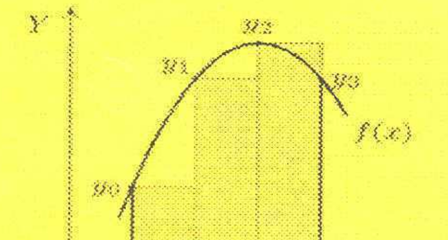
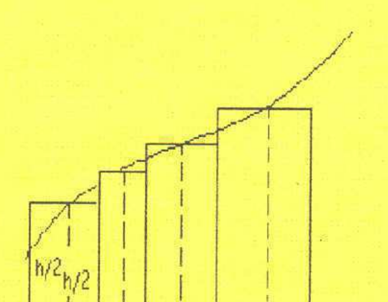
Юго-
Западный
Государственный
Университет

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания к ЛР-6





КУРСК 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
Проректор по учебной работе
_________ Е.А. Кудряшов
«_2_» июня _________ 2011 г.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания к ЛР-6

КУРСК 2011

УДК 519
Составители: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева

Рецензент
Кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. В.И.Дмитриев

Приближенное вычисление определенных интегралов: методические указания к ЛР-6 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева. Курск, 2011. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

Излагаются методические рекомендации по вычислению определенных интегралов приближенными методами: прямоугольников, трапеций, Симпсона. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.06/11 Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 50 экз. Заказ 39. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучить приближенные методы вычисления определенного интеграла.
2. Освоить методику применения ЭВМ к приближенному вычислению определенного интеграла.
3. Решить индивидуальное задание.

1. Задание

Вычислить значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью:

а) формулы прямоугольников;
б) формулы трапеций;
в) формулы парабол (формулы Симпсона).

Число узлов взять равным $n = 10$.
Сравнить полученные значения между собой.
Индивидуальные задания взять из таблицы 1.1

Таблица 1.1

Индивидуальные задания

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$	2	$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	3	$\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	5	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$	6	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$	8	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{2x^2}{5}dx$	9	$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Продолжение таблицы 1.1

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
10	$\int_1^e \ln(x^2+1)dx$	11	$\int_8^{10} \sqrt{\frac{18-x}{x-6}}dx$	12	$\int_1^3 \frac{\ln(x+3)}{x}dx$
13	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{3x^2}{5}dx$	14	$\int_1^5 \frac{5^x}{7x-1}dx$	15	$\int_1^{\frac{3}{2}} \lg\frac{2-x}{1+x}dx$
16	$\int_e^{2e} \ln(x-1)^2 dx$	17	$\int_{-1}^1 x\cdot e^{-(x+1)^2}dx$	18	$\int_0^e \ln^2(x+4)dx$
19	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\frac{(2-x)^2}{4}dx$	20	$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$	21	$\int_{1/2}^{3/4} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$
22	$\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$	23	$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$	24	$\int_1^3 \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
25	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx$	26	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{x}dx$	27	$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x}{x}dx$
28	$\int_2^4 \frac{(1/\sqrt{4x})+1}{(x+\sqrt{x})^2}dx$	29	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\cdot\ln(\cos x)dx$	30	$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$

2. Теоретические положения

2.1. Введение

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и известна её первообразная $F(x)$ (где $f(x)=F'(x)$), то определённый интеграл от этой функции в пределах от "a" до "b" может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Однако, не для всякой непрерывной функции, ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница невозможно. Кроме того, выражение для первообразной может оказаться очень сложным. В этих случаях, как правило, применяют различные приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Наиболее распространёнными приближенными методами вычисления определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона).

Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы – многочленом, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках.

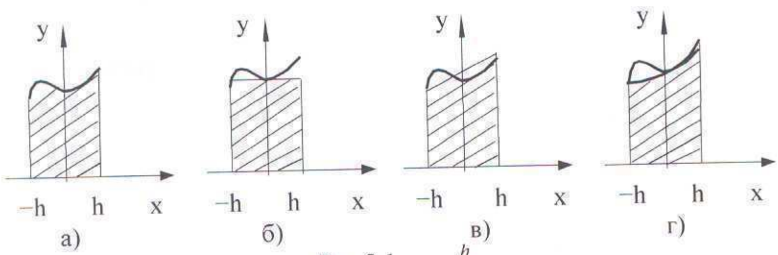


Рис.2.1

Рассмотрим при малых h интеграл $\int_{-h}^{h} f(x)dx$, представляющий собой площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[-h,h]$ (см. рис.2.1.а).

Заменим функцию $f(x)$ многочленом нулевого порядка, а именно константой $f(0)$. При этом интеграл $\int_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованного прямоугольника (рис.2.1.б.)

Заменим функцию $f(x)$ многочленом первого порядка, а именно линейной функцией $y = kx + b$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-h$ и h. При этом интеграл $\int_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной прямоугольной трапеции (рис.2.1.в)

Заменим, наконец, функцию $f(x)$ многочленом второго порядка, т.е. параболой $y = ax^2 + bx + c$, совпадающей с f(x) в точках $-h$, 0, h. При этом интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной фигуры, лежащей под параболой (рис.2.1.г.)

Если требуется вычислить интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ по любому отрезку $[a, b]$, то естественно этот отрезок разбить на достаточно большое число малых отрезков и к каждому из этих отрезков применить изложенные рассуждения. При этом мы и придем к методам прямоугольников, трапеций и парабол в их общем виде.

