

## 8-й класс

**8.6** Доказать, что при  $n \in N$  число  $A = n^4 + 2n^2 + 9$  является составным.

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} A &= n^4 + 2n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 4n^2 = (n^2 + 3)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3). \end{aligned}$$

Итак, число  $A$  представлено как произведение двух натуральных чисел. Покажем, что они отличны от 1

при  $n = 1$

$$n^2 - 2n + 3 = 2 \neq 1$$

$$n^2 + 2n + 3 = 6 \neq 1;$$

$$\text{при } n \geq 2 \Rightarrow n^2 - 2n \geq 0 \Rightarrow n^2 - 2n + 3 \geq 3 \Rightarrow n^2 - 2n + 3 \neq 1$$

$$n^2 + 2n + 3 > n^2 - 2n + 3 \Rightarrow n^2 + 2n + 3 \neq 1.$$

Следовательно, при любом  $n$  число  $A$  составное.

**8.7** Найдите все целые значения  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 6x + ay = 10 \end{cases}$$

имеет решение. Укажите наибольшее из возможных значений  $a$ .

**Решение:**

$$2x = 8 - 5y; \quad x = 4 - 2,5y$$

$$6(4 - 2,5y) + ay = 10$$

$$24 - 15y + ay = 10$$

$$y(a - 15) = 10 - 24$$

$$y = \frac{-14}{a-15}, \quad a-15 \text{ делитель } -14$$

$-14$  имеет следующие делители:  $\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14$

$$a - 15 = -1 \quad a = 14$$

$$a - 15 = 1 \quad a = 16$$

$$a - 15 = 2 \quad a = 17$$

$$a - 15 = -2 \quad a = 13$$

$$a - 15 = 7 \quad a = 22$$

$$a - 15 = -7 \quad a = 8$$

$$a - 15 = 14 \quad a = 29$$

$$a - 15 = -14 \quad a = 1.$$

**Ответ:** 29.

**8.8** В деревне Сахаровка  $\frac{2}{5}$  всех мужчин женаты и  $\frac{2}{7}$  всех женщин замужем. Какая доля населения деревни состоит в браке?

**Решение:**

Пусть  $M$  – число мужчин,  $Ж$  – женщин. Число семей по мужьям равно  $\frac{2}{5}M$ , по женам  $\frac{2}{7}Ж$ . Их равное количество.

$$\frac{2}{5}M = \frac{2}{7}Ж \Rightarrow Ж = \frac{2}{5}M \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{5}M.$$

Общее число людей в браке равно:

$$\frac{2}{5}M + \frac{2}{7}Ж = \frac{2}{5}M + \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{5}M = \frac{4}{5}M$$

Общее число людей равно:

$$M + Ж = M + \frac{7}{5}M = \frac{12}{5}M$$

Доля населения в браке равно:

$$\frac{\frac{4}{5}M}{\frac{12}{5}M} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{2}{7}Ж}{\frac{12}{7}Ж} = \frac{1}{3}.$$

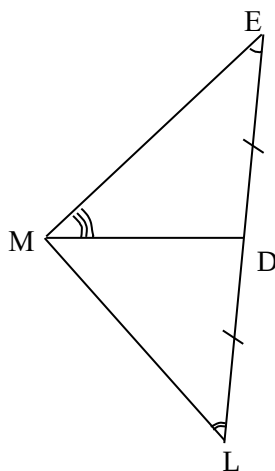
**Ответ:**  $\frac{1}{3}$ .

**8.9** Сто монет разложены в 10 стопок, по 10 монет в каждой. В одной из стопок все монеты фальшивые. Масса каждой нормальной монеты 5 г, а фальшивой – на 0,5 г меньше. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесами определить, в какой стопке находятся фальшивые монеты?

**Решение:**

Пронумеруем все стопки в порядке возрастания от 1 до 10. Из каждой стопки возьмем количество монет, соответствует номеру стопки. Выбрано 55 монет. Вес всех монет должен быть  $55 \cdot 5 = 275$  гр., а будет  $275 - n \cdot 0,5$ , где  $n$  – номер стопки. Взвесим 55 монет и найдем разность между их настоящим весом и 275 гр. Далее определим номер стопки, который соответствуют количеству монет, взятых из нее.

