**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________________ О.Г. Локтионова
«____» _______________ 2019 г.

# Алгебра и теория чисел:

методические указания к практическим занятиям для бакалавров направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Курск 2019

УДК 512 (075.8)
Составитель: В.П. Добрица, Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, с.н.с. В.И. Дмитриев

Алгебра и теория чисел: методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица. – Курск, 2019. – 26 с.: табл. 5. – Библиогр.: с. 26.

В методических указания описываются основные алгебры и теории чисел. Изложены краткие теоретические сведения, приведены примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 1,34. Уч.-изд. л. 1,21. Тираж 100 экз.
Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

### Делимость в кольце целых чисел. Теорема о делении с остатком. Алгоритм Евклида и наибольший общий делитель

Вопросы к занятию:

1. Определение и свойства делимости
2. Теорема о делении с остатком
3. НОД и его свойства, вычисление НОД

### Краткие сведения из теории

Всякое целое число, делящее одновременно целые $a,b,\ldots,l$, называется их общим делителем. Наибольший из общих делителей называется наибольшим общим делителем (НОД) и обозначается $(a,b,\ldots,l)$.

Если $(a,b,\ldots,l) = 1$, то $a,b,\ldots,l$ называются взаимно простыми. Если каждое из чисел $a,b,\ldots,l$ взаимно просто с каждым другим из них, то $a,b,\ldots,l$ называются попарно простыми.

Для отыскания наибольшего общего делителя, а также для вывода его важнейших свойств применяется алгоритм Евклида:

Пусть $a$ *и* $b$ – положительные числа и $a>b$, *согласно* алгоритма находим ряд равенств:

$a= bq_1 + r_2$ , $0<r_2< b$,

$b=r_2q_2 + r_3$ , $0<r_3< r_2$ ,

$r_2=r_3q_3 + r_4$ , $0<r_4< r_3$ ,

……………………..

$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1} + r_n$ , $0<r_n< r_{n-1}$ ,

$r_{n-1}=r_nq_n$ ,

заканчивающийся, когда получим некоторое $r_{n+1}=0$. Последнее неизбежно, так как ряд $b, r_2, r_3, \ldots$ как ряд убывающих целых чисел не может содержать более чем $b$ положительных.

Пример найти НОД (525;231).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 525 | 231 |
| | | | 462 | 2 |
| | | 231 | 63 | |
| | | 189 | 3 | |
| | 63 | 42 | | |
| | 42 | 1 | | |
| 42 | 21 | | | |
| 42 | 2 | | | |
| 0 | | | | |

Получили $525 = 231\times2 + 63;$

$$231 = 63\times3 + 42;$$

$$63 = 42\times1 + 21;$$

$$42 = 21\times2.$$

Здесь последний положительный остаток равен 21, следовательно $d = (526;231) = 21$.

## КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Задание1. Вычислить НОД d = (a;b;c) двумя способами:

Вариант 1. (2737; 9163; 9639).

Вариант 2. (1411; 4641; 5253).

Вариант 3. (9163; 2737; 9639).

Вариант 4. (374; 1599; 9061).

Вариант 5. (299; 391; 667).

Вариант 6. (588; 2058; 2849).

Вариант 7. (31605; 13524; 12915). Вариант 8. (279; 372; 1395).
Вариант 9. (2988; 3735; 8134). Вариант 10. (420; 630; 1155).
Вариант 11. (1023; 1518; 14883). Вариант 12. (498; 2324; 42598).
Вариант 13. (663; 731; 2516). Вариант 14. (14525; 3735; 8134).
Вариант 15. (2988; 8134; 14525). Вариант 16. (3655; 2516; 731).
Вариант 17. (11067; 12915; 13524). Вариант 18. (5253; 1411; 4641).
Вариант 19. (2849; 588; 2058). Вариант 20. (2516; 663; 3655).
Вариант 21. (3132; 7200; 396). Вариант 22. (192; 180; 45360).
Вариант 23. (420; 126; 525). Вариант 24. (91; 77; 133).
Вариант 25. (2849; 588; 2058). Вариант 26. (2058; 2849; 588).
Вариант 27. (5253; 1411; 4641). Вариант 28. (663; 2516; 3655).

