МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Непрерывные случайные величины

Методические указания и индивидуальные
задания к МОД-18 «Ритм»

КУРСК 1999

Составитель Г.И. Тюленева
УДК 519.2

Непрерывные случайные величины: Методические указания и индивидуальные задания к МОД-18 «Ритм» /Курск. гос. техн. ун-т; Сост. Г. И. Тюленева. Курск, 1999. 43с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению МОД-18 и индивидуальные задания для студентов.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Табл.3.Ил.9.Библиогр.:3 назв.

Рецензент канд. техн. наук, доц. И.Н. Росляков

Редактор Е.А. Припачкина

ЛР №020280 от 09.12.96. ПЛД №50-25 от 1.04.97.
Подписано в печать 6.07.99. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л.2,68 Уч.-изд. л. 2,88 Тираж 100 экз. Заказ 124 . Бесплатно.
Курский государственный технический университет.
Подразделение оперативной полиграфии Курского государственного технического университета.
Адрес университета и оперативной полиграфии:
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. 4
1. Основные теоретические положения. 5
1.1. Непрерывные случайные распределения. Плотность распределения...5
1.2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин..6
1.3. Некоторые распределения непрерывных случайных величин..8
1.4. Распределение функции одного случайного аргумента. 9
2. Теоретические упражнения. 10
3. Индивидуальные задания. 13
3.1. Задание 1. 13
3.2. Задание 2. 14
3.3. Задание 3. 14
3.4. Задание 4. 16
4. Примеры решения задач. 23
5. Применение ЭВМ. 37
6. Контрольные вопросы. 42

Библиографический список..43

ВВЕДЕНИЕ

Данный типовой расчет представляет собой один из модулей РИТМ; выполнение его способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмичную работу студента в течение семестра, повышает роль самостоятельной работы.

В индивидуальных заданиях приводятся теоретические и практические упражнения, контрольные вопросы к типовому расчету по теме "Непрерывные случайные величины".

Индивидуальные задания составлены в расчете на три уровня сложности.

При выборе заданий следует использовать параметры n и N, где n– номер студента в журнале преподавателя, N - последняя цифра числового шифра группы.

Студенты, выбравшие задания первого уровня сложности, выполняют теоретическое упражнение под номером n, практические задания под номерами 1, 2, 3б.

Студенты, выбравшие задания второго уровня сложности, выполняют теоретическое упражнение под номером n, практические задания под номерами 1, 2, 3а, 3б, 3в.

Студенты, выбравшие задания третьего уровня сложности, выполняют теоретическое упражнение под номером n и все практические упражнения 1, 2, 3, 4.

При выборе вариантов k и l в заданиях 1, 2, 3 используются формулы:

$$k=n(\mathrm{mod}\ 4)+1 \quad , \quad l=k+4i,$$

где n(mod 4) – остаток от деления числа n на4, i=0,1,2.

Теоретические сведения по данному разделу курса математики смотрите в [1-3].

1. Основные теоретические положения

1.1. Непрерывные случайные распределения. Плотность распределения

Пусть x - действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что СВ X примет значение меньшее x, называется **функцией распределения** F(x),т.е. F(x)=P(X<x).

Случайную величину (СВ) называют **непрерывной**, если ее функция распределения есть непрерывная кусочно – дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Функция распределения имеет следующие свойства:

Свойство 1: $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2: $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Следствие 1: $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$.

Следствие 2: $P(x = a) = 0$, для любого a.

Свойство 3: Если $x \in (a,b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие: Если $x \in R$, то $\lim\limits_{X \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{X \to +\infty} F(x) = 1$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения F(x):

$$f(x) = F'(x).$$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения F(x) по формуле:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

и вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу (a, b):

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Плотность распределения имеет следующие свойства:

1. $f(x) \geq 0$. 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1.2. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием M(X) непрерывной случайной величины X называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx, \quad \text{если } x \in [a,b].$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad \text{если } x \in R.$$

Дисперсией D(X) непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения X-M(X).

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx, \quad \text{где } x \in [a,b].$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx, \quad \text{где } x \in R.$$

Свойства математического ожидания и дисперсии.

Если X и Y взаимно независимые CB, а C - постоянная величина, то.

1. $M(C)=C$.
2. $M(CX)=CM(X)$.
3. $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$.
4. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

1. $D(C)=0$.
2. $D(CX)=C^2D(x)$.
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.
4. $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.
5. $D(X\cdot Y)=M[(X\cdot Y)^2]-[M(X\cdot Y)]^2$.

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины, называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Если Y=φ(X)- функция случайного аргумента X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, то

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx,\quad D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)f(x)dx-M[\varphi(X)]^2$$

В частности, если возможные значения принадлежат интервалу (a,b), то

$$M[\varphi(X)]=\int_{a}^{b}\varphi(x)f(x)dx,\quad D[\varphi(X)]=\int_{a}^{b}\varphi^2(x)f(x)dx-M[\varphi(X)]^2.$$

Начальный и центральный теоретические моменты порядка k непрерывной случайной величины X определяются равенствами:

$$v_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx;\qquad \mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^k\cdot f(x)dx.$$

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения.

Медианой Me(X) непрерывной случайной величины называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X < Me\,(x)] = P[X > Me\,(x)]\,.$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

1.3. Некоторые распределения непрерывных случайных величин

I. Равномерное распределение. Говорят, что СВ X имеет равномерное распределение на участке (a,b), если ее плотность f(x) на этом участке постоянна:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & при\ x\in(a,b),\\ 0 & при\ x\notin(a,b).\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия для равномерного распределения имеют вид:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

II. Нормальное распределение. Говорят, что непрерывная СВ X имеет нормальное распределение, если ее плотность имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2(\sigma)^2}}$, где a есть математическое ожидание, σ-среднее квадратическое отклонение.

$$M(X) = a, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Плотность нормированного распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}, \text{ где } M(X)=0,\ \sigma(X) = 1.$$

Функция нормированного распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Тогда $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ - вероятность заданного отклонения.

$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$ - правило трех сигм.

III. Показательное распределение. Говорят, что непрерывная СВ X имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если плотность $f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0 \end{cases}$, где λ -постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & при\ x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики для показательного закона распределения:

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время, длительностью t.

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t)=e^{-\lambda t}$, где λ -интенсивность отказов.

1.4. Распределение функции одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению СВ X соответствует одно возможное значение СВ Y, то Y называют функцией случайного аргумента X и записывают $Y=\varphi(X)$.

Если X- непрерывная СВ, заданная плотностью распределения $f(x)$, и если $y=\varphi(x)$ - дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x=\psi(y)$, то плотность распределения находят из равенства

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|.$$

2. Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция распределения F(x)- неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1),\ \ x_2 > x_1$.

2. Доказать, что вероятность того, что непрерывная СВ X примет одно определенное значение, равна нулю, т.е. $P(X = x_1) = 0$.

3. Доказать, что если значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то 1) $F(x) = 0$ при $x \leq a$; 2) $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

4. Доказать, что $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

5. Доказать, что зная плотность распределения f(x) можно найти функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

6. Доказать, что плотность распределения - неотрицательная функция $f(x) \geq 0$.