**8.10** В треугольнике  $MEL$  провели медиану  $MD$ . Оказалось, что  $\angle EMD = \angle E + \angle L$ ,  $MD = 4$  см. Найти  $ML$ .



**Решение:**

Удвоим медиану MD за точку D.

Получим  $MM' = 2MD$ ,  $MD = DM'$

$MEM'L$  – параллелограмм

(т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам).

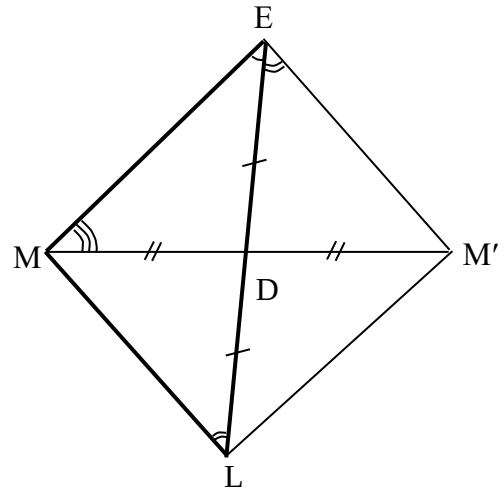
$$\angle M'EL = \angle MLE \Rightarrow \angle M'ME = MEM' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle MEM'$  – равнобедренный

$$EM' = MM' \Rightarrow EM' = 8 \text{ см} \Rightarrow$$

$$ML = 8 \text{ см.}$$

**Ответ:** 8 см.



## 9-й класс

**9.6** Докажите, что  $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) : 25$ .

**Доказательство:**

Воспользуемся методом математической индукции.

1.  $n = 1 \quad 2^3 \cdot 3^1 + 5 - 4 = 24 + 1 = 25 : 25$

2.  $n = k \quad (2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) : 25$

3.  $n = k + 1 \quad (2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) = 2^{k+2} \cdot 2 \cdot 3^k \cdot 3 + 5k + 1 =$   
 $= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 30k + 24 + 5k + 1 =$   
 $= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25 =$   
 $= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) + 25(1 - k) \Rightarrow$

сумма кратна 25, т.к. каждое слагаемое кратно 25.

**9.7** Решить уравнение:

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$$

**Решение:**

Сделаем замену

$$y = \frac{x+3+x+5}{2} = x + 4$$

$$x = y - 4$$

$$(y - 4 + 3)^4 + (y - 4 + 5)^4 = 16$$

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16$$

$$y^4 - 4y^3 + 4y^2 + 2y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 +$$
$$+ 4y^2 + 2y^2 + 4y + 1 = 16$$

$$2y^4 + 8y^2 + 4y^2 + 2 = 16$$

$$2y^4 + 12y^2 - 14 = 0$$

$$y^4 + 6y^2 - 7 = 0$$

$$D = 36 + 28 = 64$$

$$y^2 = \frac{-6 \pm 8}{2} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^2 = 1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -5$$

**Ответ:**  $-3; -5$ .

**9.8** Утром из пункта  $A$  в пункт  $B$  отправляется по течению моторная лодка. Одновременно из пункта  $B$  в пункт  $A$  выходит катер, собственная скорость которого в 1,4 раза больше собственной скорости моторной лодки. Известно, что лодка и катер встречаются в 12 часов дня, потом лодка прибывает в пункт  $B$  не позже 15 часов дня, а катер прибывает в пункт  $A$  не раньше 15 часов дня. Найти время отправления лодки из пункта  $A$  в пункт  $B$ , если известно, что на путь из  $B$  в  $A$  лодка затрачивает не более 9 часов, а катер на путь из  $A$  в  $B$  затрачивает не менее 4,5 часов.

**Решение:**

Способ 1. Пусть  $x$  км/ч – собственная скорость лодки,  $1,4x$  км/ч собственная скорость катера и  $y$  км/ч скорость течения реки,  $t$  часов – время отправления лодки из пункта  $A$

$(x + y)(12 - t)$  км прошла до встречи с катером моторная лодка

$(1,4x - y)(12 - t)$  км прошел до встречи катер.

