8-й класс

8.1 Сколько существует натуральных чисел X таких, что остаток от деления 2023 на X равен 263?

Решение:

$2023 = X \cdot q + 263$, $263 < X$

$2023 - 263 = X \cdot q$

$1760 = X \cdot q$

$1760 = 2^5 \cdot 5^1 \cdot 11^1$

Всего делителей $n = (5+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 6\cdot 2\cdot 2 = 24.$

Делители: $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ldots,\ \ 220 = \frac{1760}{8},\ 352 = \frac{1760}{5},\ 440 = \frac{1760}{4},\ 880 = \frac{1760}{2}$, 1760.

X может быть равен: 352, 440, 880, 1760.

Ответ: 4.

8.2 Света и Миша стартуют в одном направлении из диаметрально противоположных точек круговой трассы. Скорость Миши в $\frac{9}{8}$ раза больше, чем скорость Светы. Сколько полных кругов пробежит Света, когда Миша догонит ее в первый раз?

Решение:

Пусть V – скорость Светы, тогда $\frac{9}{8}V$ – скорость Миши. Пусть Света пробегает n полных кругов до встречи с Мишей, тогда Миша пробегает $n + \frac{1}{2}$ кругов. Время до встречи

$$t = \frac{n}{V} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{9}{8}V}$$

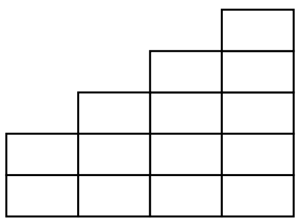
$$9n = 8(n + \frac{1}{2})$$

$$9n = 8n + 4$$

$$n = 4.$$

Ответ: 4.

8.3 Сколькими способами можно расположить 4 ладьи на нарисованном фрагменте шахматной доски так, чтобы никакие две из них не били друг друга? (то есть никакие две ладьи не могут быть в одной строке или в одном столбце)



Решение:

Фрагмент доски содержит 4 столбца. Ладьи не должны бить друг друга. Значит, в каждом столбце ровно 1 ладья. В первый столбец можно поставить ладью 2 способами, так как первый столбец содержит 2 строки.

Поставим первую ладью в некоторую строку. В эту же строку поставить следующую ладью нельзя. Следовательно, расположить вторую ладью во 2-ом столбце можно 2 способами. Расположить ладью в 3-ий столбец можно тоже 2 способами, так как две строки для расположения уже недоступны. Расположить ладью в 4-ый столбец можно так же 2 способами, так как уже три строки недоступны (это строки в которых находятся 1, 2 и 3 ладья). Таким образом, общее количество способов равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ответ: 16.

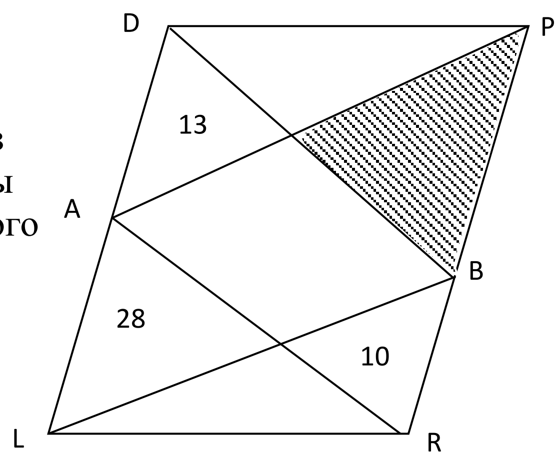
8.4 Тренер Семен Иванович составляет расписание еженедельных тренировок спортсмена. Спортсмен будет тренироваться три раза в неделю и не может тренироваться два дня подряд. Сколькими способами он может составить такое расписание.

Решение:

1) пн, ср, пт;
2) пн, ср, сб;
3) пн, чт, сб;
4) вт, чт, сб;
5) вт, чт, вс;
6) вт, пт, вс;
7) ср, пт, вс.

Ответ: 7

8.5 LDPR – параллелограмм. На противоположных сторонах отмечены точки A и B (см.рис.). Площади некоторых из образовавшихся треугольников отмечены на рисунке. Найти площадь выделенного треугольника.



Решение:

$$S_{LBD} = \frac{1}{2} DL \cdot h = \frac{1}{2} S_{LDPR}$$

$$S_{PAR} = \frac{1}{2} PR \cdot h = \frac{1}{2} S_{LDPR}$$

h – высота параллелограмма, опущенная на LD (или на PR).

