

Числовые знакоположительные ряды

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2).

1) **Необходимый признак сходимости:** если ряд (1) сходится, то если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Обратное утверждение не верно!

2) **Достаточный признак расходимости:** если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.

3) **Первый признак сравнения:** пусть, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $a_n \geq b_n$, тогда если сходится больший ряд (1), то сходится и меньший (2) или если расходится меньший ряд (2), то расходится и больший (1).

4) **Второй (предельный) признак сравнения:** если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ существует, конечен и не равен нулю, то оба ряда (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

5) Основные **ряды для сравнения:**

- гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится;

- ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$;

- геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$, расходится при $q \geq 1$.

Замечание: формулы для нахождения суммы геометрической прогрессии при $q < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

6) **Признак Даламбера:** пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, тогда если $L < 1$, то ряд (1) сходится; если $L > 1$, то ряд (1) расходится; если $L = 1$, то нужно использовать другой признак.

Признак Даламбера применяется если в общий член ряда входит число в степени n , или факториал, или «цепочка множителей».

7) **Радикальный признак Коши:** пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, тогда если $L < 1$, то ряд (1) сходится; если $L > 1$, то ряд (1) расходится; если $L = 1$, то нужно использовать другой признак.

8) **Интегральный признак Коши:** пусть на $[1; +\infty)$ определена непрерывная, не возрастающая функция $f(x)$ такая, что $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$. Тогда несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и ряд (1) ведут себя одинаково.

Числовые знакпеременные ряды

- это ряды, содержащие и положительные, и отрицательные члены.

Если ряд, составленный из абсолютных величин, сходится, то знакпеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**. Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, перемножать, менять местами их слагаемые.

Если ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, но установлено, что знакпеременный ряд всё-таки сходится, то такой ряд называется **условно сходящимся**. Условно сходящиеся ряды сходятся в силу того, что положительные и отрицательные слагаемые компенсируют друг друга, можно доказать, что, переставляя слагаемые условно сходящегося ряда, можно получить ряд с любой заранее заданной суммой и даже расходящийся ряд.

Числовые знакочередующиеся ряды

- это ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ (3), где $a_n > 0$.

Исследование знакочередующегося ряда на сходимость:

1) Составить ряд из абсолютных величин и исследовать его на сходимость, применяя признаки, справедливые для знакоположительных рядов. Если указанный ряд сходится, значит исходный ряд сходится абсолютно и исследование закончено. Если указанный ряд расходится, то переходим к пункту 2).

2) Для знакочередующегося ряда применяем признак Лейбница. Если признак Лейбница выполняется, то исходный ряд сходится условно, если не выполняется, то исходный ряд расходится.

Признак Лейбница: если выполняются оба нижеперечисленных условия, то ряд (3) сходится, причём его сумма $0 < S < a_1$.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

2) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$, то есть выполнено неравенство $a_n > a_{n+1}$.

Замечание: условие 2) может быть выполнено, начиная с некоторого номера N .