Задание 2. Пользуясь алгоритмом Евклида вычислить НОД и выразить его через исходные числа:

Вариант 1. (822; 1734). Вариант 2. (4623; 3743).
Вариант 3. (4373; 826). Вариант 4. (3791; 3281).
Вариант 5. (1073; 3683). Вариант 6. (2576; 154).
Вариант 7. (546; 231). Вариант 8. (1001; 6253).
Вариант 9. (1517; 2257). Вариант 10. (2737; 9639).
Вариант 11. (588; 2849). Вариант 12. (899; 493).
Вариант 13. (1445; 629). Вариант 14. (903; 731).
Вариант 15. (1786; 705). Вариант 16. (4543; 885).
Вариант 17. (6919; 1443). Вариант 18. (252; 468).
Вариант 19. (279; 372). Вариант 20. (1137; 758).
Вариант 21. (1232; 1672). Вариант 22. (132;21).
Вариант 23. (135; 8211). Вариант 24. (549; 387).
Вариант 25. (589; 343). Вариант 26. (12606; 6494).
Вариант 27. (29719; 76501). Вариант 28. (162891; 32176).

Задание 3. Для пар чисел задания 2 найти наименьшее общее кратное. Результат вычисления НОК проверить разложением чисел на простые множители.

Задание 4. Сократите следующие дроби:

Вариант 1. 17501/11137.
Вариант 2. 1491/2247.
Вариант 3. 237419/294817.
Вариант 4. 1253/406.
Вариант 5. 438875/747843.
Вариант 6. 127936/161919.
Вариант 7. 2227/9911.
Вариант 8. 22243/23777.
Вариант 9. 2405/4433.
Вариант 10. 3587/2743.
Вариант 11. 3653/3107.
Вариант 12. 3953/871.
Вариант 13. 6059/1241.
Вариант 14. 6821/2147.
Вариант 15. 10027/32671.
Вариант 16. 1155/630.
Вариант 17. 420/1155.
Вариант 18. 1491/2247.
Вариант 19. 2405/4433.
Вариант 20. 3587/2743.
Вариант 21. 3612/2924.
Вариант 22. 875/385.
Вариант 23. 1540/1988.
Вариант 24. 6205/510.
Вариант 25. 13790/7462.
Вариант 26. 6292/2210.
Вариант 27. 10040/11128.
Вариант 28. 7860/8772.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

### Делимость в кольце целых чисел. Простые числа. Решето Эратосфена

Вопросы к занятию:
1. Определение и свойства делимости
2. Простые и составные числа

### Краткие сведения из теории

Всякое целое *a*, большее 1, имеет не менее двух делителей: 1 и *a*.

Если их ровно два, то число *a* – простое.

Если их более двух, то число *a* – составное.

Решето Эратосфена. Под этим названием понимают следующий метод построения всех простых чисел, не превосходящих n.

Берем число 2 и выбрасываем все числа кратные 2. Из оставшихся чисел оставляем наименьшее (в данном случае это число 3) и выбрасываем все числа кратные 3, и так далее. Если первое оставшееся число превышает [$\sqrt{n}$ ], то работу прекращаем, поскольку все отобранные и оставшиеся числа являются простыми. При этом ни одно простое число в заданном интервале поиска не будет упущено.

Пример. Найти все простые числа между числами *20 и 40.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~20~~ | 21 | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | 27 | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| | 31 | ~~32~~ | 33 | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | 39 | ~~40~~ |

Решение. Берем число 2 и выбрасываем все числа кратные 2. В таблице эти числа перечеркнуты.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ~~21~~ | | 23 | | 25 | | ~~27~~ | | 29 | |
| 31 | | ~~33~~ | | 35 | | 37 | | ~~39~~ | | |

Из оставшихся чисел  выбрасываем все числа кратные 3.

Далее выбрасываем числа кратные 5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | | ~~25~~ | | 29 |
| 31 | | ~~35~~ | | 37 | |

И так далее. Если первое оставшееся число превышает [$\sqrt{n}$ ], то работу прекращаем, поскольку все отобранные и оставшиеся числа являются

$[\sqrt{40}$

простыми. В нашем случае ] =6. Окончательно имеем следующие простые числа 23, 29, 31, 37.

Пример. Выяснить простым или составным является a = 101.

Пусть 101 является составным числом, тогда наименьший простой делитель не превышает $[\sqrt{101}] = 10$, то есть $p<10$. Проверим, делится ли 101 на простые числа 2,3,5,7<10. Так как 101 не делится, то оно простое.

Пример. Разложить на простые множители n = 15!

Наибольший показатель $\alpha$ , с которым простое число $p$ входит в число $a$ = n! находится по формуле: $\alpha = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \ldots + [\frac{n}{p^k}]$, $p^k \leq n < p^{k+1}$.

Из этого следует $p<n$. В нашем случае последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13<15.

$p=2$; $[\frac{15}{2}] + [\frac{15}{2^2}] + [\frac{15}{2^3}] = 7 + 3 + 1 = 11$; $p = 3$; $[\frac{15}{3}] + [\frac{15}{9}] = 5 + 1 = 6$;

$p = 5$; $[\frac{15}{5}] = 3$; $p = 7$; $[\frac{15}{7}] = 2$;

$p = 11$; $[\frac{15}{11}] = 1$; $p = 13$; $[\frac{15}{13}] = 1$.