Итак, $S_{LBD} = S_{PAR} = \frac{1}{2} S_{LDPR}$.

Пусть S – площадь общей части треугольников LBD и PAR, x – площадь выделенного треугольника.
Тогда
$$13 + 28 + S = x + 10 + S$$
$$x = 13 + 28 - 10$$
$$x = 31.$$
Ответ: 31.

9-й класс

9.1 Сумма цифр двузначного числа равна 11, а сумма квадратов его цифр больше самого числа на 5. Найдите все такие числа.

Решение:

Пусть $10x+y$ − искомое двузначное число (x, y − его цифры). По условию задачи

$$\begin{cases} x+y=11 \\ x^2+y^2-(10x+y)=5 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений (с тем ограничением, что неизвестные x и y − цифры). Например, так: из первого уравнения $y=11-x$, подставим это выражение для y во второе уравнение:

$$x^2+(11-x)^2-10x-(11-x)=5$$

$$2x^2-31x+105=0$$

$$x_1=5,\ x_2=\frac{21}{2}.$$

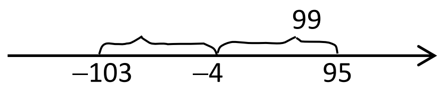
Подходит только $x=5$. Тогда $y=6$.

Ответ: число 56.

9.2 Пусть вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке $x_0=-4$. Известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен 95. Найдите второй корень уравнения

Решение:

На числовой оси корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ расположены симметрично относительно $x_0=-4$. Значит $x_1=95$ – больший корень. Значит, меньший $x_2=-103$.



Ответ: –103.

9.3 Света нарисовала таблицу размером 5×5 и в каждую клетку таблицы записала некоторое число. В центре таблицы Света записала число 5. Оказалось, что суммы чисел расположенных в любом прямоугольнике размера 3×1 или 1×3, одинаковы и равны X. Сумма всех элементов в таблице равна 53. Найти X.

Решение:

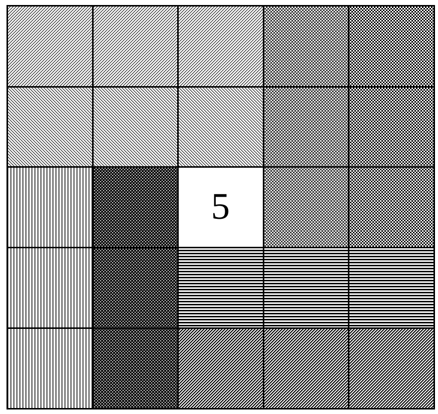
Разделим таблицу на прямоугольники как на рисунке (см.рис.)

Тогда общая сумма чисел в отмеченных прямоугольниках равна $8X$

$$8\cdot X=53-5$$

$$8X=48$$

$$X=6$$



Ответ: 6.

9.4 Выписано 500 подряд идущих натуральных чисел, при этом выписано 2023 цифры. Укажите сумму наибольшего и наименьшего из выписанных чисел.

Решение:

Случай, когда будут выписаны все трехзначные числа (2700 знаков), или четырехзначные, или т.д. не удовлетворяют условию.

Когда выписаны однозначные, все двухзначные, и есть трехзначные

$$\begin{cases} m+180+3S=2023, \\ m+90+S=500 \end{cases}$$

m – количество однозначных, S – количество двухзначных.

$$\begin{cases} m+3S=1843, \\ m+S=410 \end{cases}$$

$m+1230-3m=1843$

$-2m=603$

$m<0$ – не удовлетворяет условию.

Когда среди выписанных чисел есть двухзначные и трехзначные

$$\begin{cases} 2m+3S=2023, \\ m+S=500 \end{cases}$$

$2m+1500-3m=2023$

$-m=477$

$m<0$ – не удовлетворяет условию.

Когда среди выписанных чисел есть трехзначные и четырехзначные

$$\begin{cases} 3m+4S=2023, \\ m+S=500 \end{cases}$$

$3m+8(500-m)=2023$

$m=-23<0$ – не удовлетворяет условию.

Когда среди выписанных чисел есть четырехзначные и пятизначные

$$\begin{cases} 4m+5S=2023, \\ m+S=500 \end{cases}$$

$4m+2500-5m=2023$

$m=477, \quad S=23$

На доске могли быть написаны числа, 9523;…;10000;…;10022.

