цель раооты:

1) ознакомиться с математическими идеями и фактами, лежащими в основе гармонического анализа;
2) освоить методику выделения гармонических составляющих заданной периодической функции;
3) научиться аппроксимировать заданную периодическую функцию тригонометрическими полиномами – поточечно и в среднем.

1. Основные идеи и факты элементарного гармонического анализа

Рассмотрим какую-нибудь достаточно хорошую (хорошую в том смысле, в котором это будет необходимо в соответствующем контексте) функцию $f: R \to R$. Предположим, что функция f периодична и ее периодом служит «модельный» период $T = 2\pi$. Это означает, что при сдвиге аргумента на величину 2π функция f остается неизменной:

$$f(x - 2\pi) = f(x) \text{ для всех } x \in R.$$

Разумеется, при сдвиге аргумента на величину, отличную от 2π, может получиться функция (называемая сдвигом функции f), вовсе не совпадающая с исходной функцией.

Исследование множества всех сдвигов данной функции позволяет выявить многие глубоко скрытые свойства функции, и это является важным методом математического анализа. В основе этого метода лежит следующее обстоятельство: имеются специальные классы функций (не отдельные функции!), не меняющиеся при любом сдвиге аргумента (т.е. из любой функции такого класса К при любом сдвиге аргумента получается снова функция, принадлежащая этому же классу К), - классы, инвариантные относительно сдвигов. Особую роль играют минимальные инвариантные классы. Оказывается, имеется лишь счетное число таких классов: $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$, и при этом класс K_n представляет собой совокупность всех *гармоник n-го порядка*

$$g_n(x) = a\cos nx + b\sin nx, \quad a, b \in R \text{ – произвольны.}$$

Упражнение. Докажите, что класс K_n инвариантен относительно сдвигов.

Естественным образом возникают следующие две задачи: А и С.

А) Для заданной функции f (периода $T = 2\pi$) определить соответствующие компоненты f, лежащие в различных классах K_n. Это - задача гармонического (или спектрального) анализа функции f. Задача решается просто: указанными компонентами будут гармоники

$$g_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где
$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{1}$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots, -$$

так называемые *коэффициенты Фурье функции f*.

С) Зная гармонические компоненты g_n, восстановить саму функцию f. Это – задача гармонического (или спектрального) синтеза функции f. Как правило, при гармоническом синтезе изучается сходимость функционального ряда

$$\frac{1}{2}g_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

называемого *рядом Фурье функции f*.

Сходимость такого ряда можно понимать в различных смыслах, и это будет по-разному определять реализацию синтеза функции f. Из многих типов сходимости функциональных рядов наиболее употребительными при изучении рядов Фурье являются поточечная сходимость и сходимость по метрике пространства L_2.

1) Поточечная сходимость ряда Фурье.

При некоторых предположениях, на практике почти всегда выполненных, *ряд Фурье функции f сходится в каждой точке* x и своей суммой имеет число f(x), если x – точка непрерывности функции f, и число $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$, если x – точка разрыва первого рода. Здесь $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – соответственно пределы слева и справа функции f в точке x. Единообразно, не различая точки непрерывности и точки разрыва, работает формула

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b\sin nx)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)), \qquad (2)$$

где $$a_n=a_n(f), b_n=b_n(f) - \text{см. (1)}.$$

Т.о. поточечная сходимость ряда Фурье функции к самой функции имеет место, вообще говоря, не во всех точках.

Упражнение. Функция f имеет период 2π, на промежутке $(-\pi,\pi]$ задается формулой $f(x)=2^x$. Вычислите сумму ряда Фурье этой функции при $x=0$ и при $x=\pi$.

(Ответ: 1 и $\frac{1}{2}(2^{\pi}+2^{-\pi})$)

2) *Сходимость в пространстве* L_2.

В пространстве $L_2=L_2(-\pi,\pi]$, элементами которого являются функции, расстояние $d(h_1,h_2)$ между функциями h_1 и h_2 определяется как среднее (интегральное) квадратичное уклонение

$$d(h_1,h_2)=\left(\int_{-\pi}^{\pi}(h_1(x)-h_2(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{m=1}^{n}(a_m(f)\cos mx+b_m(f)\sin mx) - \qquad (3)$$

n-ая частичная сумма ряда Фурье функции f.

Тогда

$$d(S_n,f)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Это означает, что последовательность частичных сумм ряда Фурье функции f сходится к f в смысле среднего квадратичного уклонения, т.е. *ряд Фурье сходится в пространстве* L_2 *к породившей его функции*. При этом весьма важным является нижеследующее экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Чтобы объяснить это свойство, сформулируем закономерно возникающую задачу о наилучшей аппроксимации: среди всех тригонометрических многочленов порядка n, т.е. функций вида

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx),$$

где α_m и β_m произвольны, найти многочлен, наиболее близкий к функции f в смысле расстояния в пространстве L_2. Ответ к этой задаче дается n-ой частичной суммой ряда Фурье функции f (см.(3)):

$$d(S_n, f) = \min_{T_n} d(T_n, f),$$

причем

$$d^2(S_n, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2)\right), \qquad (4)$$

где $$a_m = a_m(f), \; b_m = b_m(f).$$

2. Задание

Функция f имеет период $T=2\pi$ и на промежутке $(-\pi, \pi]$ определяется условиями

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{для } -\pi < x \le x_0, \\ f_2(x) & \text{для } x_0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Выражения для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а также значение x_0 содержатся в табл. 1

1. Вычислите сумму ряда Фурье функции f в точках x_1 и x_0 (значение x_1 см. также в табл.1), используя формулу (2).