7. Доказать, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

8. Доказать, что математическое ожидание нормального распределения равно параметру a.

$$M(X) = a.$$

9. Доказать, что среднее квадратичное отклонение нормального распределения равно параметру σ.

$$\sigma(x) = \sigma.$$

10. Исследовать функцию

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$$

методами дифференциального исчисления.

11. Доказать, что вероятность попадания в заданный интервал (α, β) нормальной случайной величины X находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

12. Доказать, что вероятность заданного отклонения нормальной случайной величины X от математического ожидания a вычисляется по формуле

$$P(/x - a/ < \delta) < 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

13. Доказать, что математическим ожиданием непрерывной СВ X с плотностью распределения $f(x)$ называется выражение

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

14. Доказать, что если X и Y-непрерывные случайные величины, то

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

15. Доказать, что для непрерывных величин X и Y

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

16. Показать, что математическое ожидание равномерно распределенной СВ X с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in (a,b)$ имеет вид

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

17. Показать, что дисперсия равно распределенной СВ X с плотностью $f(x)=\frac{1}{b-a}$, $x\in(a,b)$ вычисляется по формуле

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

18. Показать, что математическое ожидание непрерывной случайной величины X, имеющей показательное распределение $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$ находится по формуле

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

19. Доказать, что дисперсия $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, для непрерывной случайной величины X с показательным законом распределения, если плотность $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}, x\geq 0.$

20. Определить интегральный закон распределения СВ с плотностью $f(x)=\frac{1}{b-a}, x\in(a,b)$, построить график.

21. Доказать что дисперсию непрерывной СВ X можно вычислить по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-[M(x)]^2.$$

22. Доказать, что функция Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ нечетна: $\Phi(-x)=\Phi(x)$.

23. Доказать, что $P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t)$, где $a=M(X)$, $\sigma^2=D(X)$, Ф(t) - функция Лапласа.

24. Доказать, что если непрерывная СВ X распределена по показательному закону, то вероятность попадания X в интервал (a, b) равна $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

25. Доказать, что $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

26. Доказать, что интервал (a, b), на котором имеет место равномерное распределение, обязательно конечен.

27. Доказать, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.

28. Доказать, что если СВ X подчинена нормальному закону, то $DX = \sigma^2$.

29. Определить интегральный закон распределения $F(x)$, если СВ X распределена равномерно на интервале (a, b).

30. Доказать, что если непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, то вероятность того, что X примет значение меньше математического ожидания MX, не зависит от величины параметра λ.

3. Индивидуальные задания

3.1. Задание 1

При выборе номера упражнения используется формула: $k = n(\mathrm{mod}4)+1$.

Случайная величина X задана функцией распределения F(x) (см. табл.1).

Найти:

1. Вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

   а) меньше a;

   б) не меньше b;

   в) заключенное в интервале (c,d).

2. Вероятность того, что в результате n1 независимых испытаний величина X ровно m раз примет значение, принадлежащее интервалу (c,d).

3. Возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью p случайная величина X в результате испытания примет значение, больше x_1.

4. Плотность распределения f(x).

3.2. Задание 2

При выборе номера упражнения используется формула $l = k + 4 \cdot i$, где i=0,1,2.

Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения f(x) (табл.2).

Найти:

1) параметр γ;

2) функцию распределения F(x);

3) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее (c, d);

4) M(X)-математическое ожидание случайной величины X;

5) M(aX+d)-математическое ожидание СВ (aX+d);

6) $M_0(X)$-моду X;

7) $M_e(X)$- медиану X;

8) D(X)-дисперсию X;

9) среднее квадратическое отклонение X;

10) математическое ожидание функции $Y = \varphi(x)$, дисперсию функции $Y = \varphi(x)$;

11) начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков;

12) построить графики функций f(x) и F(x).

3.3. Задание 3

В задачах А , Б , В , Г номер упражнения выбирается по формуле $k = n(\mathrm{mod}\,4)+1$.

А. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на интервалах (a, b) и $(c, d+N)$соответственно(табл.3).

Найти:

1) плотность f(x) и функцию F(x) равномерного распределения, построить графики;

2) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

3) математическое ожидание произведения M(XY);

4) дисперсию произведения D(XY).

Б. Случайная величина X имеет нормальное распределение, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти:

1) случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X)=a$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(X)=\sigma$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадает величина X в результате испытания;

2) плотность f(x) и функцию F(x) нормального распределения, построить графики;

3) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, асимметрию A_s, эксцесс E_k, моду M_o, медиану M_e нормального распределения;

4) вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (c, d+N).

В. Случайная величина X имеет показательное распределение, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\, x<0\\ \lambda_1\cdot e^{-\lambda_1 x}, & при\, x\geq 0.\end{cases}$$

Найти:

1) дисперсию D(X), среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ показательного распределения;

2) R(t) - функцию надежности;

3) плотность f(x) и функцию F(x) показательного распределения, построить графики;

4) математическое ожидание M(X).

Г. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, второго - $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью t часов:

а) оба элемента откажут;

б) оба элемента не откажут;

в) только один элемент откажет;

г) хотя бы один элемент откажет.

3.4. Задание 4

Дана случайная величина $Y = \varphi(X)$, параметры распределения случайной величины X уже найдены (см.табл.2). Определив предварительно плотность распределения $g(y)$ величины Y, найти:

1)функцию распределения G(y);

2)математическое ожидание $M(Y)$ функции Y;

3)дисперсию $D(Y)$ функции Y.

Таблица 1

Условия к заданию 1

n	F(x)	a	b	c	d	m	n1	P
1	$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le -1\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, -1<x\le\frac{1}{3}\\ 1, \text{при } x>\frac{1}{3}\end{cases}$	-2	1/6	-1	0	2	5	0,1
2		-1	1	-0,5	0	3	4	0,2
3		0	$-\frac{1}{5}$	-1	1/4	3	5	0,3
4		1/2	0	0	1/4	2	4	0,1
5		$-\frac{1}{2}$	-1	0	1/3	2	3	0,2
6	$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le -2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, -2<x\le 2\\ 1, \text{при } x>2\end{cases}$	$-\sqrt{3}$	0	-2	0	2	5	0,1
7		-2	-1	-2	-1	3	6	0,2
8		-1	$\sqrt{3}$	-1	0	3	4	0,3
9		2	1	1	2	4	5	0,1
10		$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$	2	6	0,2
11	$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 2\\ 0.5(x-2), 2<x\le 4\\ 1, \text{при } x>4\end{cases}$	1	0	1	3	2	4	0,1
12		0	3	1	4	2	6	0,2
13		3	1	2	3	3	5	0,2
14		2	3,5	2,5	4	4	5	0,3
15		4	0,5	3	4	5	6	0,1
16	$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le 0\\ x^2, 0<x\le 1\\ 1, \text{при } x>1\end{cases}$	-1	0	-1	0,5	2	4	0,1
17		1/2	1,5	0	0,25	2	3	0,2
18		0	1/2	0,5	1	3	5	0,1
19		1	-1	1/4	1/2	3	4	0,2
20		-2	1	0	1/2	4	5	0,3
21	$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le -1\\ \frac{1}{3}(x+1), -1<x\le 2\\ 1, \text{при } x>2\end{cases}$	-2	-1	-1	1	3	5	0,1
22		0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	4	6	0,3
23		1/2	0	-1	-0,5	3	4	0,1
24		-1	1/2	1	1,5	4	5	0,2
25		-3	1	0	2	4	6	0,1