Когда среди написанных чисел есть пятизначные и шестизначные

$$\begin{cases} 5m+6S=2023, \\ m+S=500 \end{cases}$$

$5m+3000-6m=2023$

$m=977>500$ – не удовлетворяет условию.

Когда среди написанных чисел есть n-значные и $(n+1)$-значные, $n>5$

$$\begin{cases} nm+(n+1)S=2023, \\ m+S=500 \end{cases}$$

$n>5 \Rightarrow m>500$ – не удовлетворяет условию.

$$nm + (n+1)(500 - m) = 2023$$

$$nm + 500n + 500 - m - nm = 2023$$

$$m = 500n - 1523, \quad n > 5$$

$$500n > 2500$$

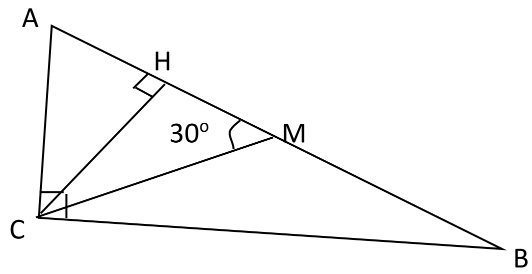
$m = 500n - 1523 > 977$ – не удовлетворяет условию.

Итак, одинаковый вариант последовательности чисел, удовлетворяющий условию 9523,…,10022. Сумма наибольшего и наименьшего среди написанных чисел $9523 + 10022 = 19545$.

Ответ: 19545.

9.5 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 2024, а высота к ней рана 506. Найти меньший угол данного прямоугольного треугольника.

Решение:



Пусть ABC – данный треугольник, $\angle C = 90^o$, $AB = 2024$, CH – высота, $CH = 506$. Проведем медиану CM.

$$CM = \frac{1}{2}AB = 1012.$$

В прямоугольном треугольнике CMH

$$CH = 506 = \frac{1}{2} \cdot 1012 = \frac{1}{2}CM.$$

Следовательно, $\angle CMH = 30^o$

$\angle BMC = 150^o$.

ΔMBC – равнобедренный, т.к. $CM = \frac{1}{2}AB = MB$.

$$\angle MBC = \angle BCM = \frac{180^o - 150^o}{2} = 15^o.$$

Итак: $\angle B = 15^o, \quad \angle A = 75^o$.

Ответ: 15^o.

10 класс

10.1 Коля написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Коля стер самое маленькое число и поделил (в уме) сумму остальных чисел на их произведение. Второй результат оказался в 5 раз больше первого. Какое число стер Коля?

Решение:

Пусть М – стертое число, S – сумма, P – произведение нестертых чисел.

По условию: $\frac{S}{P} = 5 \cdot \frac{S+m}{Pm}$

$5P(S+m) = SPm$

$5S + 5m = Sm \quad 5m = Sm - 5S$

$5m = S(m-5), m-5 > 0, m \geq 6.$

Поскольку $S > m$ (по условию m – наименьшее из чисел, а в сумму S входит хотя бы одно число– больше m), то $5m > (m-5)m$, т.е.

Так как m>0, то $5 > m - 5$; $m < 10$, т.е. $6 \leq m < 10$.

Проверим каждое целое m:

$m = 6 \qquad 5 \cdot 6 = (6-5)S$

$\qquad 30 = S$ – подходит

$m = 7 \qquad 5 \cdot 7 = (7-5)S$

$\qquad 35 = 2S$ – дробное

$m = 8 \qquad 5 \cdot 8 = (8-5)S$

$\qquad 40 = 3S$ – дробное

$m = 8 \qquad 5 \cdot 9 = (9-5)S$

$\qquad 45 = 4S$ – дробное.

Ответ: 6.

10.2 Известно, что $3f(x) + f(-x) = x^2 + 4x$. Найти $f(4)$.

Решение:

Подставим в равенство, данное в условии, последовательно $x = 4$ и $x = -4$, получим:

$$\begin{cases} 3f(4) + f(-4) = 4^2 + 4 \cdot 4 \\ 3f(-4) + f(4) = (-4)^2 + 4 \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3f(4) + f(-4) = 32 \\ 3f(-4) + f(4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-4) = 32 - 3f(4) \\ 3(32 - 3f(4)) + f(4) = 0 \end{cases}$$

$$96 - 9f(4) + f(4) = 0$$

$$-8f(4) = -96$$

$$f(4) = 12$$

Ответ: 12.