Таким образом, получили $15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$.

## КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Задание 1. Найти все простые числа между числами *a, b:*

Вариант 1. $a$ =150; $b$ =180; Вариант 2. $a$ =250; $b$ =280;

Вариант 3. $a$ =130; $b$ =160; Вариант 4. $a$ =230; $b$ =260;

Вариант 5. $a$ =110; $b$ =140; Вариант 6. $a$ =200; $b$ =240;

Вариант 7. $a$ =90; $b$ =120; Вариант 8. $a$ =250; $b$ =290;

Вариант 9. $a$ =40; $b$ =90; Вариант 10. $a$ =230; $b$ =270;

Вариант 11. $a$ =50; $b$ =80; Вариант 12. $a$ =230; $b$ =260;

Вариант 13. $a$ =30; $b$ =70; Вариант 14. $a$ =210; $b$ =250;

Вариант 15. $a$ =160; $b$ =190; Вариант 16. $a$ =190; $b$ =230;

Вариант 17. $a$ =180; $b$ =210; Вариант 18. $a$ =170; $b$ =200;

Вариант 19. $a$ =200; $b$ =240; Вариант 20. $a$ =160; $b$ =190;

Вариант 21. $a$ =200; $b$ =250; Вариант 22. $a$ =160; $b$ =200;

Вариант 23. $a$ =250; $b$ =300; Вариант 24. $a$ =140; $b$ =170;

Вариант 25. $a$ =200; $b$ =240; Вариант 26. $a$ =100; $b$ =150;

Вариант 27. $a$ =180; $b$ =220; Вариант 28. $a$ =120; $b$ =170;

Задание 2. Разложить на простые множители:

Вариант 1. n =10!; Вариант 2. n=14!; Вариант 3. n =11!; Вариант 4. n = 8!;

Вариант 5. n =14!; Вариант 6. n=16!; Вариант 7. n =13!; Вариант 8. n = 11!;

Вариант 9. n=18!; Вариант 10. n=19!; Вариант11. n=17!; Вариант12. n= 20!;

Вариант 13. n =21!; Вариант 14. n=23!; Вариант 15. n =24!; Вариант 16. n = 26!;

Вариант 17. n =25!; Вариант 18. n=29!; Вариант 19. n =30!; Вариант 20. n = 32!;

Вариант 21. n =27!; Вариант 22. n=28!; Вариант 23. n =31!; Вариант 24. n = 33!;

Вариант 25. n =35!; Вариант 26. n=38!; Вариант 27. n =39!; Вариант 28. n = 40!;

Задание 3. Выясните, являются ли числа простыми или составными:

Вариант 1. 2657; Вариант 2. 101; Вариант 3. 401; Вариант 4. 103;

Вариант 5. 2667; Вариант 6. 1001; Вариант 7. 104; Вариант 8. 1003;

Вариант 9. 2669; Вариант 10. 203; Вариант11. 1004; Вариант12. 109;
Вариант 13. 2671; Вариант 14. 2003; Вариант 22. 107; Вариант 16. 901;
Вариант 17. 2673; Вариант 18. 301; Вариант 19. 1007; Вариант 20. 401;
Вариант 21. 2677; Вариант 22. 3001; Вариант 23. 701; Вариант 24. 1004;
Вариант 25. 2667; Вариант 26. 3002; Вариант 27. 703; Вариант 28. 1007;

Задание 4. Найти высшие степени чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, на которые делится число n!:

Вариант 1. n =40!; Вариант 2. n=34!; Вариант 3. n =31!; Вариант 4. n = 18!;
Вариант 5. n =34!; Вариант 6. n=26!; Вариант 7. n =23!; Вариант 8. n = 21!;
Вариант 9. n=28!; Вариант 10. n=39!; Вариант11. n=37!; Вариант12. n= 30!;
Вариант 13. n =20!; Вариант 14. n=33!; Вариант 15. n =44!; Вариант 16. n = 46!;
Вариант 17. n =35!;Вариант 18. n=39!; Вариант 19. n =20!;Вариант 20. n = 22!;
Вариант 21. n =17!;Вариант 22. n=38!; Вариант 23. n =41!; Вариант 24. n = 43!;
Вариант 25. n =55!; Вариант 26. n=28!; Вариант 27. n =29!; Вариант 28. n = 30!;

Задание 5. Представить в канонической форме число:

