
8. Составить уравнения сторон треугольника, если точки  $A(-5;5)$ ,  $B(3;1)$  - две его вершины, а  $D(2;5)$  - точка пересечения его высот.
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата  $x + 3y - 7 = 0$  и точка пересечения его диагоналей  $P(0;-1)$ . Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Даны уравнения одной из сторон ромба  $x - 3y + 10 = 0$  и одной из его диагоналей  $x + 4y - 4 = 0$ . Диагонали ромба пересекаются в точке  $P(0;1)$ . Найти уравнения трех остальных сторон ромба.
11. Уравнения двух сторон параллелограмма  $x + 2y + 2 = 0$  и  $x + y - 4 = 0$ , а уравнение одной из его диагоналей  $x - 2 = 0$ . Найти координаты вершин.

12. Даны вершины  $A(-3;-2)$  и  $B(8;-4)$  трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Известно, что диагонали трапеции равны и точка пересечения диагоналей  $O(0,2)$ . Найти координаты вершин  $C$  и  $D$  этой трапеции.
13. Даны вершины  $A(2;-2)$  и  $B(3;-1)$  и точка  $P(1;0)$  пересечения медиан треугольника. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину  $C$ .
14. Даны уравнения двух высот треугольника  $3x + 2y - 34 = 0$  и  $x + y - 1 = 0$  и одна из вершин  $A(6;5)$ . Составить уравнения сторон.
15. Даны уравнения медиан  $2x - 11y + 28 = 0$ ,  $5x + 7y - 22 = 0$  и одна из вершин  $(-2;-2)$  треугольника. Составить уравнения сторон.
16. Две стороны треугольника заданы уравнениями  $2x + y - 1 = 0$  и  $x - 3y + 14 = 0$ , а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение третьей стороны.
17. Даны уравнения сторон треугольника:  $(AB) 7x - 2y + 32 = 0$ ;  $(AC) x + y + 2 = 0$ ;  $(BC) 4x + y - 1 = 0$ . Найти точку пересечения его высот.
18. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение гипотенузы  $3x - y + 11 = 0$  и  $C(4;3)$  – вершина прямого угла.
19. В равнобедренном треугольнике известны: уравнение основания  $5x + 3y - 53 = 0$ , уравнение одной из боковых сторон  $x + 4y - 14 = 0$  и точка на второй боковой стороне  $M(3;7)$ . Найдите уравнение второй боковой стороны.
20. Одна из сторон квадрата лежит на прямой  $x - 5y + 32 = 0$ , а одна из вершин находится в точке  $M(2;1)$ . Найдите уравнения остальных сторон квадрата.
21. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой  $4x - 7y + 28 = 0$ , концы которого лежат на осях координат.
22. Точки  $K(1;3)$  и  $L(-1;1)$  являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки  $P(3;0)$  и  $Q(-3;5)$  лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
23. Даны стороны треугольника:  $(AC) 2x - 15y - 55 = 0$ ;  $(AB) 4x - 3y + 25 = 0$ ;  $(BC) 14x + 3y - 61 = 0$ . Составить урав-



- нение прямой, проходящей через вершину  $C$  и через точку на стороне  $AB$ , делящую ее (считая от вершины  $A$ ) в отношении  $1:4$ .
24. Точки  $B(7;1)$  и  $D(9;-3)$  являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин.
  25. В треугольнике известны уравнения высоты  $x + y - 3 = 0$  и медианы  $11x - 4y + 10 = 0$ , проведенных из различных вершин. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $(8;9)$ .
  26. Написать уравнение сторон треугольника, зная одну его вершину  $(6;3)$ , уравнения высоты  $11x - 9y + 75 = 0$  и биссектрисы  $11x - 13y + 79 = 0$ , проведенных из одной вершины.
  27. Точка  $A(2;0)$  является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой  $x + y - 1 = 0$ . Составить уравнения двух других сторон.
  28. Длина стороны ромба с острым углом  $60^\circ$  равна  $2$ . Диагонали ромба пересекаются в точке  $M(1;2)$ , причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнение сторон ромба.
  29. Точка  $A(1;2)$  является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка  $B(3;-1)$  - серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой  $4x - 3y + 10 = 0$ . Составить уравнения остальных сторон трапеции.
  30. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $(9;2)$ , уравнения биссектрисы  $x + y - 5 = 0$  и медианы  $x - y = 0$ , проведенных из различных вершин.
  31. Даны координаты двух вершин треугольника  $A(-1;3)$ ,  $B(2;5)$  и ортоцентр - точка  $H(1;4)$ . Найти координаты третьей вершины треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).
  32. Точка  $H(-3;2)$  является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых  $2x - y = 0$  и  $x + y - 3 = 0$ . Составить уравнение третьей стороны.
  33. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку  $A(-1;3)$  и касающейся прямых  $7x + y = 0$  и  $x - y + 8 = 0$ .
  34. Окружность проходит через точки  $M(1;0)$  и  $N(2;1)$ . Найдите центр этой окружности, если известно, что он лежит на прямой  $5x - y - 4 = 0$ .