10.3 Дан магический квадрат размера 3×3. Во всех клетках квадрата записаны разные числа. Сумма всех чисел, записанных в клетках квадрата, равна 90. Суммы чисел, записанных в клетках каждого столбца, в клетках каждой строки, в клетках каждой диагонали, равны.

Сколько различных числовых значений может принимать элемент, записанный в центре квадрата?

Решение:

Сумма чисел, записанных в клетках каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали равна 30.

Пусть x – число, записанное в центре квадрата. Если к сумме чисел центрального столбца прибавить сумму чисел центральной строки, к этому прибавить суммы чисел, записанных по диагоналям, то полученное число будет на $3x$ больше суммы всех чисел таблицы, то есть

$$30 + 30 + 30 + 30 - 3x = 90$$

$$30 = 3x$$

$$x = 10.$$

Итак, число, записанное в центре квадрата, может принимать только одно значение 10.

Ответ: 1.

10.4 У Глеба 8 друзей, двое из них не ладят друг с другом. Каждый день Глеб приглашает к себе в гости компанию из некоторых друзей (по крайней мере одного человека) так, чтобы компания никогда не повторялась и чтобы двое не ладящих друг с другом не оказались вместе в какой-то день среди приглашенных. Сколько дней Глеб может так делать?

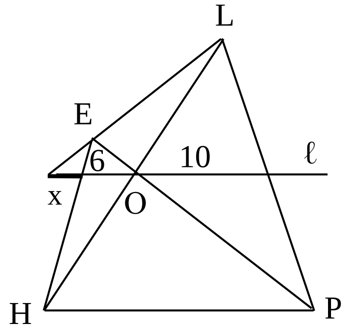
Решение:

Рассмотрим 8-элементное множество друзей Глеба. Каждую компанию приглашенных друзей можно считать подмножеством множества D. Всего непустых подмножеств $2^8 - 1 = 255$. Таким образом, количество способов, которыми может Глеб пригласить компании, равно 255.

Не ладящие друг с другом два друга Глеба входят в 2^6 подмножеств в качестве элементов. Следовательно, искомое число $255 - 64 = 191$.

Ответ: 191.

10.5 HELP – произвольный выпуклый четырехугольник. O – точка пересечения его диагоналей. Через точку O проведена прямая ℓ, параллельная HP. Часть этой прямой, заключенная между боковыми сторонами четырехугольника, делится на отрезки 6 см и 10 см. Чему равен отрезок прямой ℓ вне четырехугольника до пересечения с продолжением третьей стороны.

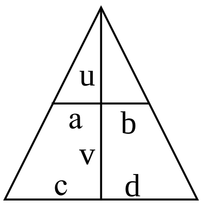


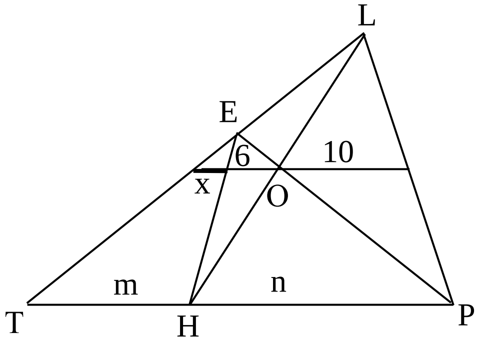
Решение:

1) Предварительные замечания

Воспользовавшись подобием треугольников на рис.1 заключаем:

$$\frac{u+v}{u}=\frac{c}{a}$$
$$\frac{u+v}{u}=\frac{d}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$$





2) Пусть $EL \cap HP = T$

Обозначим $TH = m, \quad HP = n$,

тогда

$$\begin{cases} \dfrac{m}{x}=\dfrac{n}{6} \\ \dfrac{m}{x+6}=\dfrac{n}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{m}{n} \\ \dfrac{x+6}{10}=\dfrac{m}{n} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x}{6}=\frac{x+6}{10}$$

$10x = 6x + 36$

$4x = 36$

$x = 9.$

Ответ: 9.

11 класс

11.1 Существует ли такое натуральное число n, что $n + S(n) = 1980$, где $S(n)$ – сумма цифр натурального числа n. Если число существует, укажите его в ответе, если не существует, поставьте в ответе «0».