Вариант 1. $a$ =8279884; Вариант 2. $a$ = 8105722;
Вариант 3. $a$ =1488972; Вариант 4. $a$ = 6223781;
Вариант 5. $a$ =1101433; Вариант 6. $a$ =2024013;
Вариант 7. $a$ =9090117; Вариант 8. $a$ =2501313;
Вариант 9. $a$ =4091334; Вариант 10. $a$ =2301027;
Вариант 11. $a$ =5023238; Вариант 12. $a$ =2301260;
Вариант 13. $a$ =3070391; Вариант 14. $a$ =2102503;
Вариант 15. $a$ =1601903; Вариант 16. $a$ =1902301;
Вариант 17. $a$ =1801217; Вариант 18. $a$ =1702007;
Вариант 19. $a$ =2005241; Вариант 20. $a$ =1601901;
Вариант 21. $a$ =2033252; Вариант 22. $a$ =1602017;

Вариант 23. $a$ =2503377;

Вариант 24. $a$ =4017031;

Вариант 25. $a$ =2022244;

Вариант 26. $a$ =1015039;

Вариант 27. $a$ =1802206;

Вариант 28. $a$ =1201709;

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

### Числовые функции и их свойства.

Вопросы к занятию:

1. Функция Эйлера и её нахождение
2. Функции $\sigma$ (a), $\tau$ (a)
3. Приложения важнейших функций

### Краткие сведения из теории

Функция Эйлера $\varphi$ (*a*) представляет собой количество натуральных чисел, взаимно простых с *a* и не превосходящих *a*; при этом считается, что φ(1) = 1. Функция Эйлера представляет число чисел ряда 0, 1, …., *a-1*, взаимно простых с *a*. $\varphi$ (2) = 1; $\varphi$ (3) = 2; $\varphi$ (4) = 2; $\varphi$ (5) = 4; $\varphi$ (6) = 2.

Вычисляется эта функция по формуле:

$$\varphi(a) = a\left(1 - \frac{1}{p1}\right)\left(1 - \frac{1}{p2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right), \qquad (1)$$

где $p_1, p_2$ ,.. ,$p_n$ - простые делители в каноническом разложении числа *a*:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}.$$

В частности $\varphi(a = p_1{}^{\alpha} p_2{}^{\beta} \cdot \ldots \cdot p_n{}^{\delta}) = (p_1^{\alpha} - p_1^{\alpha-1}) \cdot (p_2^{\beta} - p_2^{\beta-1}) \cdot \ldots (p_n^{\delta} - p_n^{\delta-1})$

Пример. $\varphi(5040) = \varphi(2^4 3^2 5^1 7^1) = (2^4 - 2^3) \cdot (3^2 - 3) \cdot (5^1 - 5^0) \cdot (7^1 - 7^0) =$

$= 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 1152.$

В частности, $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1) \quad \varphi(p) = p - 1.$

$\varphi(2^2) = 2^{2-1}(2-1) = 2$; $\varphi(5) = (5-1) = 4$.

Функция Эйлера $\varphi$ (*a*) мультипликативна, то есть функция Эйлера

$\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ при попарно простых *a* и *b*. $\varphi(6) = \varphi(2 \cdot 3) = 2$.

Функции $\sigma$ (a), $\tau$ (a) определяются для всех натуральных чисел *a* и представляют собой соответственно сумму и число всех натуральных делителей числа *a*. Вычисляются эти функции по формулам:

Число делителей: $\tau$ (a) = ($\alpha_1$ + 1) ($\alpha_2$ + 1)….. ($\alpha_n$ + 1), (2)

Пусть a = 24 = $2^3 3$ ; $\tau$ (24) = (3 + 1)$\cdot$ (1 + 1) = 8; действительно для a = 24 делителями являются a ⁝ 24,12, 8, 6, 4, 2, 1. Всего 8 делителей.

Сумма делителей: $\sigma(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot \ldots \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$. (3)

$\sigma$ (24) = $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}$ = $\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{1+1}-1}{3-1}$ = $\frac{15}{1}\cdot\frac{8}{2}$ = 60; действительно сумма делителей для числа a = 24 будет: 24 + 12 +8 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 60.

В формулах (1), (2), (3) $p_1, p_2, \ldots p_n$ - простые делители канонического разложения числа *a*, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - показатели степеней простых делителей.

Пример. Известна функция Эйлера $\varphi(a)$=48; *a* = $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$.

Найти число *a*.

Решение. Применяем формулу $\varphi$ (a) = a(1 - $\frac{1}{p1}$)(1 - $\frac{1}{p2}$ )…..(1 - $\frac{1}{p_n}$),

48 = $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\right)$.

