МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра экономической безопасности и налогообложения

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________О.Г. Локтионова
«16» ____02______ 2023г.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СИСТЕМЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Методические указания по выполнению лабораторных работ студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность очной и заочной форм обучения

Курск 2023

УДК 338(075.8)

Составители: Т.Ю. Ткачева, Л.С. Васильева

Рецензент

Кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической безопасности и налогообложения *Рыкунова В.Л.*

Экономико-математические методы в системе экономической безопасности: методические указания по выполнению лабораторных работ студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность очной и заочной форм обучения / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.Ю. Ткачева, Л.С. Васильева. Курск. 2023. 76 с.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат индивидуальные задания и пошаговые рекомендации по их выполнению.

Предназначены для студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 2022. Формат 60х84 1/16. .
Усл.печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Экономико-математическая модель управления запасами хозяйствующих субъектов региона

Цель лабораторной работы – приобретение навыков использования модели Уилсона для управления запасами хозяйствующих субъектов региона в целях обеспечения экономической безопасности.

Теоретические сведения: основные понятия

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования любой организации необходимо создание запасов, например, в производственном процессе, торговле, медицинском обслуживании и т.д. В зависимости от ситуации под запасами могут подразумеваться: готовая продукция, сырье, полуфабрикаты, станки, инструмент, транспортные средства, наличные деньги и др. Неверный расчет необходимых запасов может привести как к незначительному ущербу (потеря части дохода от дефицита товара), так и к катастрофическим последствиям (при ошибочной оценке запасов топлива на самолете).

К экономическому ущербу приводит как чрезмерное наличие запасов, так и их недостаточность. Так, если некоторая компания имеет товарные запасы, то капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается. Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для компании потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей инвестирования. Кроме того, запасы, особенно скоропортящиеся продукты, требуют создания специальных условий для хранения. Для этого необходимо выделить определенные площади, нанять персонал, застраховать запасы. Все это влечет определенные издержки. С другой стороны, чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность возникновения дефицита, что может принести убытки вследствие потери клиентов, остановки производственного процесса и т.д. Кроме того, при малом уровне запасов приходится часто поставлять новые партии товара, что приводит к большим затратам на доставку заказов.

Отсюда следует важность разработки и использования математических моделей, позволяющих найти оптимальный уровень запасов, минимизирующий сумму различных видов издержек.

Любая модель управления запасами (УЗ) в конечном счете, должна давать ответ на два вопроса:

1) Какое количество продукции заказывать?

2) Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос дается с помощью понятия размера заказа, т.е. количества ресурсов, которое необходимо поставлять для пополнения запасов.

Ответ на второй вопрос связан с понятием точки заказа, т.е. критический уровень запасов, при котором следует подавать заказ на поставку очередной партии ресурса.

Большое значение имеют различные виды затрат на УЗ. Затраты на приобретение ресурса являются важным фактором в тех случаях, когда действует система оптовых скидок, зависящих от размера заказа. Затраты на осуществление заказа включают в себя затраты на оформление заказа и затраты на доставку заказа. При частой подаче заказов на мелкие партии товара сумма этих затрат возрастает по сравнению со случаем более редкой подачи заказов на крупные партии. Если запас пополняется не готовым ресурсом со склада, а производится, то затраты на осуществление заказа идут на организацию производственного процесса по выпуску партии ресурса. В этом случае затраты на приобретение ресурса эквивалентны издержкам производства ресурса.

Затраты на хранение запаса представляют собой расходы на физическое содержание запаса на складе и возрастают с увеличением уровня запасов.

Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции. Они могут быть вызваны более высокой платой за срочную доставку товара, ухудшением репутации у потребителя, потенциальной потерей прибыли.

Модель УЗ не обязательно должна включать все перечисленные виды затрат, т.к. некоторые из них могут быть незначительными или отсутствовать.

Существует множество моделей УЗ той или иной степени сложности. Наиболее простой является так называемая основная модель управления запасами (модель Уилсона, система с фиксированным размером заказа). Эта модель несколько оторвана от действительности, но является полезной для понимания существа предмета, проблем, основных закономерностей и подходов в области УЗ.