Продолжение табл. 1

n	F(x)	a	b	c	d	m	nl	P
26	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1-\frac{\pi}{2}\\ \cos(x-1), 1-\frac{\pi}{2}<x\le 1\\ 1, \text{ при } x>1\end{cases}$	1-π/3	1-π/2	1-π/2	1-π/3	3	6	0,2
27		1-π/4	1-π/3	1-π/3	1-π/6	2	[illegible]	0,3
28		1-π/2	1-π/4	1-π/3	1-π/4	4	7	0,1
29		1-π/6	1	1-π/4	1-π/6	4	6	0,2
30		1	1-π/6	1-π/2	1-π/4	3	5	0,3
31	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le -2\\ \frac{1}{16}(x+2)^2, -2<x\le 2\\ 1, \text{ при } x>2\end{cases}$	-1	2	-1	6	2	3	0.1
32		-2	0	-1	2	3	4	0.2
33		-3	-1	0	1	4	5	0.3
34		0	1	0	2	2	4	0.1
35		1	-2	1	2	3	6	0.2
36	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0\\ \frac{1}{9}x^2, 0<x\le 3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$	-1	0	0	1	2	4	0.3
37		0	1	0	2	4	5	0.2
38		1	2	1	2	3	6	0.1
39		-2	-1	1	3	3	5	0.2
40		2	2	2	3	3	4	0.2
41	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1\\ \frac{e^4}{2}(x-1)\cdot e^{-2(x-1)}, 1<x\le 3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$	0	1	1	2	4	5	0.1
42		1	0	1,5	3	3	6	0.2
43		2	2	0	2	2	7	0.3
44		-1	3	0	3	3	5	0.2
45		3	-1	2	3	4	6	0.1
46	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 1\\ \frac{1}{9}(x-1)^2, 1<x<4\\ 1, \text{ при } x>4\end{cases}$	-1	1	1	2	3	4	0.1
47		0	-2	2	4	2	3	0.1
48		1	0	2	3	4	5	0.2
49		2	2	1	3	2	6	0.2
50		3	4	0	2	2	4	0.3

Таблица 2

Условия к заданию 2

n	f(x)	$\varphi(X)$	Параметры		c	d
1	$f(X)=\begin{cases}0, & при\ x\le -a,\\ \gamma(x+a), & -a<x\le 0,\\ \gamma(a-x), & 0<x\le a,\\ 0, & при\ x>a\end{cases}$	NX-a	a=1		0	2
2			a=2		-1	1
3			a=3		-2	3
4			a=4		-5	0
5			a=5		2	6
6	$f(X=\begin{cases}0, & при\ x\le a,\\ \gamma, & a<x\le \dfrac{a+b}{2},\\ 2\gamma, & \dfrac{a+b}{2}<x\le b,\\ 0, & при\ x>b\end{cases}$	-NX+a	a=1,	b=3	0	2
7			a=3,	b=7	6	8
8			a=2,	b=5	3	5
9			a=-2,	b=4	0	1
10			a=-1,	b=5	-1	2
11	$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le -a,\\ \gamma(x+a)^2, & -a<x\le 0,\\ \gamma(x-a)^2, & 0<x\le a,\\ 0, & при\ x>a\end{cases}$	-NX-a	a=1		-1	0
12			a=2		-1	1
13			a=3		-2	1
14			a=1/2		-1	0
15			a=1/3		-1/4	1/4
16	$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le a,\\ \gamma\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2, & a<x\le b,\\ 0, & при\ x>b\end{cases}$	NX+a	a=1,	b=3	0	2
17			a=3,	b=7	3	5
18			a=-1,	b=3	0	2
19			a=-3,	b=1	0	2
20			a=-1,	b=1	-2	1/2
21	$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ \gamma\dfrac{b-a}{a}x, & 0<x\le a,\\ \gamma(b-x), & a<x\le b,\\ 0, & при\ x>b\end{cases}$	NX-a	a=1,	b=2	0	3/2
22			a=1,	b=3	1/2	3
23			a=2,	b=3	1	2
24			a=1/2	b=1	0	1/2
25			a=1,	b=3/2	1/2	3

Продолжение табл. 2

n	f(x)	$\varphi(X)$	Параметры		c	d
26	$f(x)=\begin{cases}0, & при\, x\le a,\\ \gamma(x-a)\cdot e^{-\lambda(x-a)}, & x>a,\end{cases}$	NX-a	a=2,	$\lambda=1$	0	2
27			a=5,	$\lambda=2$	0	10
28			a=-1,	$\lambda=\sqrt{2}$	0	2
29			a=2,	$\lambda=\sqrt{5}$	-3	-1
30			a=4,	$\lambda=1$	0	1
31	$f(x)=\begin{cases}0, & при\; x\le a,\\ \gamma\cdot x, & a<x\le b,\\ 0, & при\; x>b\end{cases}$	-NX+a	a=0,	b=2	1	3
32			a=1,	b=4	2	3
33			a=3,	b=7	2	4
34			a=4,	b=5	4	7
35			a=0,	b=3	0	2
36	$f(x)=\begin{cases}0, & при\; x\le a,\\ \gamma(x-a), & a<x\le b,\\ 0, & при\; x>b\end{cases}$	-NX-a	a=1,	b=3	1	2
37			a=-1,	b=1	0	2
38			a=6,	b=8	1	4
39			a=-5,	b=-1	2	4
40			a=2,	b=6	-4	0
41	$f(x)=\begin{cases}0, & при\; x\le a,\\ \gamma\cdot x^2, & a<x\le b,\\ 0, & при\; x>b\end{cases}$	-NX+a	a=0,	b=2	-1	1
42			a=3,	b=4	3	7/2
43			a=-1,	b=1	0	2
44			a=1,	b=2	-1	3/2
45			a=-1,	b=2	-3	0
46	$f(x)=\begin{cases}0, & при\; x\le a,\\ \gamma(x-a)^2, & a<x\le b,\\ 0, & при\; x>b\end{cases}$	NX-a	a=1,	b=4	1	4
47			a=10,	b=12	10	12
48			a=-1,	b=1	-1	1
49			a=-5	b=-3	-5	-3
50			a=-2,	b=0	-2	0