Получили $2^4 3^1 5^0 7^0 = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta 2^3 5^{-1} 7^{-1} = 2^{\alpha+3} 3^\beta 5^{\gamma-1} 7^{\delta-1}$;

Откуда $\alpha$ + 3 = 4; → $\alpha$ = 1; $\beta$ = 1; $\gamma$ - 1 = 0; → $\gamma$ = 1; $\delta$ - 1 = 0; → $\delta$ = 1.

Окончательно *a* = $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = 2^1 3^1 5^1 7^1$ = 210. Ответ: *a* = 210.

Показатель, с которым данное простое число *p* входит в произведение *n!* равен : $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$.

Пример. Найти показатель, с которым число 3 входит в произведение 367!

Решение. $\left[\frac{367}{3}\right]+\left[\frac{367}{9}\right]+\left[\frac{367}{27}\right]+\left[\frac{367}{81}\right]+\left[\frac{367}{243}\right]=$ 122 + 40 + 13 + 4 + 1 = 180.

## ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ:

Задание 1. Вычислить функцию Эйлера $\varphi(a)$ для чисел:

Вариант 1. (a=820).
Вариант 2. (a = 460).
Вариант 3. (a = 825).
Вариант 4. (a=396).
Вариант 5. (a =2310).
Вариант 6. (a=2520).
Вариант 7. (a = 720).
Вариант 8. (a = 3630).
Вариант 9. (a = 375).
Вариант 10. (a = 390).
Вариант 11. (a = 2700).
Вариант 12. (a = 510).
Вариант 13. (a =1768).
Вариант 14. (a =882).
Вариант 15. (a = 320).
Вариант 16. (a = 5610).
Вариант 17. (a = 957).
Вариант 18. (a=936).
Вариант 19. (a = 630).
Вариант 20. (a = 1260).
Вариант 21. (a = 3060).
Вариант 22. (a = 2940).
Вариант 23. (a = 988).
Вариант 24. (a = 4320).
Вариант 25. (a = 1050).
Вариант 26. (a = 2730).
Вариант 27. (a = 1200).
Вариант 28. (a = 1260).

Задание 2. Вычислить число делителей $\tau$ (a) для чисел, указанных в задании 1

$\sigma$

Задание 3. Вычислить сумму делителей (a), для чисел, указанных в задании 1

Задание 4. Найти показатель, с которым число *a* входит в *n!*:

Вариант 1. a=2, n =110!;  Вариант 2. a=3,  n=140!;  Вариант 3. a=5, n =101!;

Вариант 4. a=7, n = 80!;  Вариант 5. a = 11, n =314!;  Вариант 6. a=2, n=160!;

Вариант 7. a=3, n =130!;  Вариант 8. a=5, n = 11!;  Вариант 9. a=7, n=180!;

Вариант 10. a=11, n=190!;  Вариант11. a=13, n=170!;  Вариант12. a=2, n= 200!;

Вариант 13. a=3, n =210!;  Вариант 14. a=5, n=230!;  Вариант 15. a=7, n =240!;

Вариант 16. a= 11, n = 260!; Вариант 17. a = 13, n =250!; Вариант 18. a=2, n=290!;

Вариант 19. a=3, n =300!;  Вариант 20. a=5,  n = 320!;  Вариант 21. a=7, n =270!;

Вариант 22. a=11, n=280!;  Вариант 23. a=13, n =310!;  Вариант 24. a=2, n = 330!;

Вариант 25. a=3, n =350!;  Вариант 26. a=5, n=380!;  Вариант 27. A=7, n =390!;

Вариант 28. A=11, n = 400!.

$\varphi a$

Задание 5. По известной функции Эйлера  найти число $a = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \cdot 7^{\delta}$

Вариант 1. $\varphi(a)$=48.  Вариант 2. $\varphi(a)$=320.

Вариант 3. $\varphi(a)$=1152.  Вариант 4. $\varphi(a)$=128.

Вариант 5. $\varphi(a)$=560. Вариант 6. $\varphi(a)$=144.

Вариант 7. $\varphi(a)$=768. Вариант 8. $\varphi(a)$=432.

Вариант 9. $\varphi(a)$=240. Вариант 10. $\varphi(a)$=320.

Вариант 11. $\varphi(a)$=252. Вариант 12. $\varphi(a)$=176.

Вариант 13. $\varphi(a)$=1280. Вариант 14. $\varphi(a)$=120.

Вариант 15. $\varphi(a)$=320. Вариант 16. $\varphi(a)$=880.

Вариант 17. $\varphi(a)$=480. Вариант 18. $\varphi(a)$=576.

Вариант 19. $\varphi(a)$=192. Вариант 20. $\varphi(a)$=96.

Вариант 21. $\varphi(a)$=400. Вариант 22. $\varphi(a)$=200.