2.2. Формула прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < ... < x_{2n} = b$. Обозначим через x^*_{2k-1} среднюю точку отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод прямоугольников состоит в замене интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ суммой $\frac{b-a}{n}(f(x^*_1) + (f(x^*_3) + ... + f(x^*_{2n-1}))$ площадей прямоугольников с высотами соответственно равными $f(x_{2k-1})$, и основаниями, равными $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$ (рис.2.2).

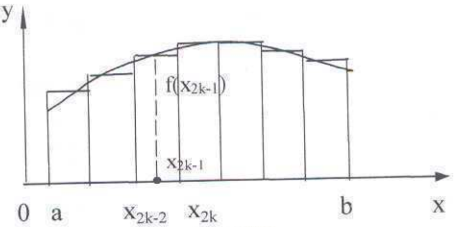


Рис.2.2

Таким образом, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1)+(f(x_3)+...+f(x_{2n-1})]+R, \qquad (2.1)$$

где R – остаточный член. Формула (2.1) называется формулой прямоугольников.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член R в формуле (2.1) равен

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta) \qquad (2.2)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольник, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$. Таким образом, формула (2.1) тем точнее, чем меньше $\frac{b-a}{n}$.

2.3. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (рис.2.3).

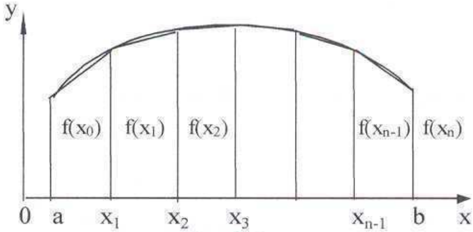


Рис.2.3

Метод трапеций состоит в замене интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ суммой

$$\frac{b-a}{2n}((f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+(f(x_{n-1})+f(x_n)))=$$

$$=\frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)),$$

площадей трапеций с основаниями, соответственно равными $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, и с высотами, равными $x_k-x_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}$.

Таким образом справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k))+R, \qquad (2.3)$$

где R – остаточный член. Формула (2.3) называется формулой трапеций.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член R в формуле (2.3) имеет вид

$$R=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta). \qquad (2.4)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольную трапецию, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$.

2.4. Формула парабол (формула Симпсона)

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ разобьем отрезок [*a*, *b*] на *n* равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_{2n} = b$ и обозначим через x_{2k-1} середину отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод парабол заключается в замене интеграла $\int_a^b f(x)dx$ суммой

$$\frac{b-a}{6n}([f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+\ldots+$$
$$+[(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]) =$$
$$=\frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}))$$

площадей фигур, (рис.2.4) представляющих собой криволинейные трапеции, лежащие под параболами, проходящими через три точки графика функции *f*(*x*) с абсциссами $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$.

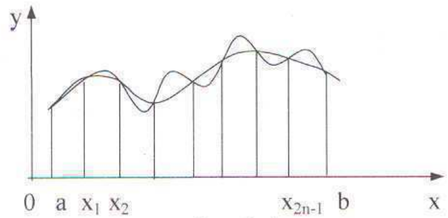


Рис.2.4

Таким образом, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}))+R, \qquad (2.5)$$

где R – остаточный член. Формула (2.5) называется формулой парабол или формулой Симпсона.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\ b]$ непрерывную четвертую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член R в формуле (2.5) равен

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \tag{2.6}$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене определенного интеграла указанной площадью, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^5$.

3. Образец выполнения задания

Замечание. *В дальнейшем изложении текст, выделенный курсивом, носит пояснительный характер и включается в отчет по лабораторной работе.*

Введем пределы интегрирования, подынтегральную функцию и число разбиений

$a := 0{,}1 \qquad b := 2$

$f(x) := \dfrac{\sin x}{x} \qquad n = 10$

Зададим шаг и формулу нахождения координат точек деления отрезка $[a, b]$

$h := \dfrac{b-a}{n}$

$i := 1 \ldots 19$

$X(i) = a + i \cdot \dfrac{h}{2}$

Пояснение. *Здесь, при четных* $\mathrm{i} = 2\mathrm{k}$ *получаем координаты точек деления отрезка на десять равных частей при нечетных* $i = 2k - 1$ *- средние точки частичных отрезков.*

а) Применим формулу прямоугольников и найдем соответствующее приближенное значение определенного интеграла

$$S_1 := h\cdot\sum_{k=1}^{n} f(x(_{2k-1})) \to 1.50607$$

$$S_1 = 1.506.$$

б) Используем формулу трапеций для вычисления того же интеграла

$$f(x(2k))$$

$$S_2 := \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right) \to 1.507961$$

$$S_2 = 1.50\cancel{7}5$$

в) По формуле Симпсона найдем

$$S_3 := \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(x(_{2k}))+4\sum_{k=1}^{n} f(x(_{2k-1}))\right)$$

$$S_3 = 1.505.$$

Вычислим точное значение заданного интеграла

$$J := \int_a^b f(x)dx$$

$$J = 1.505$$

Сравнивая полученные приближенные значения между собой и с истинным значением, видим преимущество формулы Симпсона перед двумя другими формулами, а погрешность вычисления по формуле трапеций и прямоугольников приблизительно одинаковая.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
3. Изложите кратко суть метода прямоугольников.
4. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом прямоугольников при числе узлов n=4.

5. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом трапеций при числе узлов n=4.
6. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом Симпсона при числе узлов n=6.
7. Дайте оценку погрешности для каждого из методов.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч.1. М.: Наука, 1982, 616с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980, 432с.