35. Точки  $B(1;2)$  и  $C(3;-6)$  симметричны относительно некоторой прямой. Составить уравнение этой прямой.
36. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке  $K(-2;4)$ . Составить уравнение диагонали, не проходящей через точку пересечения сторон  $4x - y + 4 = 0$  и  $4x + 3y + 20 = 0$ .
37. Площадь прямоугольного треугольника, катетами которого являются оси координат, равна 8. Составить уравнение гипотенузы, если известно, что она проходит через точку  $A(-4;8)$ .
38. Составить уравнение прямой  $L_1$ , параллельной прямой  $L_2 : 2x + 3y - 23 = 0$ , если середина отрезка прямой  $L_3: 5x+2y+3 = 0$ , заключенного между параллельными прямыми  $L_1$  и  $L_2$  лежит на прямой  $L_4: 6x - y + 24 = 0$ .
39. Составить уравнение стороны треугольника, в котором известны точка пересечения медиан  $M(-1;7)$  и уравнения двух других сторон  $x + 4y - 37 = 0$ ,  $2x - y + 16 = 0$ .
40. Даны две стороны  $x - y + 6 = 0$  и  $x - y + 10 = 0$  и диагональ  $3x + y - 10 = 0$  ромба. Найти вершины ромба.
41. В треугольнике известны две вершины  $A(-2;9)$ ,  $B(2;-3)$  и точка пересечения высот  $O(2;7)$ . Написать уравнения сторон.
42. Точка  $A(3;-2)$  является вершиной квадрата, а точка  $M(1;1)$  – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.
43. Даны уравнения одной из сторон ромба  $x + y - 39 = 0$  и одной из его диагоналей  $x - 3y + 11 = 0$ . Найти уравнения остальных сторон ромба, если его центр - точка  $N(-2;3)$ .
44. Найти координаты вершин параллелограмма, в котором известны две стороны  $2x - 5y - 5 = 0$  и  $2x + 5y - 15 = 0$  и диагональ  $6x + 5y - 35 = 0$ .
45. Найти координаты точек  $C$  и  $D$  четырехугольника  $ABCD$ , в котором отрезки  $AB$  и  $DC$  параллельны,  $BD$  и  $AC$  перпендикулярны друг другу и заданы вершины  $A(9;-1)$ ,  $B(5;5)$ .
46. Даны две вершины  $(3;-1)$ ,  $(1;4)$  и центр тяжести  $(0;2)$  треугольника. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.
47. Даны уравнения двух высот треугольника  $3x + 4y - 23 = 0$  и  $12x - 5y - 24 = 0$  и одна из его вершин  $A(1;1)$ . Составить уравнения сторон.