2. Вычислите коэффициенты Фурье a_n и b_n для n = 0,1,2,3,4, используя формулы (1).

3. Составьте (см.(1)) гармоники $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$, запишите первую $S_1(x)$ и третью $S_3(x)$ частичные суммы ряда Фурье, используя формулу (3). Вычислите $S_3(x_1)$ и $S_3(x_0)$, полученные значения сравните с результатами вычислений п.1 .

4. Постройте совместно графики функций $y = f(x)$, $y = S_1(x)$, $y = S_3(x)$. Рассмотрите эти графики, сделайте выводы.

5. Укажите тригонометрический многочлен порядка $n = 2$, наиболее близкий к функции f в смысле среднего квадратичного уклонения (т.е. $S_2(x)$). Вычислите расстояние между S_2 и f в пространстве L_2. Используйте (4).

6. То же, что в п.5, но при $n = 4$. Вычислите $d(S_4, f)$. Сравните $d(S_2, f)$ и $d(S_4, f)$.

Таблица 1

n	$f_1(x)$	$f_2(x)$	x_0	x_1
1	2	3	4	5
1	$-x^3$	$\ln x$	1	-1
2	2^{-x}	x^2	0	2
3	$x+3$	$-\sqrt{x}$	0	-2
4	2^x	$-\sqrt{x-1}$	1	2
5	$-x^2$	2^x	0	-1
6	1	$2^x \sin x$	0	-2
7	x^3+1	$\ln x$	1	-1
8	x^2	$x \cdot 2^x$	-1	1
9	$-x-1$	2^x	0	1
10	$2^{-x} \cdot \cos x$	2	0	$\frac{\pi}{2}$
11	$\sqrt{4-x}$	2^x-1	0	3
12	$2^x \cos x$	$x-2$	0	$-\frac{\pi}{2}$
13	x	-2^x	1	2
14	x^2+1	$\ln(x+1)$	0	-1
15	-1	2^x	-2	1
16	2^x	$\frac{1}{x}$	1	2
17	$2-x^2$	$\ln(x^2+1)$	0	-2
18	x^2+2	$\sqrt{x}\sin x$	0	-1

Продолжение табл.1

1	2	3	4	5
19	$x^2 + x$	2^x	-1	1
20	$(x+1)^2$	$-\sqrt{x}$	1	-3
21	$\sqrt{10+x}$	2^{-x}	-1	1
22	x	$\dfrac{2^x}{x+1}$	0	-1
23	$(x+2)^2$	-2^x	-1	1
24	$\ln(-x)$	x^2	-1	2
25	$\sqrt{-x}$	$2^x - 2$	0	1
26	-1	$-\operatorname{arctg} x$	0	-2
27	$1-x$	$\operatorname{arctg}^2 x$	0	-1
28	$-x^3-1$	$\sqrt{x}$	1	-1
29	$\dfrac{\sin x}{x}$	$x+2$	-1	1
30	2^x	-1	2	-1

3. Контрольные вопросы и упражнения

1. Каков общий вид гармоник n-го порядка?
2. В чем заключается задача гармонического анализа заданной функции?
3. По каким формулам вычисляются коэффициенты Фурье функции (с периодом $T = 2\pi$)?
4. Докажите, что если функция f четна, т.е. $f(-x) = f(x)$ при $x \in (-\pi; \pi)$, то все коэффициенты Фурье $b_n(f)$ равны нулю. Если же функция f нечетна, то все $a_n(f)$ равны нулю.
5. Вычислите $a_5(f)$, если $f(x) = x + 4$, $-\pi < x \le \pi$.
6. Каков общий вид ряда Фурье функции (с периодом $T = 2\pi$)?
7. В чем заключается задача гармонического (спектрального) синтеза функции?
8. Какой формулой выражается сумма ряда Фурье функции f в точке x?
9. Найдите сумму ряда $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ в точке $x_0 = 6\pi + 1$, если $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, где $f(x) = x^3 - \ln(1 + |x|)$.
10. Что означает утверждение «Ряд Фурье функции f сходится в пространстве L_2 к функции f»?
11. Какой тригонометрический многочлен порядка n является наиболее близким к заданной функции f в пространстве L_2?

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1988.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2 – М.: Высшая школа, 1981.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 – М.: Наука, 1966.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Т.2 – М.: Наука, 1984.