

Функциональные ряды

- это ряды, членами которых являются функции от x , т.е. ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (1).

Совокупность числовых значений аргумента x , при которых функциональный ряд сходится, называется его **областью определения**.

Среди функциональных рядов особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x , т.е. **степенной ряд**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot x^n \quad (2), \text{ где } c_n \text{ называются коэффициентами степенного ряда.}$$

Часто рассматриваются **степенные ряды общего вида**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n \quad (3), \text{ где } a \text{ называется центром степенного ряда.}$$

Каждый степенной ряд вида (3) с помощью замены $y = x - a$ сводится к ряду (2).

Сходимость степенных рядов

Теорема Абеля: если степенной ряд (1) сходится (абсолютно или условно) в какой-либо точке x_0 , то он сходится абсолютно и равномерно в каждой точке $x \in (-|x_0|; |x_0|)$. Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ называется **интервалом сходимости степенного ряда**.

Пусть $|x_0| = R$, тогда интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$ или $|x| < R$. Число R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

На границах интервала, т.е. в точках $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

1) **Нахождение радиуса сходимости степенного ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}.$$

2) **Нахождение интервала сходимости степенного ряда** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$:

$$-R < x - a < R \text{ или } a - R < x < a + R \text{ или } x \in (a - R; a + R).$$

3) **Нахождение области сходимости степенного ряда:** проверить две граничные точки интервала сходимости. В зависимости от сходимости ряда в этих точках область сходимости будет либо отрезком, либо полуинтервалом, либо интервалом.

Замечания: 1) Если $R = \infty$, то ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

2) Если $R = 0$, то ряд сходится только в одной точке $x = a$.

3) Если степенной ряд содержит не все степени $(x - a)$, т.е. задан **неполный степенной ряд**, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Разложение функций в степенные ряды

Разложение функции $f(x)$ в **ряд Тейлора**:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots$$

Разложение функции $f(x)$ в **ряд Маклорена**:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

Замечание: если к ряду, называемому многочленом Тейлора прибавить остаточный член, то знак $\approx$ можно заменить равенством.

Основные разложения в ряд Маклорена

Для каждой формулы остаточный член $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$$1) (1 + x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n = 1 + m \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

при $x \in (-1; 1)$;

$$2) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ при } x \in (-\infty; \infty);$$

$$3) \ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ при } x \in (-1; 1);$$

$$4) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ при } x \in (-\infty; \infty);$$

$$5) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ при } x \in (-\infty; \infty);$$

$$6) \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \text{ при } x \in [-1; 1];$$

$$7) \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ при } x \in [-1; 1];$$

$$8) \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ при } x \in (-\infty; \infty);$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{гиперболический синус};$$

$$9) \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ при } x \in (-\infty; \infty);$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус};$$

$$10) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ при } x \in (-1; 1).$$