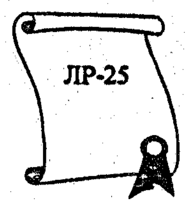
МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Курский государственный технический университет
Кафедра высшей математики

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Методические указания к ЛР-25



КУРСК 1999

Составители: **В.И.Дроздов, Е.В.Журавлева**
УДК 519

Повторные испытания: Методические указания и индивидуальные задания к ЛР-25 / Курск. гос. техн. ун-т; Сост. В.И.Дроздов, Е.В.Журавлева. Курск, 1999. 10с.

Излагаются краткие методические рекомендации по теме теории вероятностей: "Повторные испытания". Работа содержит примеры выполнения наиболее сложных заданий, примеры использования современного программного продукта MATHCAD. Представлены индивидуальные задания.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. А.К.Емельянов

Редактор Т.Н.Иванова

ЛР №020280 от 9.12.96 ПЛД №50-25 от 1.04.97.
Подписано в печать 28.09.99. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,62. Уч.-изд. л. 0,67. Тираж 100 экз. Бесплатно. Зак 138
Курский государственный технический университет.
Подразделение оперативной полиграфии Курского государственного технического университета.
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии: 305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Список используемой литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.:Высшая школа, 1997.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.М.:Высшая школа,1997.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.Т.2. М.:Наука,1978.
4. MATCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде WINDOWS 95 / Перевод с анг. М.: Информационно-издательский дом "Филин", 1996. 712 с.

Цель работы. 1. Отработать методику применения формулы Бернулли, интегральной и локальной теорем Лапласа.
2. Ознакомиться с повторными испытаниями по схеме Пуассона.
3. Освоить методику применения ЭВМ при решении задач теории вероятностей.
4. Решить индивидуальное задание.

1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Индивидуальные задания выбираются в зависимости от:
n_1 – порядковый номер студента в журнале (номер варианта);
N – номер группы.

1.1. Задание 1

Вероятность того, что деталь не прошла ОТК $p=n_1 \cdot 10^{-2}$. Найти вероятность того, что среди $n = 4N \cdot 100$ случайно отобранных деталей непроверенных ОТК окажется от $k_1=10n_1+5$ до $k_2=12n_1+6$.

1.2. Задание 2

Найти вероятность того, что событие А наступит ровно $k=N \cdot 15$ раз в $n=40N$ испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна $p=n_1 \cdot 10^{-2}$.

1.3. Задание 3

Вероятность поражения цели стрелком при одном выстреле равна $p=(60+0{,}5n_1) \cdot 10^{-2}$. Найти вероятность того, что при $n=\mathrm{mod}(n_1, 5) + 12$ выстрелах стрелок поразит мишень $k=\mathrm{mod}(n_1, 4) + 7$ раз. Решить задачу, используя локальную теорему Лапласа и формулу Бернулли. Оценить относительную и абсолютную погрешности результата.

1.4. Задание 4

Вероятность того, что лампа нестандартная $p=n_1 \cdot 10^{-2}$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных $n=200N$ ламп относительная частота появления нестандартных ламп отклонится от вероятности p=0,1 по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon=N \cdot 0{,}01$?

1.5. Задание 5

Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью $P=(55+0{,}5n_1) \cdot 10^{-2}$ можно было ожидать, что относительная частота появления герба отклонится от вероятности p=0,5 по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon=0{,}01$?

1.6. Задание 6

На склад, независимо друг от друга, поступает продукция 4-х заводов. Вероятность того, что за некоторый промежуток времени T на склад поступит продукция первого завода равна p_1; второго – p_2, третьего – p_3, четвертого – p_4. Найти вероятность того, что за промежуток времени T на склад поступит продукция: а) всех заводов; б) трех заводов; в) двух заводов; г) одного завода; д) не поступит продукция. Считая:

$$p_1 = \frac{(n_1+1)N}{250}, \quad p_2 = \frac{(n_1+2)N}{260}, \quad p_3 = \frac{(n_1+3)N}{350}, \quad p_4 = \frac{(n_1+4)N}{750}.$$

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИ СВЕДЕНИЯ

Тему «Повторные испытания (схема Бернулли, схема Пуассона)» и методику решения задач изучить по книгам, указанным в библиографическом списке. Например, о формуле Бернулли и схеме повторных испытаний см. [1, гл. 5, §1, с. 55-56], о производящей функции см. [2, ч.1, гл.3, §5, с. 50-51].