Из условия задачи можно составить следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x + y)(12 - t)}{1,4x - y} \geq 3, \\ \frac{(1,4x - y)(12 - t)}{x + y} \leq 3, \\ \frac{AB}{x - y} \leq 9, \\ \frac{AB}{1,4x + y} \geq 4,5 \end{array} \right.$$

Из первых двух неравенств вычитанием получим неравенство:

$$\frac{(x + y)(12 - t)}{1,4x - y} \geq \frac{(1,4x - y)(12 - t)}{x + y}$$

$$\text{Откуда } (x + y)^2 \geq (1,4x - y)^2$$

$$\text{или } x + y \geq 1,4x - y, \quad x \leq 5y. \quad (1)$$

Из последних двух неравенств

$$\frac{2AB}{1,4x + y} \geq \frac{AB}{x - y} \quad \text{или} \quad 2x - 2y \geq 1,4x + y, \quad x \geq 5y. \quad (2)$$

(1) и (2) выполняются одновременно, значит  $x = 5y$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} 12 - t \geq 3, \\ 12 - t \leq 3 \end{array} \right. \quad \text{откуда } t = 9.$$

Лодка вышла из пункта  $A$  в 9 часов утра.

Способ 2. Пусть лодка вышла в  $t$  часов из пункта  $A$ ,  $x$  км/ч – собственная скорость катера,  $y$  км/ч – скорость течения реки. Скорость сближения лодки и катера  $x + 1,4x = 2,4x$  км/ч, следовательно,  $AB = 2,4x(12 - t)$  км.

Из условия задачи можно составить следующие неравенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2,4x(12 - t)}{x + y} \leq 15 - t, \\ \frac{2,4x(12 - t)}{1,4x - y} \geq 15 - t \end{array} \right.$$

$$\frac{2,4x(12 - t)}{x + y} \leq \frac{2,4x(12 - t)}{1,4 - y},$$

$$\text{Откуда } x \leq 5y \quad (3)$$

Подставляя в первое неравенство получим  $t \geq 9$ .

$(x - y)$  км/ч – скорость лодки при движении от  $B$  к  $A$ .

$(1,4x + y)$  км/ч – скорость катера вниз по течению.

Из условия задачи можно составить следующие неравенства:

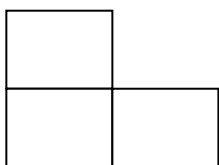
$$\begin{cases} 9(x - y) \geq AB, & AB = 2,4x(12 - t), \\ 4,5(1,4x + y) \leq AB, \end{cases}$$

Откуда следует  $9(x - y) \geq (1,4x + y) \cdot 4,5$  или  $x \geq 5y$  (4)

(3) и (4) выполняются одновременно, следовательно,  $x = 5y$ , а  $t = 9$ , т.е. лодка вышла из пункта  $A$  в 9 часов утра.

**Ответ:** лодка вышла из пункта  $A$  в 9 часов утра.

**9.9** Существуют ли на клетчатой бумаге прямоугольник, который можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке



с выполнением условий

- ✓ ни в какой точке не смыкается более трех «уголков»;
- ✓ никакие два «уголка» не образуют прямоугольник  $3 \times 2$  клетки?

**Решение:**

Предположим, что такой прямоугольник существует. Если в замощении прямоугольника какой-либо «уголок» примыкает к краю прямоугольника стороной из одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком»  $3 \times 2$  до прямоугольника, что противоречит условию. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника со сторонами из двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры  $2l \times 2k$ .

Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет  $\frac{2l \cdot 2k}{3} \cdot 6 = 8lk$  вершин.

