611

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Курский государственный технический университет

Кафедра высшей математики

# *ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ*

**Методические указания**

ЛР-24.1



КУРСК 2000

Составители: **В.И.Дроздов, С.А.Миненкова**
УДК 519

Геометрические вероятности: Методические указания к ЛР-24.1 / Курск. гос. техн. ун-т; Сост. В.И.Дроздов, С.А.Миненкова. Курск, 2000. 11с.

Излагаются методические рекомендации по нахождению геометрических вероятностей с использованием двойных и определенных интегралов с помощью программных продуктов MATHCAD.

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Библиогр.: 6 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.И.Дмитриев

Редактор Т.Н.Иванова

ЛР N 020280 от 9.12.96. ПЛД № 50-25 от 1.04.97.
Подписано в печать 04.05.2000. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,69. Уч.-изд. л. 0,74. Тираж 100 экз. Бесплатно. зак 66
Курский государственный технический университет.
Подразделение оперативной полиграфии Курского государственного технического университета.
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии: 305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Общая постановка задачи ........................................................ 4
2. Индивидуальные задания ..........................................................4
 2.1. Задание 1. ...........................................................................4
 2.2. Задание 2 ............................................................................6
3. Образцы выполнения заданий......................................................7
 3.1.Задание 2.1.............................................................................7
 3.2.Задание 2.2. ...........................................................................8
4. Контрольные вопросы ...............................................................10

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
2. Гмурман В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Изд. 5-е. М.: Наука, 1964.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики: Учеб.пособие для ВТУЗов. Изд.2-е, доп. М.:Высш. шк.,1975.
4. Справочник по математике для экономистов /В.Е.Барбаумов, В.И.Ермаков, Н.Н.Кривенцова и др.; Под ред. В.И.Ермакова. М.:Высш. шк., 1987. 334 с .
5. MATCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде WINDOWS 95 / Перевод с англ. М.: Информационно-издательский дом "Филин", 1996. 712 с.
6. Дьяконов В.П., Абраменко И.В. MATCAD 7.0 в математике, физике и в INTERNET.М.: Нолидж,1998.352с.

**Цель работы:** 1. Ознакомиться с понятием геометрической вероятности.
2. Повторить применение определенного интеграла для вычисления площадей и объемов.
3. Освоить методику применения ЭВМ (пакет MATHCAD) для построения графиков, вычисления определенного и двойного интегралов.
4. Решить индивидуальные задания.

## 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в n-мерном пространстве имеется некоторая область **D** и в ней содержится другая область **d**. Требуется найти вероятность того, что взятая наудачу в области **D** точка попадет в область **d**. При этом выражению «точка, взятая наудачу в области **D**» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любое место области **D**. Вероятность попадания точки в область **d** равна отношению меры (mes) области **d** к мере области **D**, т.е.

$$P = \frac{\text{mes } d}{\text{mes } D}.$$

**Замечание.** В зависимости от размерности областей мера может быть длиной, площадью, объемом и т.д.

## 2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

### 2.1. Задание 1

На плоскую фигуру **D** наугад бросается точка M. Найти вероятность того, что точка M попадает в область **d**, лежащую в **D**.

Уравнения линии, ограничивающих область **D** и дополнительно ограничивающих область **d**, приведены в табл. 2.1. Задание выбирается согласно, n – номер варианта (указывается преподавателем).

Таблица 2.1

Границы областей **D** и **d**

| n | D | d |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | $\Delta ABC$, где $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,8)$ | $y = (x-2)^2$, $y = 4x - 8$ |
| 2 | $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4{,}5$ | $y = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ |
| 3 | $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 4$ | $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$ |