Решение:

Такое натуральное число существует – это число 1962.

$$S(1962) = 1 + 9 + 6 + 2 = 18, \qquad 1962 + S(1962) = 1980.$$

Указанное число – это единственное натуральное число, удовлетворяющее уравнению $n + S(n) = 1980$. В этом нетрудно убедится непосредственным перебором, рассматривая поочередно числа 1978, 1979,… Перебор можно закончить на числе 1955. Действительно, сумма цифр любого не более чем трехзначного числа n не превосходит 27, поэтому для любого такого числа n имеем:

$$n + S(n) \leq 999 + 27 = 1026 < 1980.$$

Значит, искомое число должно быть четырехзначным. Среди всех четырехзначных чисел, меньших 1980, наибольшую сумму цифр, равную 26, имеет число 1979. Следовательно, для любого четырехзначного числа n, меньшего 1955, имеем:

$$n + S(n) \leq 1954 + 25 = 1979.$$

Ответ: 1962.

11.2 График функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = -2$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет 23 различных корня. Чему равна сумма всех корней?

Решение:

Так как число 23 нечетное и график функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = -2$, то одним из корней является число –2.

Пусть x_1 и x_2 – корни, симметричные относительно числа –2, тогда

$x_1 + 2 = -(x_2 + 2)$

$x_1 + 2 = -x_2 - 2$

$x_1 + x_2 = -4.$

Итак, оставшиеся 22 корня можно разбить на 11 групп, сумма чисел в каждой группе равна –4.

Искомая сумма $11 \cdot (-4) + (-2) = -46$.

Ответ: –46.

11.3 В каждой клетке таблицы 5×5 записано число –1, 0 или +1 так, что сумма чисел в любом столбце не положительная, а сумма чисел в любой строке неотрицательна. Какое наибольшее количество нулей может быть записано в клетках таблицы, если известно, что хотя бы один раз в таблице записано число 1.

Решение:

Найдите S-сумму всех чисел таблицы двумя способами. Складывая суммы столбцов получаем, что $S \le 0$. Складывая суммы строк, получаем, что $S \ge 0$.

Следовательно, $S = 0$, причем сумма в каждой строке и каждом столбце тоже 0. Следовательно, в каждой строке и в каждом столбце число ненулевых клеток четно.

По условию в таблице хотя бы одно число 1.

Пусть число 1 находится в i-ой строке и j-ом столбце. Тогда в i-ой строке еще должно стоять число -1. Например, в k-ом столбце i-ой строки.

Аналогично в j-ом столбце еще должно стоять число -1. Например, в n-ой строке j-го столбца.

Чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце оставалась равной 0, нужно добавить число 1 в k-ый столбец и нужно добавить число 1 в n-ую строку.

Поставив число 1 на пересечении n-ой строки и k-го столбца, минимизируем количество ненулевых элементов. Итак, число нулей в таблице не более $25 - 4 = 21$. На рис. пример с 21 нулем.

0	0	0	0	0
0	1	0	–1	0
0	0	0	0	0
0	–1	0	1	0
0	0	0	0	0

Ответ: 21.

11.4 На плоскости отмечено 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединили отрезком. Какое наибольшее число отрезков может пересечь прямая, не проходящая ни через одну из отмеченных точек.

Решение:

Если прямая пересекает отрезок, то его концы находятся по разные стороны от прямой.

Пусть по одну сторону от прямой находятся n точек, тогда по другую сторону находятся $20 - n$ точек. Так как каждые две точки соединены отрезком, то число отрезков, которые пересекает прямая равно

$$n(20-n) = 20n - n^2 = -(n-10)^2 + 100.$$

Наибольшее значение полученного выражения равно 100, достигается при n=10.

Ответ: 100.

11.5 Дан ΔABC, CC_1 – высота, причем $\angle ACC_1 = 28^o$, $\angle C_1CB = 22^o$. Найдите угол HBO, где H – ортоцентр, O – центр описанной окружности.

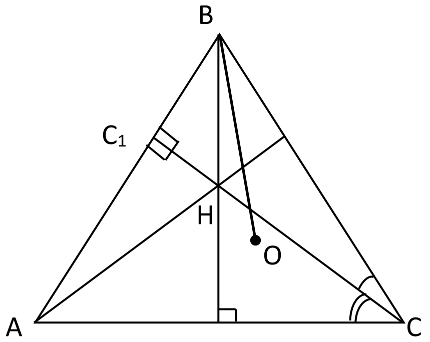
Решение:

$\angle C_1BH = \angle ACC_1 = 28^o$

$\angle CBH = 90^o - (22^o + 28^o) = 40^o$

$\angle CBO = \angle C_1BH = 28^o$

$\angle HBO = 40^o - 28^o = 12^o$.



Ответ: 12^{o}.