Вариант 23. $\varphi(a)$=720. Вариант 24. $\varphi(a)$=768.

ОТВЕТЫ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.1 | $\varphi(a)=$ 48, $a=$ 210; | 5.2 | $\varphi(a)=$ 320, $a=$ 1200; |
| 5.3 | $\varphi(a)=$ 1152, $a=$ ???; | 5.4 | $\varphi(a)=$ 128, $a=$ 320; |
| 5.5 | $\varphi(a)=$ 560, $a=$ 957; | 5.6 | $\varphi(a)=$ 144, $a=$ 630; |
| 5.7 | $\varphi(a)=$ 768, $a=$ 3060; | 5.8 | $\varphi(a)=$ 432, $a=$ 988; |
| 5.9 | $\varphi(a)=$ 240, $a=$ 1050; | 5.10 | $\varphi(a)=$ 320, $a=$ 1200; |
| 5.11 | $\varphi(a)=$ 252, $a=$ 882; | 5.12 | $\varphi(a)=$ 176, $a=$ 460; |
| 5.13 | $\varphi(a)=$ 1280, $a=$ 5610; | 5.14 | $\varphi(a)=$ 120, $a=$ 396; |
| 5.15 | $\varphi(a)=$ 320, $a=$ 820; | 5.16 | $\varphi(a)=$ 880, $a=$ 3630; |
| 5.17 | $\varphi(a)=$ 480, $a=$ 2310; | 5.18 | $\varphi(a)=$ 576, $a=$ 2520; |
| 5.19 | $\varphi(a)=$ 192, $a=$ 720; | 5.20 | $\varphi(a)=$ 96, $a=$ 390; |
| 5.21 | $\varphi(a)=$ 400, $a=$ 825; | 5.22 | $\varphi(a)=$ 200, $a=$ 375; |
| 5.23 | $\varphi(a)=$ 720, $a=$ 2700; | 5.24 | $\varphi(a)=$ 768, $a=$ 1768. |

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

## НЕПРЕРЫВНЫЕ (ЦЕПНЫЕ) ДРОБИ

Вопросы к занятию:
1. Связь с алгоритмом Евклида
2. Разложение обыкновенной дроби в непрерывную
3. Сокращение с помощью разложения в непрерывную дробь
4. Подходящие дроби. Приближение вещественных чисел

### Краткие сведения из теории

Если $\frac{a}{b}$ - обыкновенная несократимая дробь, правильная или неправильная, то с помощью алгоритма Евклида можно эту дробь представить в виде:

$a = bq_0 + a_1$,

$b = a_1q_1 + a_2$,

$a_1 = a_2q_2 + a_3$,

…………….

$a_{n-2} = a_{n-1}q_{n-1} + a_n$,

$a_{n-1} = a_nq_n$.

Здесь $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ – неполные частные;

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ - остатки.

Правую часть такого разложения можно представить в виде:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}}},$$

Выражение, написанное в правой части, называется конечной непрерывной или цепной дробью.

Кратко написанное равенство можно записать так:

$$\frac{a}{b} = (q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

Дроби $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}$ ,…… называются подходящими. Числитель и знаменатель этих дробей можно вычислить по рекуррентным формулам:

$P_{-2} = 0;\ Q_{-2} = 1:\ P_{-1} = 1;\ Q_{-1} = 0;$

*при* $k \geq 0;\ P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}\ ;\ Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ .        (1)

По определению $P_n = a$ , $Q_n = b$.

Процесс вычислений удобно оформить в виде таблицы:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | …… | $n$-1 | $n$ |
| $q_k$ | | | $q_0$ | $q_1$ | $q_2$ | …… | $q_{n-1}$ | $q_n$ |
| $P_k$ | 0 | 1 | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | …… | $P_{n-1}$ | $P_n$ |
| $Q_k$ | 1 | 0 | $Q_0$ | $Q_1$ | $Q_2$ | …… | $Q_{n-1}$ | $Q_n$ |

Между подходящими дробями и самой дробью имеют место соотношения:

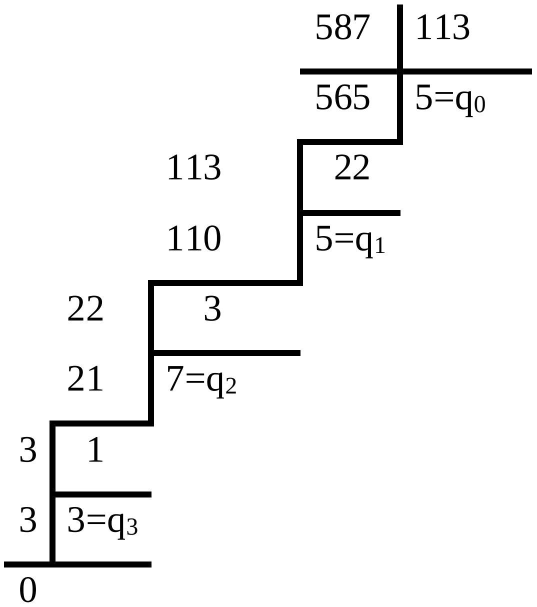
$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \ldots < \frac{a}{b} < \ldots < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}$$