Продолжение табл.2.1

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 4 | $x=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad y=0,\quad y=1$ | $y=\sin x\cos^2 x,\qquad y=0$ |
| 5 | $x=0,\quad x=2,\quad y=0,\quad y=2$ | $y=\sqrt{4-x^2},\qquad y=0$ |
| 6 | $x=0,\quad x=2,\quad y=0,\quad y=2$ | $y=x\cdot\sqrt{4-x^2},\qquad y=0$ |
| 7 | $x=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad y=0,\quad y=1$ | $y=\cos x\cdot\sin^2 x,\qquad y=0$ |
| 8 | $x=0,\quad x=\ln 2,\quad y=0,\quad y=1$ | $y=\sqrt{e^x-1},\qquad y=0$ |
| 9 | $x=1,\quad x=e^3,\quad y=0,\quad y=1$ | $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\qquad y=0$ |
| 10 | $x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=\frac{\pi}{2}$ | $y=\arccos x,\qquad y=0$ |
| 11 | $x=-1,\quad x=0,\quad y=0,\quad y=1$ | $y=(x+1)^2,\qquad y^2=x+1$ |
| 12 | $x=0,\quad x=3,\quad y=-1,\quad y=4$ | $y=2x-x^2+3,\qquad y=x^2-4x+3$ |
| 13 | $x=0,\quad x=6,\quad y=0,\quad y=18$ | $y=x\cdot\sqrt{36-x^2},\qquad y=0$ |
| 14 | $y=0,\quad y=1,\quad x=0,\quad x=\frac{\pi}{2}$ | $x=\arccos y,\qquad x=0$ |
| 15 | $x=0,\quad x=\sqrt{3},\quad y=0,\quad y=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ | $y=x\ \mathrm{arctg}\, x,\qquad y=0$ |
| 16 | $x=0,\quad x=\sqrt{3},\quad y=0,\quad y=2$ | $y=x^2\sqrt{3-x^2},\qquad y=0$ |
| 17 | $y=0,\quad y=\ln 2,\quad x=0,\quad x=1$ | $x=\sqrt{e^y-1},\qquad x=0$ |
| 18 | $x=0,\quad x=2,\quad y=0,\quad y=\frac{16}{3\sqrt{3}}$ | $y=x^2\cdot\sqrt{4-x^2},\qquad y=0$ |
| 19 | $x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=\frac{1}{2}$ | $y=\frac{x}{1+\sqrt{x}},\qquad y=0$ |
| 20 | $x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{1}{2},\quad y=1$ | $y=\frac{1}{1+\cos x},\qquad y=0$ |
| 21 | $y=2,\quad y=4,\quad x=0,\quad x=8$ | $x=(y-2)^3,\qquad x=4y-8$ |
| 22 | $x=0,\quad x=\frac{\pi}{2},\quad y=0,\quad y=1$ | $y=\cos^3 x\sin 2x,\qquad y=0$ |
| 23 | $x=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad y=\frac{1}{2}$ | $y=\frac{x}{(x^2+1)^2},\qquad y=0$ |

Продолжение табл.2.1

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 24 | $y = -1,\ y = 2,\quad 2\ x = -1,\ x = 4$ | $x = 4 - y^2, \qquad x = y^2 - 2y$ |
| 25 | $y = 1,\ y = e^x,\quad x = 0,\quad x = 1$ | $x = \frac{1}{\sqrt{1 + \ln y}}, \qquad x = 0$ |
| 26 | $x = 1,\ x = 2,\quad y = 0,\quad y = e$ | $y = e^{\frac{1}{x}} \Big/ x^2, \qquad y = 0$ |
| 27 | $y = 0,\ y = 4,\quad x = 0,\quad x = 4$ | $x = \sqrt{16 - y^2}, \qquad x = 0$ |
| 28 | $x = 0,\ x = 3,\quad y = 0,\quad y = 6\sqrt{3}$ | $y = x^2\sqrt{9 - x^2}, \qquad y = 0$ |
| 29 | $x = 1,\ x = 2,\quad y = 0,\quad y = 1$ | $y = (x - 1)^2, \qquad y^2 = x - 1$ |
| 30 | $x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\quad y = 0,\quad y = \frac{\pi^2}{4}$ | $y = x^2 \cdot \sin x, \qquad y = 0$ |
| 31 | $y = 0,\ y = 3,\quad x = -1,\quad x = 4$ | $x = 4 - (y - 1)^2, \qquad x = y^2 - 4y + 3$ |

## 2.2. Задание 2

В трехмерном пространстве задана область **D**, содержащая область **d**. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в область **D** точка **A** попадет в область **d**. Область **D** ограничена плоскостями: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = 1$. Область **d** ограничена поверхностью **S** и плоскостями $z = C$, $x = 0$, $y = 0$, данные выбираются из табл.2.2. Согласно номера $k = \mathrm{mod}\,(n;5)+1$. Здесь и далее mod (n;m) – остаток от деления числа n на m.

Таблица 2.2

Границы области d

| K | S | | C |
|---|---|---|---|
| | Уравнение | Название | |
| 1 | $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | Эллиптический параболоид | 1 |
| 2 | $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | конус | 1 |
| 3 | $z^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ | Эллипсоид | 0 |
| 4 | $1 - z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | Эллиптический параболоид | 0 |
| 5 | $(z - 1) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | конус | 0 |

где $k = mod(n;5)+1$;

$a = mod(n;7)+N$; $b = mod(n;6)+N$;

N – номер группы в потоке (указывается преподавателем);
здесь **mod** (n;m) – остаток от деления числа **n** на **m**.

## 3. ОБРАЗЦЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

**Замечание.** Крупным шрифтом в дальнейшем изложении выделен материал, предназначенный для ввода на ЭВМ, остальной текст носит пояснительный характер. И тот и другой материалы исключая операции в MATHCAD должны быть включены в отчет по лабораторной работе.