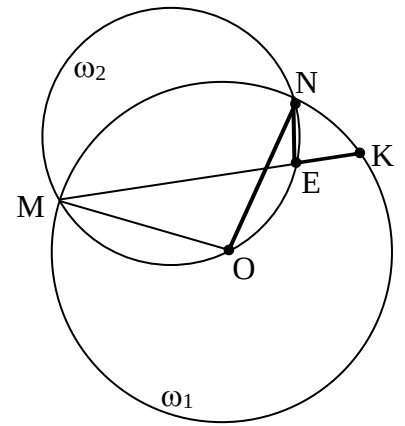
Посчитаем количество вершин у всех «уголков» другим спросом:

В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длиной  $2l$  – не более  $2(l - 1)$  вершин, в углах прямоугольника – по 1 вершине. Всего не более

$$2(2l - 1)(2k - 1) + 2 \cdot 2(l - 1) + 2 \cdot 2(k - 1) + 4 = 8lk - 2 < 8lk \text{ вершин.}$$

Противоречие. Значит, прямоугольника, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

**9.10** Две окружности пересекаются в точках М и N (см. рис). При этом вторая окружность проходит через центр О первой окружности и некоторую точку Е хорды МК первой окружности. Доказать, что  $NE = EK$ .



**Доказательство:**

1) Рассмотрим первую окружность  $\omega_1$

$\angle MKN$  – вписанный, опирается на дугу MN;

$\angle MON$  – центральный, опирается на дугу MN;

Пусть  $\angle MKN = \alpha$ , тогда  $\angle MON = 2\alpha$

2) Рассмотрим вторую окружность  $\omega_2$

$\angle MON$  и  $\angle MEN$  – вписанные, опираются на дугу MN.

Следовательно,  $\angle MEN = \angle MON = 2\alpha$ .

3) Рассмотрим  $\triangle NEK$

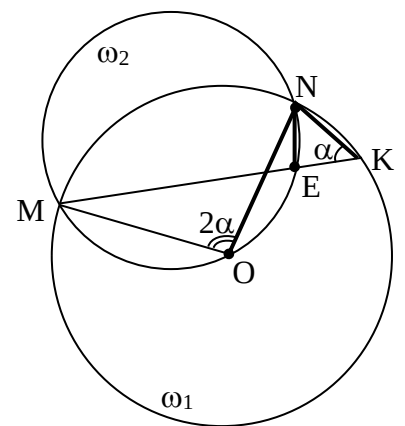
$\angle MEN$  – внешний, поэтому

$\angle MEN = \angle ENK + \angle EKN$

$2\alpha = \angle ENK + \alpha$

$\angle ENK = \alpha$ .

Итак, в  $\triangle NEK$  равны углы:  $\angle ENK$  и  $\angle EKN$ . Следовательно,  $\triangle NEK$  – равнобедренный,  $NE = EK$ .



## 10 класс

**10.6** Натуральные числа  $m$  и  $n$  таковы: что  $99m = 91n$ , докажите, что  $m + n$  составное.

**Решение:**

99 и 91 взаимно простые числа.

$99m$  делится на 91  $\Rightarrow m = 91t$ , где  $t$  – натуральное число. Тогда имеем:

$99 \cdot 91t = 91n$ ,  $n = 99t$ , значит

$m + n = 91t + 99t = 190t \Rightarrow m + n \geq 190$  и  $m + n$  делится на 2 (5;10), т.е.  $m + n$  – составное число.

**10.7** Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \end{cases}$$

**Решение:**

Умножим первое уравнение на 5, а второе на  $-4$ :

$$\begin{cases} 10x^2 - 5xy - 5y^2 - 20x + 20y = 0 \\ -4x^2 - 4xy + 8y^2 + 20x - 20y = 0 \end{cases}$$

Сложим уравнения системы:

$$6x^2 - 9xy + 3y^2 = 0$$

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

$$2x^2 - 2xy - xy + y^2 = 0$$

$$2x(x - y) - y(x - y) = 0$$

$$(x - y)(2x - y) = 0$$

$$x = y \text{ или } y = 2x$$

Подставим  $y = 2x$  в первое уравнение системы:

$$2x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 4x = 8x = 0$$

$$-4x^2 + 4x = 0$$

$$4x(-x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 2.$$

Итак, решение системы является пара равных друг другу чисел или пара (1; 2)

**Ответ:** (1; 2), ( $a$ ;  $a$ ), где  $a$  – любое действительное число.

**10.8** Доказать неравенство

$$\frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|} \leq \frac{|a|}{2+|a|} + \frac{|b|}{2+|b|} + \frac{|c|}{2+|c|}$$

**Решение:**Известно, что  $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$ , тогда

$$|a|+|b|+|c| = |a+b+c| + x, \quad x \geq 0.$$

Дробь  $\frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|}$  — правильная, т.к. знаменатель больше числителя.