Для оценки погрешности при замене дроби $\frac{a}{b}$ подходящей дробью $\frac{P_k}{Q_k}$ , будем применять следующую формулу:

$$\frac{a}{b} - \frac{Q_k}{Q_k} \le \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} .$$

Пример. Заменить дробь $\frac{a}{b} = \frac{587}{113}$ подходящей дробью с погрешностью 0,001.

Разложим дробь с помощью алгоритма Евклида:




Используя формулы (1), составляем подходящие дроби:

| $k$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | | 5 | 5 | 7 | 3 |
| $P_k$ | 0 | 1 | 5 | 26 | 187 | 587 |
| $Q_k$ | 1 | 0 | 1 | 5 | 36 | 113 |

Если возьмем для замены дробь $\frac{26}{5}$ , то погрешность замены будет

$\approx$ 0,006, что более заданной 0,001, поэтому дробь $\frac{26}{5}$ не подходит.

Берем дробь $\frac{187}{36}$ для которой погрешность $\approx$ 0,0003 < 0,001.

Пример. По данной конечной непрерывной дроби найти соответствующую обыкновенную дробь. Пусть $\frac{a}{b}$ = (2; 1; 1; 3; 1; 2).

Решение. По соответствующим значениям $q_k$, используя рекуррентные формулы, определим соответствующие значения числителя и знаменателя подходящих дробей $P_k$ , $Q_k$. При k=n получим $P_n = a$ , $Q_n = b$.

| $k$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | | *2* | *1* | *1* | *3* | *1* | *2* |
| $P_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 18 | 23 | $a$=*64* |
| $Q_k$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 7 | 9 | $b$=*25* |

$k = 0;\ P_0 = q_0P_{-1} + P_{-2} = 2\times1 + 0 = 2;\ \ Q_0 = q_0Q_{-1} + Q_{-2} = 2\times0 + 1 = 1;$
$k = 1;\ P_1 = q_1P_0 + P_{-1} = 1\times2 + 1 = 3;\ \ Q_1 = q_1Q_0 + Q_{-1} = 1\times1 + 0 = 1;$
$k = 2;\ P_2 = q_2P_1 + P_0 = 1\times3 + 2 = 5;\ \ Q_2 = q_2Q_1 + Q_0 = 1\times1 + 1 = 2;$
$k = 3;\ P_3 = q_3P_2 + P_1 = 3\times5 + 3 = 18;\ \ Q_3 = q_3Q_2 + Q_1 = 3\times2 + 1 = 7;$
$k = 4;\ P_4 = q_4P_3 + P_2 = 1\times18 + 5 = 23;\ \ Q_4 = q_4Q_3 + Q_2 = 1\times7 + 2 = 9;$
$k = 5;\ P_5 = q_5P_4 + P_3 = 2\times23 + 18 = 64;\ \ Q_5 = q_5Q_4 + Q_3 = 2\times9 + 7 = 25.$

Ответ: $\frac{a}{b} = \frac{64}{25}$.

Пример. Пусть дана дробь $\frac{525}{231}$ . Используя алгоритм Евклида разложения в непрерывную дробь, сократить эту дробь.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 525 | 231 |
| | | | 462 | $q_0$=2 |
| | | 231 | 63 | |
| | | 189 | $q_1$=3 | |
| | 63 | 42 | | |
| | 42 | $q_2$=1 | | |
| 42 | 21 | | | |
| 42 | $q_3$=2 | | | |
| 0 | | | | |

Получили $525 = 231\times 2 + 63;$

$231 = 63\times 3 + 42;$

$63 = 42\times 1 + 21;$

$42 = 21\times 2$. Имеем НОД (525;231)=21.

Полученное разложение позволяет сделать сокращенную запись

$\frac{525}{231}$ = (2; 3; 1; 2). Найдем для этого разложения подходящие дроби, используя формулы (1).