### 3.1. Задание 1

Пусть область **D** ограничена линиями $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$, $y=4$. Область **d** дополнительно ограничена линиями $y = 4 - (x - 1)^2$, $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение

Очевидно, что область **D** – это прямоугольник и его площадь (мера)

**SD: = 5 · 3, SD = 15.**

Введем функции, ограничивающие область **d** и **D**:

$y1(x) := 4 - (x - 1)^2$, $y2(x) := x^2 - 4 \cdot x + 3$,

$y3(x) := -1$, $y4(x) := 4$.

Для того чтобы построить фигуру, необходимо на математической палитре вызвать "Graph Pallete", затем выбрать "X-Y Plot". Заполним рабочую область: внизу нужно ввести аргумент **x** и границы его изменения (левая 0, правая 3), слева введем функции y1(x), y2(x), y3(x), y4(x) (ввод функций производится через запятую) и область их изменения (нижняя –1, верхняя 4). После ввода этих данных необходимо щелкнуть мышью вне области графика, появится картинка, представленная на рис.3.1.

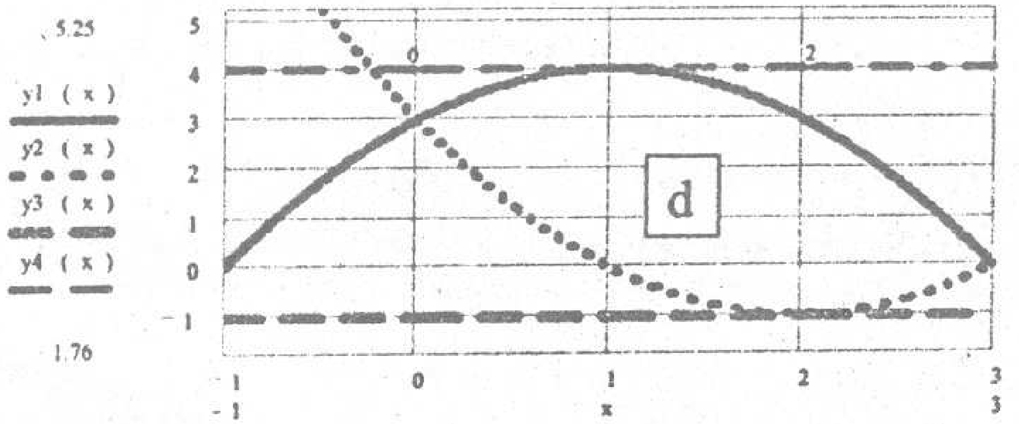



Рис.3.1.Графики функций y1(x), y2(x), y3(x) и y4(x)

Далее необходимо самостоятельно заштриховать область d, как это сделано на рис 3.1.

Вычислим площадь построенной фигуры d. Для этого на математической палитре "Calculus Pallete" выберем определенный интеграл "Definite integral" введем пределы интегрирования и подынтегральную функцию

$$Sd := \int_0^3 (y1(x) - y2(x))\,dx, \qquad Sd = 5.334.$$

Тогда искомая вероятность

$$P := \frac{Sd}{SD}, \qquad P = 0.356.$$

## 3.2. Задание 2.2

Пусть область **D** ограничена плоскостями x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = 1. Область **d** ограничена плоскостями x = 0, y = 0, z = 1 и конусом $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, где a = 4, b = 7.

Решение. Введем исходные данные

**a: = 4 , b: = 7.**

Очевидно, что область **D** – прямой параллелепипед и его объем (мера) **VD = a·b·1, VD = 28.**

Выразим **z** из общего уравнения конуса, получим

$$z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Зададим область изменения аргументов **x и y:**

**n: = 20, m: =20** (число разбиений аргументов **x** и **y** соответственно),

**i: = 1...n+1, j: = 1...m+1** (индексы абсциссы и ординаты точек конуса).

$$\Delta x := \frac{a}{n}, \qquad \Delta y := \frac{b}{m}, \; x_i := \Delta x \cdot (i-1), \; y_j := \Delta y \cdot (j-1).$$

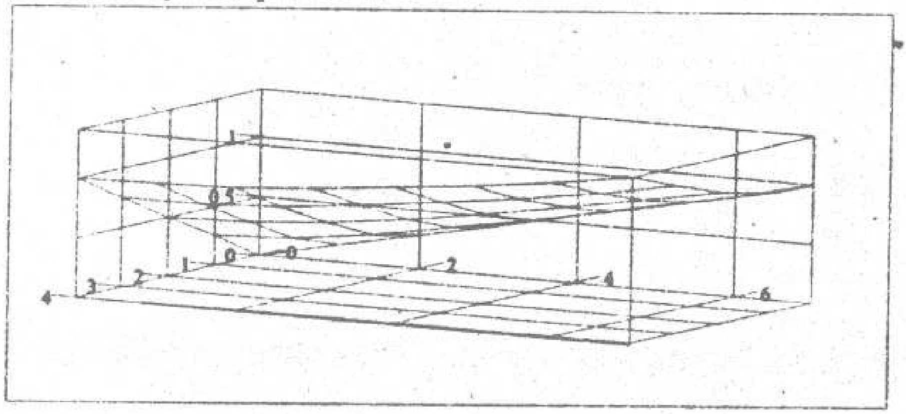
Введем функции, ограничивающие область **d:**

$$f1(x,y) := \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \qquad f2(x,y) := 1.$$