1. Входные параметры:

1) **ν** – интенсивность потребления запаса, [ед. товара / ед. времени];

2) **s** – затраты на хранение запаса, [ден. ед. / ед. товара . ед. времени];

3) **K** – затраты на осуществление заказа, [ден. ед.].

2. Выходные параметры:

1) **Q** – размер заказа, [ед. тов.];

2) **τ** – период поставки, [ед. времени];

3) **L** – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден.ед./ ед. времени].

Допущения модели Уилсона

1. Интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной, **ν = const** .

2. Время поставки заказа **T** является известной и постоянной величиной.

3. Каждый заказ поставляется в виде одной партии.

4. Затраты на осуществление заказа **K** не зависят от размера заказа.

5. Отсутствие запаса является недопустимым.

Эта модель наиболее близка к следующим реальным ситуациям:

1) потребление основных продуктов питания, например, хлеба, молока, в санатории (оно в течение смены остается постоянным);

2) использование осветительных ламп в здании;

3) использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмой;

4) использование в производственном процессе для сборки изделий покупных комплектующих, например, гаек и болтов.

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рисунке 1.1. Все циклы изменения запасов являются одинаковыми, максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа Q .

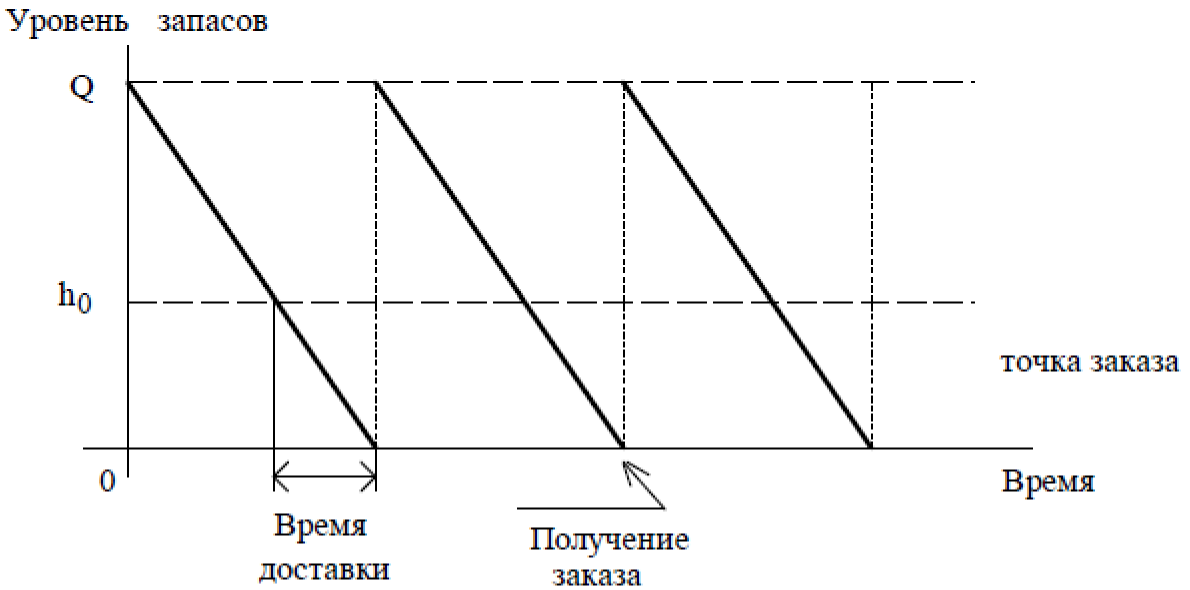


Рис.1.1. Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона

Формулы модели Уилсона

$$Q_W^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}}$$

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2}$$

$$h_0 = \nu T_Д$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu}$$

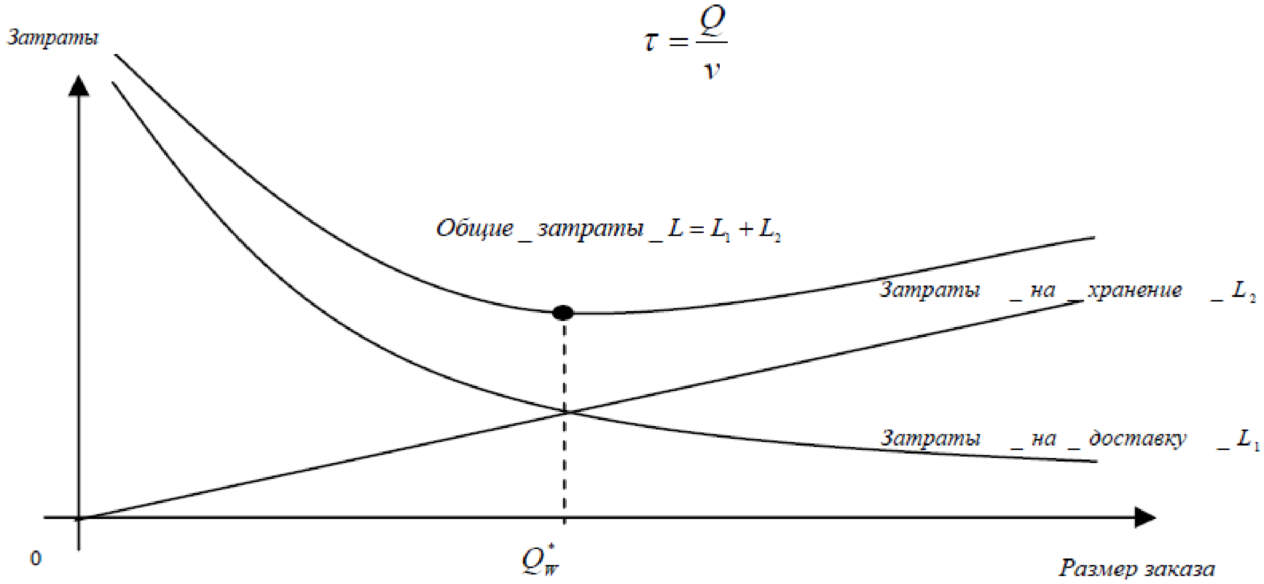


Рис.1.2. График затрат на управление запасами

Существуют следующие разновидности модели управления запасами (построенные на основе модели Уилсона):

- модели, учитывающие скидки (учитывает вариант, когда на заказы большого объема предоставляются скидки);

- модели планирования экономичного размера партии (последовательной производство: один станок производит детали с интенсивностью **α**, следующий станок использует продукцию первого с интенсивностью **β**);

- модели планирования дефицита (в случаях, когда издержки хранения продукции являются гораздо более высокими, чем издержки, связанные с отсутствием запаса в течение небольшого промежутка времени. Такие модели предусматривают два вида ситуаций: «при наличии дефицита заказы покупателей не выполняются и никак не учитываются на будущее» и «заказы покупателей «задалживаются», т.е. выполняются после получения очередного заказа»).