Известно, что правильная дробь  $\frac{p}{q}$ , где  $p > 0, q > 0$  увеличивается, если к числителю и знаменателю прибавить одно и то же положительное число  $x$ , т.е.

имеет место неравенство  $\frac{p+x}{q+x} \geq \frac{p}{q}$ , действительно,  $\frac{p+x}{q+x} - \frac{p}{q} = \frac{x(q-p)}{q(q+x)}$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|} &\leq \frac{|a|+|b|+|c|}{2+|a|+|b|+|c|} = \frac{|a|}{2+|a|+|b|+|c|} + \frac{|b|}{2+|a|+|b|+|c|} + \\ &+ \frac{|c|}{2+|a|+|b|+|c|} \leq \frac{|a|}{2+|a|} + \frac{|b|}{2+|b|} + \frac{|c|}{2+|c|} \end{aligned}$$

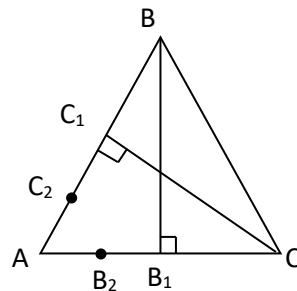
**10.9** Дана геометрическая прогрессия с положительными членами. Известно, что 10-ый член этой прогрессии меньше 8, а 21-ый член больше 64. Докажите, что 87-ой член больше, чем  $2^{24}$ .

**Решение:**Пусть  $b$  — первый член прогрессии.По условию  $b > 0, q > 0, bq^9 < 8, bq^{20} > 64$ .Следовательно,  $\frac{bq^{20}}{bq^9} = q^{11} > 8$ .Поэтому,  $q^{66} > 8^6 = 2^{18}$ .перемножим неравенства  $bq^{20} > 2^6$  и  $q^{66} > 2^{18}$ 

$$bq^{86} > 2^6 \cdot 2^{18} = 2^{24},$$

 $bq^{86}$  — 87-ой член прогрессии.**10.10** Дан остроугольный треугольник ABC.

$BB_1$  и  $CC_1$  — высоты. На стороне CA отмечена точка  $B_2$  так, что  $CC_1 = CB_2$ . На стороне BA отмечена  $C_2$  так, что  $BB_1 = BC_2$ . Доказать, что  $C_1, C_2, B_1, B_2$  лежат на одной окружности.

**Доказательство:**Пусть  $C_1B_2 \cap B_1C_2 = Q$ Пусть  $\angle C_1C_2B_1 = \alpha$ , тогда  $\angle C_2B_1B = \alpha$  $(\triangle BB_1C_2$  — равнобедренный)

$$\angle C_2B_1B_2 = 90^\circ - \alpha.$$

Пусть  $\angle CC_1B_2 = \beta$ , тогда  $\angle C_1B_2C = \beta$   
 ( $\triangle C_1CB_2$  – равнобедренный).

$$\angle C_2C_1Q = 90^\circ - \beta$$

$$\angle C_1QC_2 = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \beta) =$$

$$= 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \beta = 90^\circ - \alpha + \beta$$

$$\angle B_1QB_2 = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \alpha) =$$

$$= 90^\circ - \beta + \alpha$$

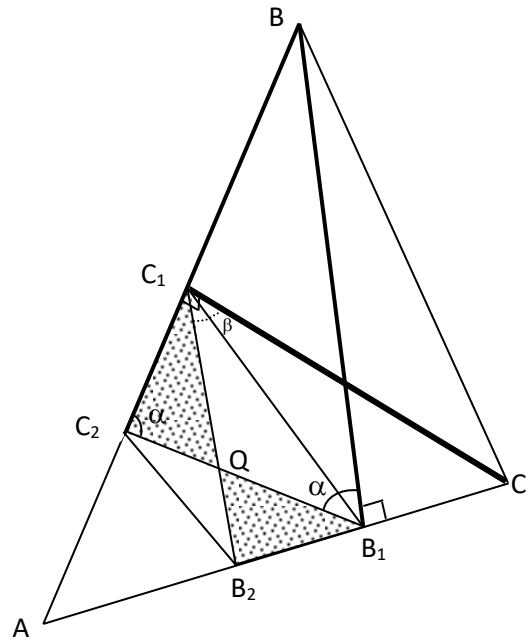
$\angle C_1QC_2 = \angle B_1QB_2$  – вертикальные

$$90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ - \beta + \alpha$$

$$2\beta = 2\alpha$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow \angle C_1C_2B_1 = \angle C_1B_2B_1,$$