Таблица 3

Условия к заданию 3

n	a	b	c	d	σ	λ_1	λ_2	δ	t
1	2	5	2	4	1	0,01	0,1	2	3
2	10	13	2	5	2	0,03	0,2	3	4
3	0	3	4	6	3	0,05	0,3	4	5
4	-1	1	1	5	4	0,02	0,4	5	6
5	-2	1	0	2	5	0,1	0,5	6	7
6	-2	2	0	4	6	0,2	0,01	7	8
7	-1	5	1	3	7	0,3	0,02	8	9
8	-1	4	0	3	0,5	0,4	0,03	0,1	10
9	10	20	3	7	0,6	0,5	0,04	0,2	12
10	10	40	0	3	0,7	0,01	0,05	0,3	2
11	12	16	2	4	0,8	0,02	0,06	0,4	3
12	10	15	-1	3	0.9	0,03	0,1	0,5	4
13	-2	3	2	4	1	0,04	0,2	0,6	5
14	21	24	3	6	2	0,05	0,3	0,7	6
15	2	6	5	8	3	0,1	0,4	0,8	7
16	-3	0	-1	1	4	0,2	0,5	0,9	8
17	-3	1	0	3	5	0,3	0,6	1	9
18	-3	2	0	4	6	0,4	0,01	2	10
19	31	35	1	3	7	0,5	0,02	3	11
20	23	26	1	4	8	0,01	0,03	4	12
21	3	7	3	6	0,1	0,02	0,04	0,2	2
22	10	30	1	5	0,2	0,03	0,05	0,3	3
23	11	14	1	6	0,3	0,04	0,06	0,4	4
24	0	5	1	5	0,4	0,05	0,1	0,5	5
25	-1	3	2	5	0,5	0,1	0,2	0,6	6

Продолжение табл. 3

n	a	b	c	d	σ	λ_1	λ_2	δ	t
26	11	13	2	8	1	0,1	0,3	0,1	2
27	11	15	1	7	2	0,2	0,4	0,2	3
28	12	14	3	6	3	0,3	0,5	0,3	4
29	12	15	-1	5	4	0,4	0,6	0,4	5
30	9	11	-1	8	5	0,5	0,7	0,5	6
31	8	11	0	5	6	0,6	0,8	0,6	7
32	7	12	0	3	7	0,7	0,1	0,7	8
33	6	10	-2	3	8	0,01	0,2	0,8	9
34	5	11	-3	5	0,1	0,02	0,3	0,2	10
35	4	9	-3	3	0,2	0,03	0,4	0,3	11
36	3	8	1	6	0,3	0,04	0,5	0,4	12
37	-5	-2	2	10	0,4	0,05	0,6	0,5	2
38	-5	2	2	5	0,5	0,06	0,7	0,6	3
39	-4	3	1	6	0,6	0,07	0,8	0,7	4
40	-6	5	1	4	0,7	0,1	0,01	0,8	5
41	-7	3	0	5	0,8	0,2	0,02	0,9	6
42	-8	0	1	5	0,9	0,3	0,03	1	7
43	-7	0	1	6	1	0,4	0,04	2	8
44	-6	1	2	4	2	0,5	0,05	3	9
45	-5	1	2	7	3	0,6	0,06	4	10
46	-4	3	3	7	4	0,7	0,7	5	11
47	-2	5	4	7	5	0,8	0,08	6	12
48	-1	5	1	5	6	0,01	0,1	7	2
49	0	10	1	6	7	0,02	0,2	8	3
50	2	8	-5	0	8	0,03	0,3	9	4

4. Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & если \;\; x<2, \\ (x-2)^2, & если \;\; 2\le x\le 3, \\ 1, & если \;\; x>3. \end{cases}$$

Найти:

1. Вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 1;

б) не меньше 2,5;

в) заключенное в интервале (1; 2,5).

2. Вероятность того, что в результате $n=7$ независимых испытаний величина X ровно $m=2$ раза примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2,5).

3. Возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью $p=0,75$ случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

4. Плотность распределения $f(x)$.

Решение: 1, а) так как при $x<2$ функция $F(x)=0$, то $F(1)=0$, т.е. $P(X<1)=0$;

1, б) события $X\ge 2,5$ и $X<2,5$ противоположны, поэтому

$$P(X\ge 2,5)+P(X<2,5)=1.$$

Отсюда, учитывая, что

$$P(X<2,5)=F(2,5)=[(x-2)^2]_{x=2,5}=(2,5-2)^2=0,25,$$

получим

$$P(X\ge 2,5)=1-0,25=0,75;$$

1, в) вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале (1; 2,5), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(1<X<2,5)=F(2,5)-F(1)=[(x-2)^2]_{x=2,5}-0=0,25-0=0,25.$$

2. Вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале (1; 2,5) $p=P(1<X<2,5)=0,25$, $q=1-p=1-0,25=0,75$; вероятность того, что в результате $n=7$ независимых испытаний интересующее нас собы-

тие наступит ровно m = 2 раза найдем по формуле Бернулли:

$$P_7(2) = C_7^2 \cdot p^2 \cdot q^5 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot (0.25)^2 \cdot (0.75)^5 \approx 0.31.$$

3. События $X \le x_1$ и $X > x_1$ противоположные, поэтому

$$P(X \le x_1) + P(X > x_1) = 1.$$

Следовательно,

$$P(X \le x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - 0.75 = 0.25.$$

Так как

$$P(X = x_1) = 0, \text{ то } P(X \le x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = 0.8.$$

По определению функции распределения,

$$P(X < x_1) = F(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 < 2 \\ (x_1 - 2)^2, & \text{если } 2 \le x_1 \le 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Следовательно, $(x_1-2)^2 = 0.25$, отсюда $x_1 = 2.5$.

4. Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 2, \\ 2(x-2), & \text{если } 2 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 2. Непрерывная СВ *X* задана плотностью распределения на всей оси Ох равенством $f(x) = \dfrac{2\gamma}{1 + x^2}$.

Найти:

1) параметр γ;
2) вероятность того, что *X* примет значение, заключенное в интервале $(0, \pi/4)$;
3) функцию *F(x)*;
4) числовые характеристики $M(X)$, $M(2X+1)$, $M_0(X)$, $M_e(X)$.

Решение: 1. Плотность распределения должна удовлетворять условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Потребуем, чтобы это условие выполнялось для заданной функции:

$$2\gamma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=1\ , \qquad \text{отсюда} \qquad \gamma=\frac{1}{2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}}$$

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\int_{A}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}arctgx\Big|_{A}^{0}+\lim_{B\to\infty}arctgx\Big|_{0}^{B}=$$

$$=\lim_{A\to\infty}(arctg0-arctgA)+\lim_{B\to\infty}(arctgB-arctg0)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Таким образом, окончательно получим $\gamma=\dfrac{1}{2\pi}.$

2. Воспользуемся формулой $P(a<x<b)=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx.$

По условию $a=0, b=\dfrac{\pi}{4}, f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}.$ Следовательно, искомая вероятность

$$P(0<x<\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}arctgx\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{1}{\pi}(arctg\frac{\pi}{4}-arctg0)=\frac{1}{\pi}.$$

3. Найдем функцию распределения F(x). Используем формулу

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx.$$

Следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{\pi}\int_{A}^{x}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{\pi}x\Big|_{A}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to-\infty}(arctgx-arctgA)=\frac{1}{\pi}(arctgx+\frac{\pi}{2}).$$

4. Математическое ожидание величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ох, определяется равенством

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx,\qquad M[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx.$$

Подставив $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\varphi(x)=2x+1$, получим

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{2xdx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\lim_{A\to+\infty}ln(1+x^2)\Big|_{-A}^{0}+\lim_{A\to+\infty}ln(1+x^2)\Big|_{0}^{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(ln1-\lim_{A\to+\infty}ln(1+A^2)+\lim_{A\to+\infty}ln(1+A^2)-ln1\right)=0.$$

Найдем математическое ожидание СВ $\varphi(x)=2x+1$.

$$M(2X+1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2})=\frac{1}{\pi}(I_1+I_2).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}=0,\qquad I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

Таким образом, окончательно получаем $M(2X+1)=\dfrac{\pi}{\pi}=1.$

Легко убедиться, что функция $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ на всей числовой оси O_x имеет максимум, при x=0, следовательно мода $M_0(X)=\dfrac{1}{\pi}$.