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

Для выполнения задания воспользуемся программным продуктом MATHCAD. Приведем решение задач для N=5, n_1=10.

3.1. Пример 1

Решение задачи 1 основано на применении интегральной теоремы Лапласа

$P_n(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-z^2/2}$ - функция Лапласа,

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Решение.

Введем следующие переменные и функции для получения ответа

n:=2000; k1:=105; k2:=126; p:=0,1; q:=0,9.

Вычислим x_1 и x_2

$$x1 := \frac{k1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}, \qquad x2 := \frac{k2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}},$$

x1=-7,081 , x2=-5,516 ,

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_0^x e^{-z^2/2}dz.$$

Тогда искомая вероятность будет равна

$P := \Phi(x2) - \Phi(x1);$

$P=2.069\cdot 10^{-8}$;

Ответ: $P=2.069\cdot 10^{-8}$.

3.2. Пример 2

Т.к. вероятность появления события в каждом испытании есть величина постоянная, то данную задачу можно решать по формуле Бернулли. Однако в связи с тем, что число испытаний достаточно велико, это затруднит вычисление факториалов, воспользуемся асимптотической формулой, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях. Эта формула дается локальной теоремой Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Решение.

Для решения задачи введем

n:=200; k:=75; p:=0,1; q:=0,9.

Вычислим:

$$x := \frac{k - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}, \qquad x=12,964,$$

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}e^{-x^2/2},$$

$$P := \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\cdot\varphi(x), \qquad P=0.$$

Ответ: P=0.

3.3. Пример 3

По условию требуется решить задачу двумя способами: используя локальную теорему Лапласа и формулу Бернулли.

Решение.

Чтобы это сделать, введем данные:

n:=12; k:=7; p:=0,65; q:=0,35.

Первый способ. Согласно локальной теореме Лапласа

$$x := \frac{k - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}, \qquad x=-0,484,$$

$$P := \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\cdot\varphi(x), \qquad P=0,215.$$

Второй способ. Воспользуемся формулой Бернулли

$$P1 := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

(При наборе – значок факториала находится на панели калькулятора).

P1=0,204.

Абсолютная погрешность $\Delta P := |P1 - P|$, $\Delta P = 0,011$.

Относительная погрешность $\delta P := \dfrac{\Delta P}{P1} \cdot 100$, $\quad \delta P = 5{,}09\%$.

При малых величинах n более точные значения вероятности дает формула Бернулли, поэтому P1 стоит в знаменателе δP.

3.4. Пример 4

В этой задаче необходимо оценить отклонение относительной частоты от постоянной вероятности. Вероятность того, что в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Решение.

По условию $p := 0{,}1$; $\quad n := 1000$; $\quad \varepsilon := 0{,}05$.

$$P := 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}}\right); \qquad P = 1.$$

Ответ: P=1.

3.5. Пример 5

Аналогично предыдущей задаче можно воспользоваться законом больших чисел для схемы испытаний Бернулли

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}}\right).$$

Решение.

По условию зададим значение $\varepsilon := 0{,}01$; $\quad p := 0{,}5$; $\quad q := 0{,}5$.

Тогда модуль отклонения частоты от вероятности при единичном испытании можно найти из равенства

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| \le 0{,}01\right) = p \quad \text{или} \quad p = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$ P:=0,6. Требуется найти n.