48. Написать уравнения сторон треугольника, две медианы которого лежат на прямых  $x + y - 3 = 0$  и  $2x + 3y - 1 = 0$ , а точка  $A(1;1)$  является вершиной треугольника.
49. Две стороны треугольника заданы уравнениями,  $x + 3y - 21 = 0$  и  $7x + y + 13 = 0$ , а середина третьей стороны – точка  $(2;3)$ . Составить уравнение третьей стороны.
50. Даны уравнения сторон треугольника:  $(MN) 3x - 5y + 17 = 0$ ,  $(NP) 8x + 6y - 32 = 0$ ,  $(MP) 5x + 11y + 9 = 0$ . Найти ортоцентр треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).
51. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой  $2x + y - 2 = 0$ , а точка  $C(3;-1)$  является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна  $9/4$ . Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты.
52. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой  $x + 2y - 2 = 0$ , а одна из боковых сторон - на прямой  $y + 2x - 1 = 0$ . Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что её расстояние от точки пересечения данных прямых равно  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .
53. Составить уравнения сторон квадрата, в котором одна из вершин – точка  $A(8;7)$  и одна из сторон лежит на прямой  $5x + 2y + 4 = 0$ .
54. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой  $2x + y - 8 = 0$ , концы которого лежат на окружности  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ .
55. Точки  $M(3;7)$  и  $N(2;3)$  являются серединами оснований равнобедренной трапеции. Точки  $K(1;7)$  и  $P(4;6,5)$  лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
56. Даны стороны треугольника:  $(AB) 4x + 3y - 10 = 0$ ;  $(BC) 3x + 2y - 8 = 0$ ;  $(AC) 8x + 5y - 18 = 0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $C$  и делящей сторону  $AB$  в отношении  $2:3$  (считая от вершины  $A$ ).
57. Противоположными вершинами квадрата являются точки  $A(-5;-3)$  и  $C(3;17)$ . Найти координаты двух других вершин.
58. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(2;7)$ , уравнения медианы  $9x + y + 4 = 0$  и высоты  $x + 5y - 11 = 0$ , проведенных из различных вершин.

59. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(-5;4)$ , уравнения высоты  $6x + y - 61 = 0$  и биссектрисы  $4x - 3y + 7 = 0$ .
60. Точка  $M(6;4)$  является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой  $3x - y + 2 = 0$ . Найти уравнения остальных сторон треугольника.
61. Длина стороны ромба с тупым углом  $120^\circ$  равна  $6\sqrt{2}$ . Меньшая диагональ параллельна биссектрисе 2 и 4 координатных углов. Диагонали пересекаются в точке  $P(-4;6)$ . Составьте уравнения сторон ромба.
62. Точка  $P(8;1)$  является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка  $N(2;3)$  – серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой  $4x + 3y + 1 = 0$ . Составить уравнения сторон.
63. Составьте уравнения трех сторон треугольника, в котором медиана  $3x + 2y - 6 = 0$  и биссектриса  $x - y = 0$  проведены не из вершины  $A(4;0)$ , а из двух других вершин.
64. Даны стороны треугольника:  $4x - 3y + 26 = 0$  (AB);  $x + 2y + 1 = 0$  (AC);  $7x + 3y - 37 = 0$  (BC). Найти точку пересечения медианы, проведенной из вершины B и высоты, проходящей через вершину C.
65. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку  $A(-1;8)$  и касающейся прямых  $x + 10 = 0$  и  $4x - 3y + 10 = 0$ .
66. Точка K отстоит на одинаковых расстояниях от точек  $P(7;8)$  и  $Q(1;2)$ . Найти координаты точки K, если известно, что она лежит на прямой  $4x - 5y + 27 = 0$ .
67. Найти координаты точки N, симметричной точке M относительно прямой  $x + y - 5 = 0$ . Точка M отстоит от прямой на расстоянии вдвое большем, чем точка  $K(-2;7)$  и находится с ней по одну сторону от прямой, причем отрезок KM перпендикулярен прямой.
68. В параллелограмме две стороны заданы уравнениями  $x - 5y + 7 = 0$  и  $5x - 3y - 9 = 0$ . Составить уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения этих сторон, если известно, что диагонали пересекаются в точке  $M(2;4)$ .
69. Найти координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC относительно центра описанной около треугольника ABC окружности, если  $A(9;-1)$ ,  $B(5;1)$ ,  $C(0;-5)$ .

70. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой  $x + 3y - 13 = 0$  и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 6.
71. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1;2)$  так, что отрезок этой прямой, заключённый между прямыми  $3x + y + 2 = 0$  и  $4x + y - 1 = 0$ , в точке  $A$  делится пополам.
72. Центр тяжести треугольника – точка  $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ . Уравнения двух его сторон  $4x + y + 14 = 0$  и  $x - 6y - 9 = 0$ . Составить уравнение третьей стороны.
73. Известны уравнения двух сторон ромба  $7x - 9y - 39 = 0$  и  $3x + 11y - 91 = 0$  и одной из его диагоналей  $5x + y - 13 = 0$ . Вычислить координаты вершин ромба.
74. Составить уравнение третьей стороны треугольника, если известны уравнения двух его сторон  $6x - y - 11 = 0$  и  $4x + 5y + 13 = 0$  и ортоцентр – точка  $H(-1;2)$ .
75. Написать уравнения сторон квадрата, центр которого – точка  $O(1;-3)$ , а одна из вершин – точка  $A(-4;7)$ .
76. Написать уравнения сторон ромба, если известны диагональ  $x + y - 2 = 0$ , точка её пересечения с другой диагональю  $P(0;2)$  и одна из сторон  $3x - y - 10 = 0$ .
77. Вычислить координаты вершин параллелограмма, в котором две стороны лежат на прямых  $2x - 5y - 5 = 0$  и  $2x + 5y - 15 = 0$ , а одна из диагоналей на прямой  $6x + 5y - 35 = 0$ .
78. Диагонали трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) перпендикулярны друг другу и заданы вершины  $A(4;-1)$  и  $B(13;6)$ . Найти координаты вершин  $C$  и  $D$  трапеции.
79. Составить уравнения сторон треугольника, в котором даны две вершины  $A(-7;6)$  и  $B(7;4)$  и точка пересечения отрезков, соединяющих эти вершины с серединами противоположных сторон  $\left(\frac{5}{3}; 4\right)$ .
80. Даны уравнения двух высот треугольника  $x - 5y + 16 = 0$  и  $9x + 7y + 14 = 0$  и одна из его вершин  $M(-5;-3)$ . Написать уравнения сторон треугольника.

81. Даны уравнения двух медиан  $x - 3y + 2 = 0$  и  $2x + 2y - 21 = 0$  треугольника и одна из вершин  $A(5; -1)$ . Найти уравнения сторон треугольника.
82. Середина одной из сторон треугольника – точка  $M(0; 3)$ . Две другие стороны лежат на прямых  $x - 9y + 52 = 0$  и  $x + y - 8 = 0$ . Составить уравнение третьей стороны.
83. Найти точку пересечения высот треугольника, стороны которого лежат на прямых  $6x + y - 23 = 0$ ,  $9x - 4y - 7 = 0$ ,  $3x - 5y - 17 = 0$ .
84. Точка  $C(6; 1)$  – вершина прямого угла в треугольнике, а гипотенуза лежит на прямой  $2x - 3y + 5 = 0$ . Написать уравнения катетов, один из которых лежит на прямой, содержащей точку  $K(-4; -25)$ .
85. Точки  $A(1; 2)$  и  $B(3; 0)$  – вершины равнобедренного треугольника  $ABC$ , углы  $A$  и  $B$  при основании равны  $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Найти координаты вершины  $C$ , зная, что она лежит по ту же сторону от прямой  $AB$ , что и точка  $M(2; 3)$ .
86. Составить уравнения сторон квадрата по известному уравнению одной из сторон  $x + 8y - 17 = 0$  и одной из вершин  $A(2; 9)$ .
87. Даны уравнения сторон квадрата  $4x + y - 9 = 0$  и  $4x + y + 36 = 0$ . Составить уравнения двух других его сторон при условии, что точка  $A(6; 2)$  лежит на стороне этого квадрата.
88. Точки  $M(5; -1)$  и  $N(-3; 7)$  являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки  $P(-1; -2)$  и  $Q(4; 6)$  лежат на боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
89. Даны стороны треугольника  $9x - 2y - 51 = 0$  ( $AC$ ),  $4x + 3y + 24 = 0$  ( $AB$ ),  $x + 2y + 1 = 0$  ( $BC$ ). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  и точку  $K$  на стороне  $AB$ , делящую её в отношении  $3:7$  (считая от вершины  $B$ ).
90. Точки  $A(9; 8)$  и  $D(-1; 4)$  являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты других вершин.
91. Известны одна из вершин треугольника  $A(4; -5)$ , уравнения высоты  $7x - y + 17 = 0$  и медианы  $2x - 11y - 13 = 0$ . Составить уравнения сторон.
92. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину  $A(4; 1)$ , уравнения высоты  $2x - y + 11 = 0$  и биссектрисы  $7x - 8y + 25 = 0$ , проведенных из одной вершины.