Кривая распределения симметрична относительно прямой x=0, поэтому $M(X)=0$ и медиана $M_e(X)=0$.

ЗАДАЧА 3. Непрерывная СВ X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & при\ x\in(0;\pi)\\ 0, & при\ x\notin(0;\pi).\end{cases}$$

Найти:
1) $D(X)$, $D(3X+2)$;
2) начальные ν_3, ν_4 и центральные μ_3, μ_4 моменты третьего и четвертого порядков;
3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение: 1. Найдем дисперсию СВ X по формуле

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Подставив сюда $M(X)=\dfrac{\pi}{2}$ (кривая симметрична относительно прямой $x=\dfrac{\pi}{2}$), $a=0$, $b=\pi$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x$ получим:

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x\,dx-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Дважды интегрируя по частям, найдем $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=\pi^2-4.$

Таким образом, окончательно получим $D(X)=\dfrac{\pi^2-8}{4}$.

Найдём дисперсию D(3X+2):

$$D(3X+2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3x+2)^2\sin x dx-\left[M(3X+2)\right]^2.$$

Математическое ожидание

$$M(3X+2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3x+2)\cdot\frac{1}{2}\sin x dx=\frac{3}{2}\pi+2.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^{\pi}(3x+2)^2\sin x dx=(3\pi+2)^2-32.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$D(3X+2)=\frac{1}{2}\left[(3\pi+2)-32\right]-\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)^2=\frac{9}{4}\pi^2-18.$$

2. По формуле $\nu_k=\int_0^{\pi}x^k f(x)dx$ найдем начальные моменты третьего и четвертого порядков:

$$\nu_3=\int_0^{\pi}x^3\frac{1}{2}\sin x dx=\frac{\pi^3}{2}-3\pi,$$

$$\nu_3=\int_0^{\pi}x^4\frac{1}{2}\sin x dx=\frac{\pi^4}{2}-6\pi^2+24.$$

Найдем центральные моменты, воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные:

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\cdot\nu_2+2\nu_1^3;$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\cdot\nu_3+6\nu_1^2\cdot\nu_2-3\nu_1^4.$$

Подставив в эти формулы ранее найденные начальные моменты, получим:

$$\mu_3 = \frac{\pi^3}{2} - 3\pi - 3\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - 2\right) + 2\frac{\pi^3}{8} = 0,$$

$$\mu_4 = \frac{\pi^4}{2} - 6\pi^2 + 24 - 4\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^3}{2} - 3\pi\right) + 6\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{2} - 2\right) - 3\frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24.$$

3. Построим графики функций f(x) и F(x), где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & x \in (0;\pi), \\ 0, & при\ x \notin (0;\pi); \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 0, \\ \frac{1}{2} - \frac{\cos}{2}, & при\ 0 < x \le \pi, \\ 1, & при\ x > \pi. \end{cases}$$

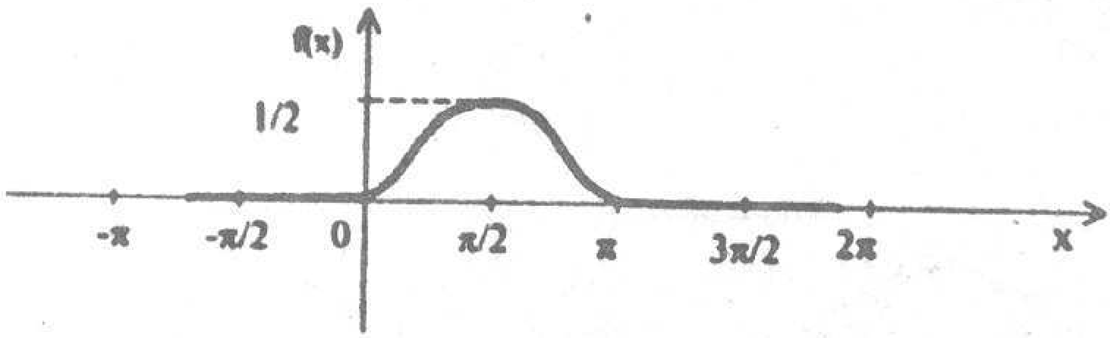

Рис.1. График дифференциальной функции f(x)

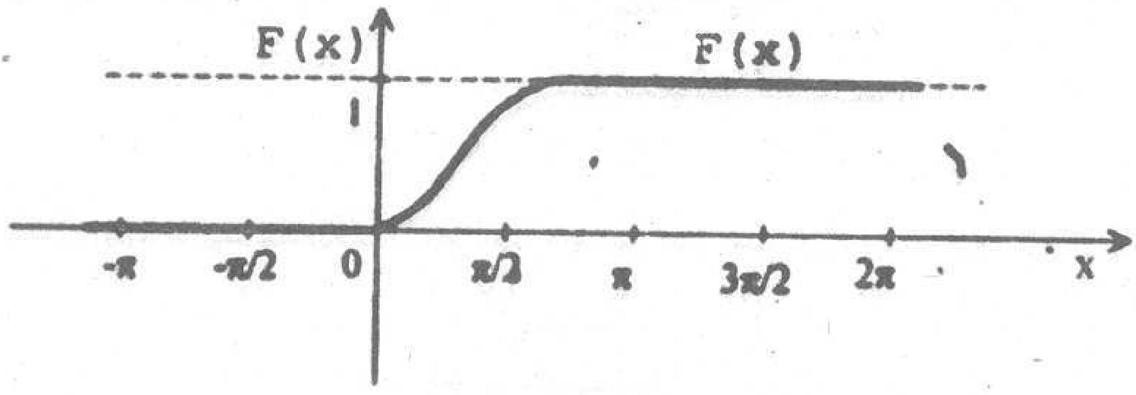

Рис.2. График интегральной функции F(x)

ЗАДАЧА 4. Случайные величины X и Y независимы и имеют равномерное распределение на интервалах (1,3) и (2,8) соответственно. Найти:

1) плотность f(x) и функцию F(x) равномерного распределения, построить графики;

2) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), σ(X);

3) математическое ожидание произведения M(XY);

4) дисперсию произведения D(XY).