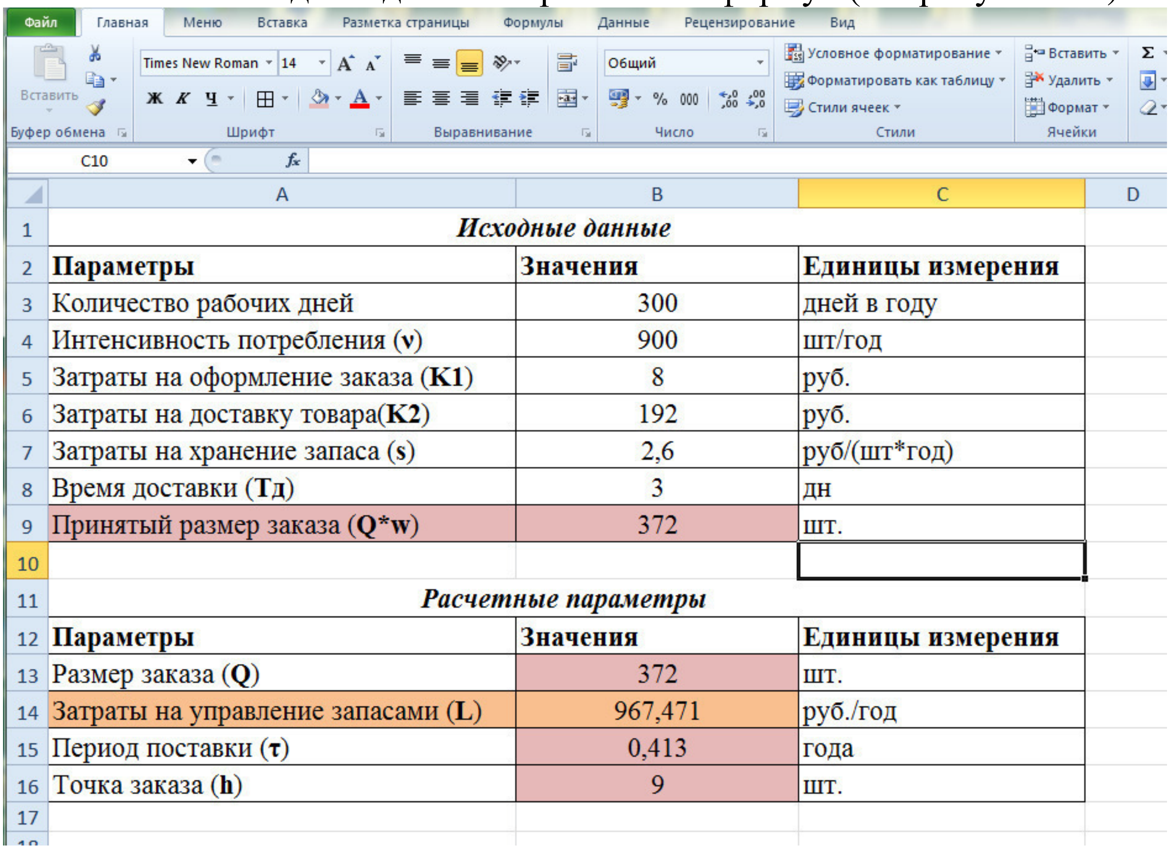
Пример расчета модели Уилсона в MS Excel

Хозяйственный отдел крупного больничного комплекса использует 900 шт упаковок моющего средства «Comet» весом 400 г в год. Стоимость заказа – 200 руб.(стоимость оформления - 8 руб. затраты на доставку 192 руб.), стоимость хранения – 2 руб. 60 коп. за упаковку в год. Доставка заказа осуществляется в течение 3-х дней. Хозяйственный отдел работает 300 дней в году.

Рассчитать: оптимальный объем заказа, годовые расходы на хранение запасов, период поставок и точку заказа.

Решение:

Экранная форма для расчета параметров модели Уилсона должна состоять из двух частей: блока исходных данных и расчетных формул (см. рисунок 1.3).