93. Стороны треугольника заданы уравнениями:  $4x - 3y = 0$  (AB);  $3x - 4y = 0$  (BC);  $5x + 12y - 10 = 0$  (AC). Найти радиус вписанной окружности.
94. Известны уравнение одной из сторон правильного треугольника  $5x - y + 1 = 0$  и одна из вершин  $A(5; -3)$ . Составить уравнения двух других сторон треугольника.
95. Диагонали ромба пересекаются в точке  $K(3; -7)$ . Большая диагональ образует с осью ординат угол  $45^\circ$ , а со сторонами угол  $30^\circ$ . Длина стороны равна  $4\sqrt{2}$ . Составить уравнения сторон ромба.
96. Точка  $M(6; 1)$  является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка  $N\left(\frac{7}{4}; 1\right)$  – серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой  $x + 4y + 7 = 0$ . Составить уравнения остальных сторон трапеции.
97. Из одной вершины треугольника проведена биссектриса  $3x + y - 1 = 0$ , из другой – медиана  $11x - 5y - 25 = 0$ , а третья вершина – точка  $A(-3; -2)$ . Составить уравнения стороны треугольника.
98. Ортоцентр треугольника ABC – точка  $O(-1; 5)$ . Составить уравнения сторон треугольника, если известны вершины  $A(2; 1), B(2; 11)$ .
99. Даны уравнения сторон треугольника  $x + 2y + 1 = 0$ ,  $2x - y - 2 = 0$ ,  $2x + y + 2 = 0$ . Найти точку пересечения высот.
100. Найти координаты центра окружности, проходящей через точку  $A(-3; 5)$  и касающейся прямых  $x - 3y - 2 = 0$  и  $13x - 7y + 102 = 0$ .

### 1.2.11. ЗАДАНИЕ 11

В пространстве даны точки  $A(-2; -1 - P_7; 1)$ ,  $B(3; P_5; -1)$ ,  $C(5; 3 - P_3; 1)$ ,  $D(1; -1 - P_7; 0)$ . Сделать чертёж пирамиды ABCD и найти :

- длину и уравнение ребра AB;
- уравнение грани ABC;
- высоту, проведенную из вершины D, и её уравнение;
- проекцию вершины D на плоскость ABC;

- д) уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру АВ;
- е) уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC;
- ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC;
- з) уравнение проекции ребра AD на грань ABC;
- и) угол между ребрами АВ и AD;
- к) угол между ребром AD и гранью ABC;
- л) угол между гранями ABC и ABD.

### 1.2.12. ЗАДАНИЕ 12

Дана точка  $M(1;0;-2)$ . Найти:

а) точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричную точке M относительно точки  $S(-1-P_7; P_5; 3-P_3)$ ;

б) точку  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ , симметричную точке M относительно прямой

$$\frac{x+1}{-1-P_7} = \frac{y-2}{P_5} = \frac{z-1}{3-P_3};$$

в) точку  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , симметричную точке M относительно плоскости

$$(-1-P_7) \cdot x + P_5 \cdot y + (3-P_3) \cdot z + 1 = 0.$$


## 2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

Задания раздела 1 можно выполнять с помощью ЭВМ, используя, например, пакет Mathcad, а также совместимые с ним программные разработки кафедры. Однако ЭВМ дает готовые ответы и не отражает процесс вычислений. Поэтому в целях усвоения темы, предполагается подробное "ручное" решение заданий и применение ЭВМ ограничивается проверкой правильности ответов.

Рассмотрим решение некоторых задач с помощью пакета Mathcad.



## 1. Вызов шаблона вектора и его ввод

Из окна матричной и векторной палитры вызвать панель ввода матрицы. Для этого щелкнуть (левой кнопкой мыши) по кнопке .

Указать размеры  $n, 1$  матрицы в соответствующих полях открывшегося окна и щелкнуть по кнопке ОК ( $n$  - размерность вектора, число строк;  $1$  - число столбцов).

Набрать матрицу-вектор, передвигаясь с помощью кнопок со стрелками. После набора последнего числа нажать клавишу ПРОБЕЛ.

## 2. Операции над векторами

Операции над векторами можно выполнять используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора и клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

### ПРИМЕР 2.1

Введём векторы  $\vec{a} = (1; -3; 2)$ ,  $\vec{b} = (-3; 0; 1)$  и число  $\lambda = -1.5$ :

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda := -1.5.$$

Найдем сумму  $\vec{x}_1$  и разность  $\vec{x}_2$  векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , произведение  $\vec{x}_3$  вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$ , скалярное ( $x_4$ ) и векторное ( $\vec{x}_5$ ) произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\vec{x}_1 := \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{x}_2 := \vec{a} - \vec{b}; \quad \vec{x}_3 := \lambda \cdot \vec{a}; \quad x_4 := \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \vec{x}_5 := \vec{a} \times \vec{b};$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad x_4 = -1; \quad \vec{x}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