Вычислим значения функции f1(x,y) в точках разбиения

$$z_{i,j} := f1(x_i\,,\,y_j).$$

Построим конус. Для этого на математической палитре (“Calculus Pallete”) нужно вызвать графики (“Graph Pallete”), затем выбрать трехмерные графики (“3D Scatter”) и задать в рабочей области функцию z. Щелкнув мышью вне рабочей области, получим рис.3.2.



z

Рис.3.2.График части конической поверхности

Кроме построенной поверхности область d ограничена плоскостями x = 0, y = 0, z = 1.

Найдем проекцию линии пересечения конической поверхности плоскостью z =1; получим

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=1.$$

Построим график полученной проекции, предварительно выразив y через x. Введем

$$g(x) := b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Далее на палитре “Graph Pallete” выберем декартов график (“X-Y Plot”), в рабочей области зададим : внизу аргумент x и область его изменения (левая 0; правая 4, соответсвует параметру a и равна 4). Слева функцию g(x) и область её значений (нижняя 0; верхняя соответствует параметру b и равна 7).

**Щелкнув мышью вне рабочей области получим рис. 3.3.**

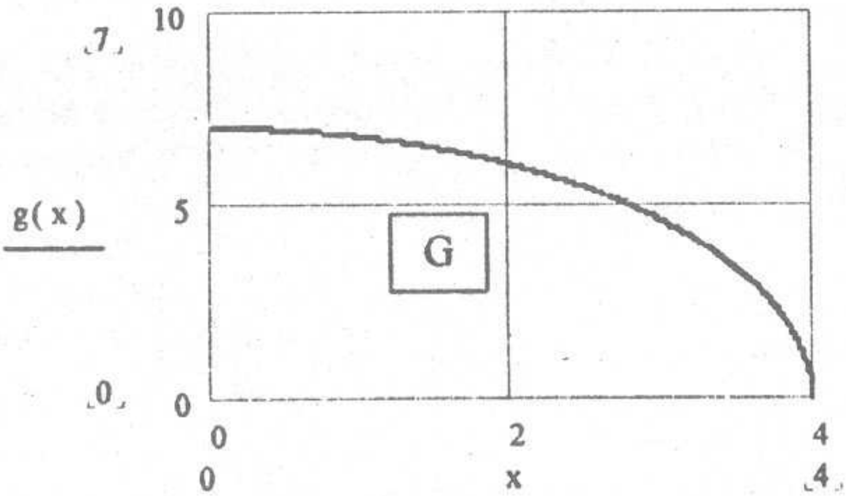



Рис.3.3. **Проекция линии пересечения конической поверхности плоскостью z=1**

**Для того чтобы вычислить объем построенной фигуры d, нужно вычислить двойной интеграл**

$$VD = \iint\limits_G (f2(x,y) - f1(x,y))dxdy,$$

где область интегрирования **G** ограничена построенной линией **g(x)** и координатными осями Ox и Oy (см. рис. 3.3).

Перейдем от двойного интеграла к повторному. Для вычисления повторного интеграла нужно на палитре выбрать определенный интеграл ("Definite integral") и использовать его дважды, затем ввести пределы интегрирования и подынтегральную функцию. В результате получим

$$Vd := \int_0^a dx \int_0^{g(x)} (f2(x,y) - f1(x,y))dy, \quad VD = 7.33.$$

Тогда искомая вероятность

$$P := \frac{vd}{VD}, \quad P = 0.262.$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Введите понятие размещения из n элементов по m, приведите формулу общего числа их.

2. Введите понятие перестановок из n элементов, приведите формулу общего их числа.
3. Введите понятие сочетаний из n элементов по m, приведите формулу общего их числа.
4. Определите понятие достоверных, невозможных и случайных событий. Приведите примеры.
5. Какие события называются совместными, несовместными? Какие события образуют полную группу событий?
6. Приведите и объясните диаграммы Вьенна.
7. Дайте определение статистической вероятности, приведите пример. Какими недостатками обладает такой подход?
8. Дайте классическое определение вероятности, приведите пример. Какими недостатками обладает такой подход?
9. Введите понятие геометрической вероятности, приведите пример. Какими недостатками обладает такой подход?