Решение: 1. Плотность равномерного распределения f(x)=1/(b-a), где (b-a)-длина интервала, в котором заключены возможные значения X. Подставив a=1, b=3. Найдем:

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & при \quad x\in(1,3),\\ 0, & при \quad x\notin(1,3).\end{cases}$$

График плотности распределения изображен на рис.3.
Функция F(x) равномерного распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le a\\ (x-a)/(b-a), & при\ a<x\le b\\ 1, & при\ x>b.\end{cases}$$

В рассматриваемой задаче a=1, b=3, получим

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 1\\ (x-1)/2, & при\ 1<x\le 3\\ 1, & при\ x>3.\end{cases}$$

Искомая функция распределения изображена на рис.4

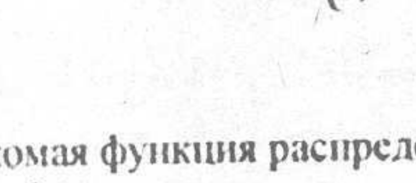

Рис.3

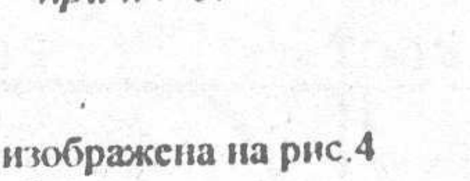

Рис.4

2. Математическое ожидание и дисперсию СВ, равномерно распределенной в интервале (a,b) можно получить по формулам

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Подставив a=1, b=3, найдем M(x)=2, D(x)=$\frac{1}{3}$.

Среднее квадратичное отклонение $\sigma(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Математическое ожидание произведения M(XY) двух равномерно распределенных СВ X и Y на интервалах (1,3) и (2,8) соответственно $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$ M(X)=2, M(Y)=5, таким образом, $M(XY)=2\cdot 5=10$

4. Найдем дисперсию D(XY) произведения независимых СВ, распределенных равномерно: X-в интервале (a,b), Y-в интервале (c,d).

$D(X,Y)=M[(XY)^2]-[M(XY)]^2=M(X^2)\cdot M(Y^2)-[M(X)\cdot M(Y)]^2$. (*)

$M(X^2)$ можно найти по формуле

$$M[\varphi(x)]=\int_a^b\varphi(x)\cdot f(x)dx.$$

Подставив $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=\frac{1}{b-a}$ и выполняя интегрирование, получим

$$M(X^2)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}=\frac{3^2+1\cdot 3+1^2}{3}=\frac{13}{3},$$

где a=1, b=3. Аналогично найдем

$$M(Y^2)=\frac{d^2+c\cdot d+c^2}{3}=\frac{8^2+2\cdot 8+2^2}{3}=28,$$

где c=2, d=8.

Подставив M(X) = 2, M(Y) = 5, а также $M(X^2)=\frac{13}{3}$, $D(Y^2)=28$

в (*), окончательно получим

$$D(XY)=\frac{13}{3}\cdot 28-(2\cdot 5)^2=21\frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 5. Случайная величина *X* имеет нормальное распределение, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}. \qquad (**)$$

Найти:

1. Математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), σ(X), асимметрию A_s, эксцесс E_k, моду M_0, медиану M_e нормального распределения. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

2. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше δ=1, вероятность того, что в результате испытаний СВ X примет значение, заключенное в интервале (2,5).

3. СВ X распределена нормально с M(X)=a и σ(X)= σ. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадает величина X в результате испытания.

Решение:

1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение СВ X, распределенной по нормальному закону, найдем по виду плотности распределения:

$$f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}},$$

где $M(X)=a$, $\sqrt{D(X)}=\sigma$.

Для заданной плотности (**) математическое ожидание a=2, среднее квадратическое отклонение σ (X)=3, дисперсия $D(X)=9$. Асимметрия, эксесс, мода и медиана нормального распределения соответственно равны:

$$A_S=0,\ E_k=0,\ Mo=a=2,\ Me=a=2.$$

Кривая нормального распределения и интегральная кривая распределения изображены на рис.5 и рис.6 соответственно.

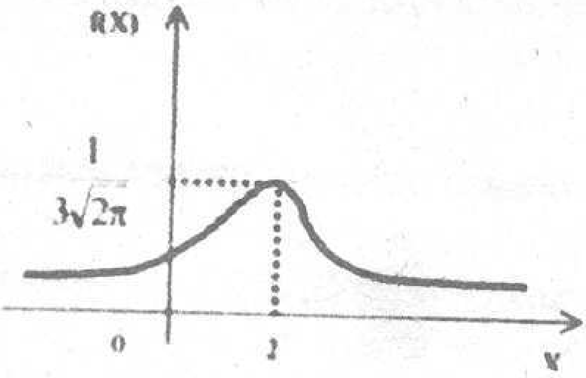

Рис.5

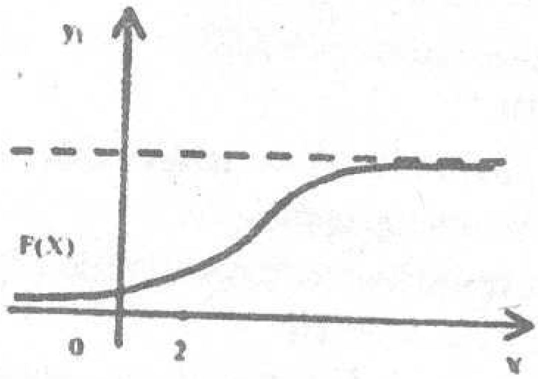

Рис.6

2 Найдем вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше $\delta>0$,

$$P(|x-a|<\delta) = 2\,\Phi(\delta/\sigma).$$

Подставив $a=2$, $\delta=1$, $\sigma=3$, получим $(\delta/\sigma)=1/3\approx 0{,}33$.

По таблице значений функций $\Phi(X)$ найдем $\Phi(0{,}33)=0{,}1293$, и тогда получим

$$P(|x-2|<1) = 2 \cdot 0{,}1293 = 0{,}2586.$$

Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β),

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha=2$, $\beta=5$, $a=2$, $\sigma=3$, получим
$P(2<X<5)=\Phi(1)-\Phi(0)$. По таблице находим $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(0)=0$. Искомая вероятность $P(2<X<5)=0{,}3413$.

3. Воспользуемся формулой правила трех сигм

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

Отсюда найдём интервал, симметричный относительно $M(X)=a$, в который с вероятностью 0,9973 в результате испытания попадает X:
$a-3\sigma < X < a+3\sigma$. Подставив $a=2$, $\sigma=3$, получим $-7<X<11$.

ЗАДАЧА 6. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}03$.

Найти:

1) плотность $f(x)$ и функцию $F(x)$ показательного распределения, построить графики;

2) математическое ожидание M(X), дисперсию D(X), σ(X), R(t) – функцию надежности.