Процесс нахождения числителей и знаменателей подходящих дробей удобно находить в таблице:

| $k$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_k$ | | | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $P_k$ | 0 | 1 | 2 | 7 | 9 | $a$=25 |
| $Q_k$ | 1 | 0 | 1 | 3 | 4 | $b$=11 |

$k = 0;\ P_0 = q_0P_{-1} + P_{-2} = 2\times 1 + 0 = 2;\ \ Q_0 = q_0Q_{-1} + Q_{-2} = 2\times 0 + 1 = 1;$
$k = 1;\ P_1 = q_1P_0 + P_{-1} = 3\times 2 + 1 = 7;\ \ Q_1 = q_1Q_0 + Q_{-1} = 3\times 1 + 0 = 3;$
$k = 2;\ P_2 = q_2P_1 + P_0 = 1\times 7 + 2 = 9;\ \ Q_2 = q_2Q_1 + Q_0 = 1\times 3 + 1 = 4;$
$k = 3;\ P_3 = q_3P_2 + P_1 = 2\times 9 + 7 = 25;\ \ Q_3 = q_3Q_2 + Q_1 = 2\times 4 + 3 = 11;$

Получили $\frac{a}{b} = \frac{525}{231} = \frac{25}{11}$ .

Замечание. Дробь вида $\frac{1}{a}$ можно рассматривать как цепную дробь с двумя звеньями: $\frac{a}{b}$ = (0, a). Так же можно представить и отрицательную дробь.

Пример. Разложить в цепную дробь число $-\frac{48}{109}$ .

Имеем $-\frac{48}{109} = -1 + \frac{61}{109}$ . Здесь число звеньев увеличивается на единицу.

Находим: $109 = 61 \cdot 1 + 48$,

$61 = 48 \cdot 1 + 13$,

$48 = 13 \cdot 3 + 9$,

$13 = 9 \cdot 1 + 4$,

$9 = 4 \cdot 2 + 1$,

$4 = 1 \cdot 4$.

Получили: $-\frac{48}{109} = (-1, 1, 1, 3, 1, 2, 4)$.

## Вопросы для собеседования по дисциплине «Алгебра и теория чисел»

1. Определение конечной непрерывной (цепной) дроби. Алгоритм Евклида нахождения конечной дроби.
2. Разложение рационального числа в непрерывную дробь.
3. Подходящие дроби, их свойства.
4. Свойства наилучших приближений действительных чисел.
5. Какие числа называются сравнимыми по модулю m? Какие значения может принимать модуль?
6. Как записывается сравнимость чисел a и b по модулю m?
7. В каком случае a и b называются несравнимыми по модулю m? Как это записать?
8. Приведите примеры пары чисел, сравнимых по модулю 7 и пары чисел, несравнимых по этому модулю.
9. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы два числа были сравнимы по модулю m?
10. Установите, сравнимы ли числа 726 и 162 по модулю 5, пользуясь: а) определением; б) признаком сравнимости чисел по модулю.
11. Какому равенству удовлетворяют числа a, b, сравнимые по модулю m?
12. По какому модулю сравнимы все числа между собой?
13. Сформулируйте свойства сравнений. Каждое свойство проиллюстрируйте примером.
14. В каком случае при делении обеих частей на одно и то же натуральное число модуль не изменяется? Приведите примеры.
15. Как строится класс вычетов?
16. называется представителем класса вычетов?
17. Какие числа удобно брать в качестве представителей?
18. Сколько существует различных классов вычетов по модулю m?
19. Имеется ли класс вычетов, играющий роль нейтрального элемента относительно операции умножения? Какой это класс?
20. Дайте определение полной системе вычетов по модулю m.
21. Может ли полная система вычетов по модулю m содержать:

   a. два равных числа;
   b. два числа, сравнимых по модулю m?

22. Перечислите свойства полной системы вычетов.
23. Дайте определение приведенной системе вычетов.
24. Можно ли получить приведенную систему вычетов из полной системы вычетов по модулю m?
25. Сколько чисел содержит приведенная система вычетов по модулю m?
26. Перечислите свойства приведенной системы вычетов.
27. На каком утверждении основана проверка арифметических действий с помощью сравнений?
28. Как проверить правильность результата деления?
29. Что называют сравнением с неизвестной величиной?
30. Дано сравнение $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$. При каких условиях оно имеет единственное решение, не имеет решения, имеет $d>1$ решений?
31. К решению какого сравнения сводится решение сравнения $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$, если $(a, m)=d>1$ и $b : d$ ?
32. Какая связь существует между решениями сравнения $ax = b(\mathrm{mod}\ m)$ и целыми решениями неопределенного уравнения $ax + my = b$?

# Список литературы

1. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. Часть третья. Основы теории чисел. Учебник для вузов. М.: Высш. шк. 1999. – с. 335 – 340.

2. Грибанов В.У. Сборник упражнений по теории чисел. – М.: Просвещение, 1964.

3. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учебное пособие. – СПб.: Изд. «Лань»,2008.- 224с.