следовательно, около  $C_2C_1B_1B_2$   
 можно описать окружность.



## 11 класс

**11.6** В числе  $2*0*2*3*0*$  нужно заменить каждую из 5 звездочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, что полученное 10-значное число делилось на 36. Сколькими способами это можно сделать?

**Решение:**

Для того, чтобы число делилось на 36 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Для делимости на 4 в качестве последней цифры берем 0,4 или 8 (3 способа)

Для делимости на 9 поступим так. Выберем 3 цифры произвольно ( $9 \cdot 9 \cdot 9$  способов), а четвертую цифры подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку все возможные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0,1,2,...,8) и при этом каждый остаток встречается только один раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применим правило произведений

$$3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81 \cdot 9 \cdot 3 = 729 \cdot 3 = 2187 \text{ способов.}$$

**Ответ:** 2187

### 11.7 Решить уравнение

$$\left( \frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^4 2x} \right) (\sin^6 x + \cos^4 2x) = 4 \cos^2 \left( \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \right)$$

**Решение:**

Докажем, что для любых положительных чисел  $a$  и  $b$  справедливо неравенство:

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) \geq 4. \quad (1)$$

По неравенству о среднем арифметическом и геометрическом

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4ab} \geq 1 \Rightarrow \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) \geq 4.$$

$$\text{ОДЗ: } \sin x \neq 0, \cos 2x \neq 0$$

$$\frac{\pi^2}{4} - x^2 \geq 0; \quad x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}; \quad |x| \leq \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad x \neq 0; \quad 2x \neq \frac{\pi}{2}; \quad x \neq \frac{\pi}{4}.$$

На ОДЗ имеем:  $\sin^6 x > 0$ ,  $\cos^4 2x > 0$ , то по (1), получаем, что для любого  $x$  левая часть уравнения не меньше 4, в тоже время

$$4 \cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \leq 4 \Rightarrow$$

уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^4 2x} \right) (\sin^6 x + \cos^4 2x) = 4 \\ \cos^2 \left( \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = 1, \text{ с учетом ОДЗ } x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

**Ответ:**  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

**11.8** Решить уравнение:  $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ .

**Решение:**

Обозначим  $\sqrt[3]{2-x} = u$ , а  $\sqrt{x-1} = v$ , тогда

$$2 - x = u^3$$

$$x - 1 = v^2.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^2 = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $v = u - 1$ ,

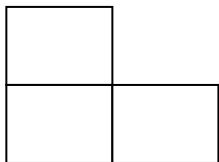
$$u^3 + u^2 - 2u + 1 = 1$$

$$u^3 + u^2 - 2u = 0$$

подставим во второе, получим  $u(u^2 + u - 2) = 0$ , откуда  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = -2$ , откуда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 10$ .

**Ответ:** 1, 2, 10.

**11.9** Существуют ли на клетчатой бумаге прямоугольник, который можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке



с выполнением условий

- ✓ ни в какой точке не смыкается более трех «уголков»;
- ✓ никакие два «уголка» не образуют прямоугольник  $3 \times 2$  клетки?

**Решение:**

Предположим, что такой прямоугольник существует. Если в замощении прямоугольника какой-либо «уголок» примыкает к краю прямоугольника стороной из одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком»  $3 \times 2$  до прямоугольника, что противоречит условию. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника со сторонами из двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры  $2l \times 2k$ .

Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет  $\frac{2l \cdot 2k}{3} \cdot 6 = 8lk$  вершин.