Решение: 1. Плотность показательного (экспоненциального) распределения с параметром $\lambda = 0{,}03$ (рис.7) имеет вид

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 0{,}03 \cdot e^{-0{,}03x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Функция распределения показательного закона (рис.8)

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-0{,}03x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

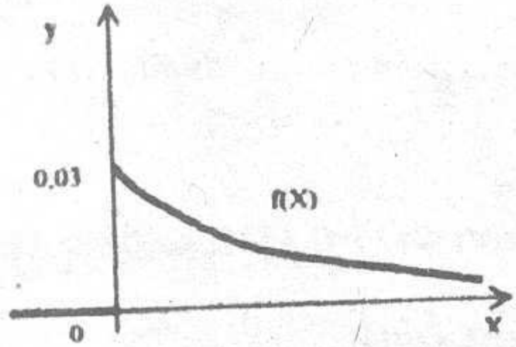

Рис.7

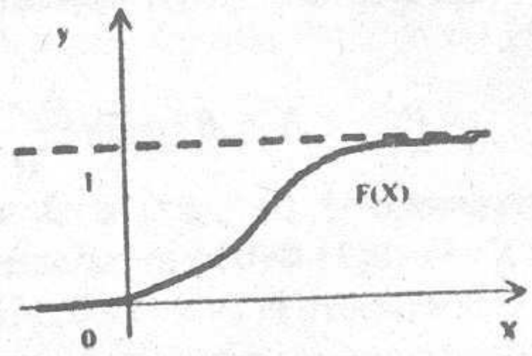

Рис.8

2. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}03}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0.03)^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}03}.$$

Функция надежности R(t) определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0{,}03t}, \text{ где } \lambda = 0{,}03.$$

ЗАДАЧА 7. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-e^{-0,1t}$, второго $F_2(t)=1-e^{-0,2t}$. Найти вероятность того, что за время t=5 часов :

1) оба элемента откажут;

2) оба элемента не откажут;

3) только один элемент откажет;

4) хотя бы один элемент откажет.

Решение: 1 Вероятность отказа первого элемента

$P_1=F_1(5)=1-e^{-0,1*5}=1-e^{-0,5}=1-0,6065=0,3935.$

Вероятность отказа второго элемента

$P_2=F_1(5)=1-e^{-0,2*5}=1-e^{-1}=1-0,3679=0,6321.$

Вероятность отказа обоих элементов

$P_1 \cdot P_2=0,3935*0,6321=0,2487.$

2. Вероятность безотказной работы первого элемента

$q_1=R_1(5)= e^{-0,1*5} = e^{-0,5} = 0,6065.$

Вероятность безотказной работы второго элемента

$q_2=R_2(5)= e^{-0,2*5} = e^{-1} = 0,3679.$

Вероятность безотказной работы обоих элементов

$q_1 \cdot q_2 =0,6065*0,3679=0,2231.$

3. Вероятность того, что только один элемент откажет

$P_1*q_2+P_2*q_1=0,3935*0.3679+0,6321*0,6065=0,5282.$

4. Вероятность того, что хотя бы один элемент откажет

$P=1-q_1*q_2 = 0,7769.$

ЗАДАЧА 8. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=3/8(x-1)^2$ в интервале (1,3); вне этого интервала $f(x)=0$. Определив предварительно плотность распределения $g(y)$ величины

$$Y=\varphi(x)=3x-1.$$

Найти:

1) функцию распределения $G(y)$;
2) математическое ожидание $M(Y)$;
3) дисперсию $D(Y)$ величины Y.

Решение: Найдем плотность $g(y)$ случайной величины Y. Так как функция $\varphi(x)=3x-1$ строго возрастающая, то плотность $g(y)$ будем искать по формуле

$$g(y)=f[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|,$$

где $\psi(y)=\dfrac{y+1}{3}$ и учитывая, что $f(x)=3/8(x-1)^2$, $|\psi'(y)|=1/3$, получим

$$g(y)=\frac{3}{8}\left(\frac{y+1}{3}-1\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{72}\cdot(y-2)^2.$$

Возможные значения Y заключены в интервале (2,8) (т.к. $y=3x-1$ и $1<x<3$, то $2<y<8$).

Контроль:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy=\int_2^8\frac{1}{72}(y-2)^2dy=\frac{1}{72}\frac{(y-2)^3}{3}\Bigg|_2^8=\frac{1}{72\cdot3}\left[6^3-0\right]=\frac{216}{216}=1.$$

1. Найдем функцию распределения $G(y)$. Используем формулу

$$G(y)=\int_{-\infty}^{y}g(y)dy.$$

Если $y\le2$, то $g(y)=0$, следовательно, $G(y)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dy=0.$

Если $2<y<3$, то

$$G(y)=\int_{-\infty}^{2}0\cdot dy+\int_2^y\frac{1}{72}(y-2)^2dy=\frac{1}{72}\frac{(y-2)^3}{3}.$$

Если $y > 8$, то

$$G(y) = \int_{x}^{2} 0 \cdot dy + \frac{1}{72}\int_{2}^{8} (y-2)^2 dy + \int_{8}^{y} 0 \cdot dy = \frac{1}{72}\frac{(y-2)^3}{3}\Big|_2^8 = 1.$$

Итак, искомая функция распределения

$$G(y) = \begin{cases} 0 & при\ y \le 2 \\ \dfrac{1}{216}(y-2)^3, & при\ 2 < y \le 8 \\ 1 & при\ x > 8. \end{cases}$$

2. Математическое ожидание заданной величины Y

$$M(Y) = \int_2^8 y \cdot g(y)\,dy = \int_2^8 y \cdot \frac{1}{72}(y-2)^2 dy = \frac{1}{72}\int_2^8 (y^3 - 4y^2 + 4y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{72}\left(\frac{y^4}{4} - 4\cdot\frac{y^3}{3} + 4\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^8 = \frac{1}{72}\left(\frac{8^4 - 2^4}{4} - \frac{4(8^3 - 2^3)}{3} + 2(8^2 - 2^2)\right).$$

Окончательно получим $M(Y) = 6{,}5$.

3. Дисперсия

$$D(Y) = \int_2^8 y^2 \cdot g(y)\,dy - [M(Y)]^2 = \frac{1}{72}\int_2^8 y^2 (y-2)^2 dy - (6{,}5)^2.$$

Вычислим

$$\frac{1}{72}\int_2^8 y^2(y^2 - 4y + 4)\,dy = \frac{1}{72}\int_2^8 (y^4 - 4y^3 + 4y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{72}\left(\frac{y^5}{5} - 4\frac{y^4}{4} + 4\frac{y^3}{3}\right)\Big|_2^8 = \frac{1}{72}\left(\frac{8^5 - 2^5}{5} - (8^4 - 2^4) + \frac{4}{3}(8^3 - 2^3)\right) = \frac{154}{3}.$$

Окончательно найдем

$$D(Y) = \frac{154}{3} - (6{,}5)^2 \approx 51{,}3 - 42{,}25 = 9{,}05.$$

5. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ

Использование программного продукта MATHCAD.

ЗАДАЧА 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1,\\ \frac{1}{3}(x+1) & при -1<x\le 2,\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значения:

1) не меньше 1.2;

2) заключенное в интервале (-0.5;1.3).

Решение: 1. Загрузим пакет MATHCAD и начнем составлять программу с левого верхнего угла рабочего поля.

x:=1.2 $$F(x):=\left|\begin{array}{lll}0 & if & x\le -1\\ \frac{1}{3}(x+1) & if & -1<x\le 2\\ 1 & if & x>2.\end{array}\right.$$

Искомая вероятность находится по формуле

$$P(X\ge x)=1-P(X<x)=1-F(x).$$

Поэтому получим на MATHCAD

1-$F(x)$: = 0.267 .