Для этого необходимо обратить функцию Лапласа, т.е. по заданному значению функции надо найти значение аргумента. Для чего применим встроенную функцию qnorm (x, μ, δ), где $x = x_0$; $\mu = 0$; $\delta = 1$.

$$x_o := \mathrm{qnorm}\left(\frac{P}{2} + 0.5, 0, 1\right), \qquad x_o = 5{,}27.$$

Т.к. $x_o = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{n}{p \cdot q}}$, то $n := \dfrac{p \cdot q}{\varepsilon^2} x_o^2$, $\quad n = 1{,}137 \cdot 10^3$.

Смысл полученного результата таков, что число появлений герба в 60% испытаний из 1137 будет заключено между 557 (это соответствует тому, что относительная частота появления герба 0,49) и 580 (что соответствует относительной частоте появления герба 0,51).

3.6. Пример 6

Пусть в i-ом независимом испытании вероятность появления события A равна p_i, а непоявления – q_i и пусть $P_n(k)$ – вероятность появления A в n испытаниях ровно k раз. Тогда эту вероятность можно искать с помощью так называемой производящей функции вероятностей:

$$\phi_n(x) = (p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n x + q_n) = \prod_{i=1}^{n} (p_i x + q_i).$$

Тогда вероятность $P_n(k)$ совпадает с коэффициентом при x^k в разложении производящей функции по степеням x.

Решение.

Таким образом, при решении задачи 6 имеем

$$p_1 := \frac{(m+1) \cdot N}{250}; \qquad p_2 := \frac{(m+2) \cdot N}{260};$$

$$p_3 := \frac{(m+3) \cdot N}{350}; \qquad p_4 := \frac{(m+4) \cdot N}{750}.$$

$p_1 = 0{,}22$; $\quad p_2 = 0{,}231$; $\quad p_3 = 0{,}186$; $\quad p_4 = 0{,}093$;

$q_1 := 0{,}78$; $\quad q_2 := 0{,}769$; $\quad q_3 := 0{,}814$; $\quad q_4 := 0{,}907$.

Построим производящую функцию

$$\phi(x) := \prod_{i=1}^{4}(p_i x + q_i).$$

Выведем ее на экран

$$\phi(x) \to \left(\frac{11}{50}x + \frac{39}{50}\right)\cdot\left(\frac{3}{13}x + \frac{10}{13}\right)\cdot\left(\frac{13}{70}x + \frac{57}{70}\right)\cdot\left(\frac{7}{75}x + \frac{68}{75}\right).$$

Чтобы получить многочлен в явном виде необходимо:

1) выделить x в последней записи в произвольном месте;
2) на панели выбрать: "Symbolics";
3) щелчком мыши активизировать эту панель. На ней выбрать"Collect", в результате получится

$$\phi(x) \to \frac{11}{12500}x^4 + \frac{15749}{853125}x^3 + \frac{454639}{3412500}x^2 + \frac{230037}{568750}x + \frac{1938}{4375}.$$

Коэффициенты данного полинома определяют соответствующие вероятности и дают ответ на вопросы задачи.

Ответ: а) $\frac{11}{12500}$, б) $\frac{15749}{853125}$, в) $\frac{454639}{3412500}$, г) $\frac{230037}{568750}$, д) $\frac{1938}{4375}$.

Примечание. Здесь приведены примеры самостоятельного решения задач. В случае особых затруднений можно воспользоваться специальной программой, разработанной на кафедре.

4. Контрольные вопросы

1. Какие испытания называются независимыми?
2. В чем суть схемы испытаний Бернулли?
3. Сформулируйте теорему Бернулли.
4. Как определяется наивероятнейшее число наступления события в n независимых испытаниях?
5. Сформулируйте локальную теорему Лапласа.
6. Сформулируйте интегральную теорему Лапласа.
7. Какими свойствами обладает функция Лапласа?
8. Сформулируйте теорему о вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности при независимых испытаниях.
9. В чем суть схемы испытаний Пуассона?
10. Что такое производящая функция вероятностей? Какими свойствами обладает ее коэффициент.