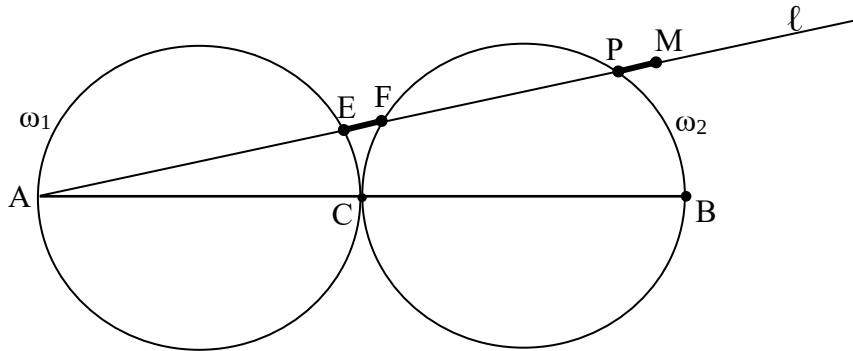
Посчитаем количество вершин у всех «уголков» другим способом:

В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длиной  $2l$  – не более  $2(l-1)$  вершин, в углах прямоугольника – по 1 вершине. Всего не более

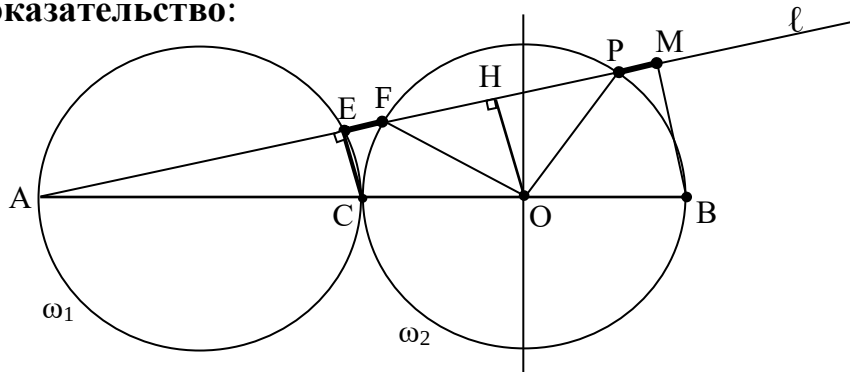
$2(2l - 1)(2k - 1) + 2 \cdot 2(l - 1) + 2 \cdot 2(k - 1) + 4 = 8lk - 2 < 8lk$  вершин.

Противоречие. Значит, прямоугольника, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

**11.10** Две окружности, радиусы которых равны, касаются внешним образом в точке  $C$ .  $AC$  – диаметр первой окружности  $\omega_1$ ,  $CB$  – диаметр второй окружности  $\omega_2$ . Прямая  $\ell$ , проходящая через точку  $A$  пересекает вторично  $\omega_1$  в точке  $E$ , пересекает  $\omega_2$  в точках  $F$  и  $P$ . На прямой  $\ell$  за точку  $P$  взята точка  $M$  так, что  $EF = PM$ . Докажите, что  $AB = 2MC$ .



**Доказательство:**



1) Точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой, так как  $AC$  и  $CB$  диаметры;

2) Пусть  $O$  – центр  $\omega_2$ . Опустим  $OH \perp \ell$

$\triangle FOP$  – равнобедренный

$OH$  – высота

$$\Rightarrow FH = HP \Rightarrow EH = HM.$$

3)  $\angle AEC = 90^\circ$ , т.к. опирается на диаметр  $AC$ .  $\angle AHO = 90^\circ$ . Таким образом,  $EC \perp \ell$ ,  $OH \perp \ell$ , следовательно,  $EC \parallel OH$ .

4)

$$\left. \begin{array}{l} EH = HM \\ CO = OB \\ EC \parallel OH \end{array} \right\} \Rightarrow BM \parallel OH \Rightarrow \angle HMB = 90^\circ \Rightarrow \triangle AMB \text{ – прямоугольный.}$$

- 5) Так как  $\triangle AMB$  – прямоугольный треугольник и  $C$  – середина  $AB$  (по условию  $AC=CB$ ), то  $MC$  – медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе.  
Поэтому  $AB=2MC$ .