## 3. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора

Длину и направляющие косинусы вектора можно найти используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора, палитры греческих букв, клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

## ПРИМЕР 2.2

Введём вектор  $\vec{a}$  и его координаты:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x := -2; \quad y := 1; \quad z := 2.$$

Найдём длину вектора  $\vec{a}$  и его направляющие косинусы:

$$\Delta := |\vec{a}|; \quad \cos \alpha := \frac{x}{\Delta}; \quad \cos \beta := \frac{y}{\Delta}; \quad \cos \gamma := \frac{z}{\Delta};$$

$$\Delta = 3; \quad \cos \alpha = -0.667; \quad \cos \beta = 0.333; \quad \cos \gamma = 0.667.$$

Направляющие косинусы вектора можно найти иначе, - умножая вектор  $\vec{a}$  на число  $\frac{1}{\Delta}$ , т.е. найдя орт  $\vec{e}_{\vec{a}}$  вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{e}_{\vec{a}} := \frac{1}{\Delta} \cdot \vec{a}; \quad \vec{e}_{\vec{a}} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.333 \\ 0.667 \end{bmatrix}.$$

## 4. Нахождение угла между векторами

Рассмотрим следующий пример.

### ПРИМЕР 2.3

Введём векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Найдём косинус угла  $\varphi$  и угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\cos \varphi := \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad \varphi := \arccos(\cos \varphi); \quad \Phi := \varphi \cdot \frac{180}{\pi};$$

$$\cos \varphi = 0.467; \quad \varphi = 1.085 \text{ (рад.)}; \quad \Phi = 62.188^\circ.$$

Чтобы вызвать функцию `arccos` нужно нажать клавишу  $f(x)$  на панели инструментов и в открывшемся списке выбрать `acos`.

## 5. Составление уравнений

Составление уравнений рассмотрим на примере нахождения уравнения плоскости проходящей через три заданные точки, не принадлежащие одной прямой.

Пусть заданы точки  $A_1(2;-1;3)$ ,  $A_2(1;1;1)$ ,  $A_3(-4;0;3)$ . Их радиус векторы  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  имеют такие же координаты. Пусть  $\vec{r}_{12} = \overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\vec{r}_{13} = \overrightarrow{A_1A_3}$ . Тогда, вводя векторы

$$\vec{r}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_3 := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_{12} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad \vec{r}_{13} := \vec{r}_3 - \vec{r}_1,$$

получим

$$\vec{r}_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \vec{r}_{13} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что точки  $A_1, A_2, A_3$  не принадлежат одной прямой. Действительно

$$\frac{-6}{-1} = 6, \quad \frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{0}{-2} = 0,$$

и, следовательно, векторы  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{r}_{13}$  неколлинеарные.

Уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель с помощью ЭВМ. Для этого нужно набрать

$$A(x, y, z) := \begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f(x, y, z) := |A(x, y, z)|;$$

$$f(x, y, z) \rightarrow 2 \cdot x - 25 + 11 \cdot z + 12 \cdot y.$$

Итак, плоскость  $A_1A_2A_3$  имеет уравнение

$$2x + 12y + 11z - 25 = 0.$$

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.
2. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах).
3. Определения векторного пространства, базиса и размерности векторного пространства, координат вектора в базисе. Операции над векторами в координатной форме. Сформулировать теоремы о базисах в пространствах  $V_1, V_2, V_3$ .
4. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек "начала" и "конца" вектора.
5. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.
6. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.
7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
8. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.
9. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
10. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.
11. Понятие об уравнении линии на плоскости.

12. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
13. Уравнение прямой "с угловым коэффициентом" (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями "с угловым коэффициентом").
14. Направляющий вектор прямой. Канонические и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).
15. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.
16. Понятие уравнения поверхности в пространстве.
17. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
18. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.
19. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениями).
20. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).
21. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009. – 224с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004. – 224с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 224с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш. шк., 2000. –304с.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях: Ч1. / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Пospelова.- М.: Издательство физико-математической литературы, 2009. –288с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Джангар, Большая Медведица, 2001. –863с.
7. Бредихина О.А., Шеставина С.В. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М2 / ЮЗГУ. Курск. 2013. –18с.
8. Плис А. И. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие для студ. вуз. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.