2. Найдем $P(x1<X<x2)=F(x2)-F(x1)$, где x1=-0, 5, x2=1,3.

Таким образом, получим

p=F(1.3) – F(-0.5)=0.6.

ЗАДАЧА 2. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что в результате x независимых испытаний величина X ровно 4 раза примет значение, принадлежащее интервалу (-0.5; 1.3)

Решение: Искомая вероятность $P_4(4)=C_7^4p^4\cdot q^3$, где

$$C_7^4=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4};$$

P – вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (-0,5;1,3); в нашем случае p=0,6;
q=1-p – вероятность противоположного события.
Таким образом, находим на MATHCAD

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(0.6)^4\cdot(1-0.6)^3 = 0.29.$$

ЗАДАЧА 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \textit{при}\quad x\le 2,\\ c\cdot(x-4)^2 & \textit{при}\quad 2<x\le 6,\\ 0 & \textit{при}\quad x>6.\end{cases}$$

Найти:

1) параметр c;
2) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее (2;4.5);
3) математическое ожидание MX и дисперсию DX;
4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\varphi(x)=5x+4$;
5) функцию распределения $F(x)$;
6) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Решение: 1 .

Плотность распределения $f(x)\ge 0$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Поэтому на MATHCAD получаем

a:=2 b:=6 c:=0.188.

$$f1(x):=(x-4)^2 \qquad c:=\frac{1}{\int_a^b f1(x)dx}.$$

Таким образом, плотность $f(x)=C\cdot f1(x)$ для $x\in(2,6)$.

2. Найдем вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(x1,x2)$. С помощью ЭВМ получим

$x1:=2$ $\quad$ $x2:=4.5$

$$P := \int_{x1}^{x2} f(x)dx \qquad P := 0.508.$$

3. Математическое ожидание непрерывных случайных величин X и $\varphi(x)$ находим соответственно по формулам:

$$MX = \int_a^b x \cdot f(x)dx, \qquad M\varphi(x) = \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность, $x \in (a,b)$.

В нашем случае на ЭВМ находим

$a:=2$ $\quad$ $b:=6$ $\quad$ $f(x):=c\cdot(x-4)^2$ $\quad$ $\varphi(x):=4x+5.$

$$MX := \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad MX := 4.$$

$$M\varphi := \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x)dx \qquad M\varphi = 21.$$

4. Найдем дисперсию величин X и $\varphi(x)$ соответственно по формулам для $x \in (a,b)$

$$DX = \int_a^b x^2 f(x)dx - (MX)^2.$$

$$D\varphi(x) = \int_a^b \varphi^2(x) \cdot f(x)dx - (MX(x))^2.$$

Поэтому на MATHCAD получим для нашей задачи

$a:=2$ $\quad$ $b:=6$ $\quad$ $f(x):=c\cdot f1(x)$ $\quad$ $MX:=4$

$\varphi(x):=4x+5$ $\quad$ $M\varphi:=21$

$$DX := \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - (MX)^2 \qquad DX := 2.4$$

$$D\varphi := \int_a^b (\varphi(x))^2 \cdot f(x)dx - (M\varphi)^2 \qquad DX := 38.4$$

5. Найдем функцию распределения *F(x)*. По определению

$$F(x) = P(x < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Очевидно, что для $x \le 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$$

Для $q < x \ \le 6$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \int_{2}^{x} 0.188(x-4)^2 dx.$$

Первый интеграл равен нулю, второй вычислим на MATHCAD

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt \rightarrow 0.063 \cdot (x-4)^3 + 0.504.$$

Для x > 6

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx + \int_{2}^{6} 0.188(x-4)^2 dx + \int_{6}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Первый и третий интегралы равны нулю, а второй интеграл равен единице (см.задачу 3.1).
Поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2, \\ 0.063 \cdot (x-4)^3 & \text{при} \quad 2 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

6. Построим графики дифференциальной f(x) и интегральной F(x) функций распределения. Воспользуемся широкими графическими возможностями MATHCAD. Составим программу:

$$f(x) := \begin{vmatrix} 0 \quad if \quad x \le 2 \\ 0.188\cdot(x-4)^2 \quad if \quad 2 < x \le 6 \\ 0 \quad if \quad x > 6 \end{vmatrix},$$

$$F(x) := \begin{vmatrix} 0 \quad if \quad x \le 2 \\ 0.063\cdot(x-4)^3 + 0.5 \quad if \quad 2 < x \le 6 \\ 1 \quad if \quad x > 6. \end{vmatrix}$$

Щелкним мышью по пункту меню **ГРАФИКИ**, выберем **ДЕКАРТОВ ГРАФИК.** В соответствующих местах укажем аргумент *x;* слева по нижней строке его значение 1, справа – 7; слева по вертикали функцию *f(x)* и ниже *F(x)*.

Появится изображение, представленное на рис. 1.

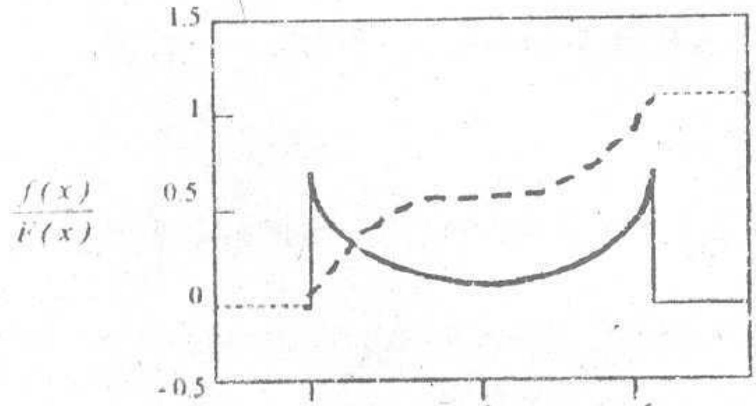

Рис.1. График дифференциальной функции f(x) ———
График интегральной функции F(x) ----------

6. Контрольные вопросы

1. Дискретные и непрерывные случайные величины.

2. Функция распределения F(x) непрерывной случайной величины X. Свойства интегральной функции распределения.

3. Плотность f(x) распределения вероятностей непрерывной случайной величины X. Свойства дифференциальной функции распределения.

4. График функции F(x).

5. Равномерный закон распределения непрерывной СВ. Графики функций F(x) и f(x) непрерывной СВ, распределенной равномерно.

6. Вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (α,β). Геометрическая интерпретация.

7. Математическое ожидание M(X) непрерывной СВ. Свойства M(X).

8. Дисперсия D(X) непрерывной случайной величины. Свойства D(X).

9. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины X. График плотности нормированной нормально распределенной СВ.

10. Показательный (экспоненциальный) закон распределения непрерывной СВ. График дифференциальной функции распределения f(x).

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Высш. шк.,1997.

2.Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1972.

3.Вентцель Е.С.Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука,1969.

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Непрерывные случайные величины

Методические указания и индивидуальные
задания к МОД-18 «Ритм»

КУРСК 1999