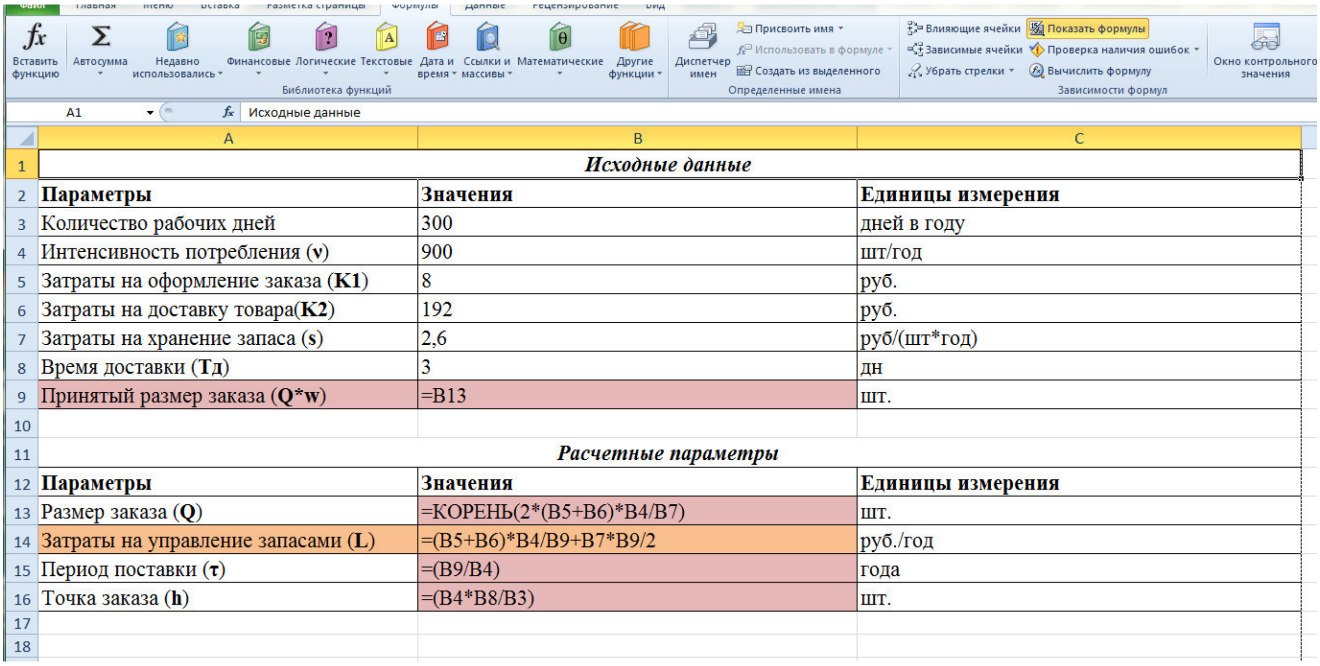


	A	B	C
1	***Исходные данные***		
2	**Параметры**	**Значения**	**Единицы измерения**
3	Количество рабочих дней	300	дней в году
4	Интенсивность потребления (**ν**)	900	шт/год
5	Затраты на оформление заказа (**К1**)	8	руб.
6	Затраты на доставку товара(**К2**)	192	руб.
7	Затраты на хранение запаса (**s**)	2,6	руб/(шт*год)
8	Время доставки (**Тд**)	3	дн
9	Принятый размер заказа (**Q*w**)	372	шт.
10			
11	***Расчетные параметры***		
12	**Параметры**	**Значения**	**Единицы измерения**
13	Размер заказа (**Q**)	372	шт.
14	Затраты на управление запасами (**L**)	967,471	руб./год
15	Период поставки (**τ**)	0,413	года
16	Точка заказа (**h**)	9	шт.

Рис. 1.3. Экранная форма расчета параметров модели Уилсона

Размер реально подаваемого заказа Q может не совпадать с Q^*_w , вычисленным по формуле Уилсона. Поэтому в блок исходных данных помимо параметров, заданных в условии задачи, необходимо ввести Принятый размер заказа, который будет использоваться при вычислении расчетных параметров.

Формулы, вводимые в блок расчетных параметров, представлены на рисунке 1.4.



	A	B	C
1		*Исходные данные*	
2	**Параметры**	**Значения**	**Единицы измерения**
3	Количество рабочих дней	300	дней в году
4	Интенсивность потребления (**v**)	900	шт/год
5	Затраты на оформление заказа (**K1**)	8	руб.
6	Затраты на доставку товара(**K2**)	192	руб.
7	Затраты на хранение запаса (**s**)	2,6	руб/(шт*год)
8	Время доставки (**Тд**)	3	дн
9	Принятый размер заказа (**Q*w**)	=B13	шт.
10			
11		*Расчетные параметры*	
12	**Параметры**	**Значения**	**Единицы измерения**
13	Размер заказа (**Q**)	=КОРЕНЬ(2*(B5+B6)*B4/B7)	шт.
14	Затраты на управление запасами (**L**)	=(B5+B6)*B4/B9+B7*B9/2	руб./год
15	Период поставки (**τ**)	=(B9/B4)	года
16	Точка заказа (**h**)	=(B4*B8/B3)	шт.
17			
18			

Рис. 1.4. Формулы блока расчетных параметров модели Уилсона

Для рассмотрения различных вариантов управления запасами удобно использовать несколько листов, содержащих одну и ту же экранную форму, но различные значения исходных данных. Для этого необходимо скопировать Лист1 с помощью контекстного меню, вызываемого правой клавишей мыши на названии листа.

Ответ:

– оптимальный объем заказа 372 упаковки

– годовые расходы на хранение запасов 967,47 руб

– длительность цикла повторения заказа (период поставок) 0,413 года или 0,413×300=124 рабочих дня

– точка заказа: поскольку среднесуточный спрос равен 900/300 = 3 упаковки, тогда точка восстановления запаса (уровень запасов, при котором делается новый заказ) составит 3×3 = 9 упаковок (среднесуточный спрос*время доставки заказа).

Также в Excel могут быть построены графики, представленные на рисунках 1.5 и 1.6.

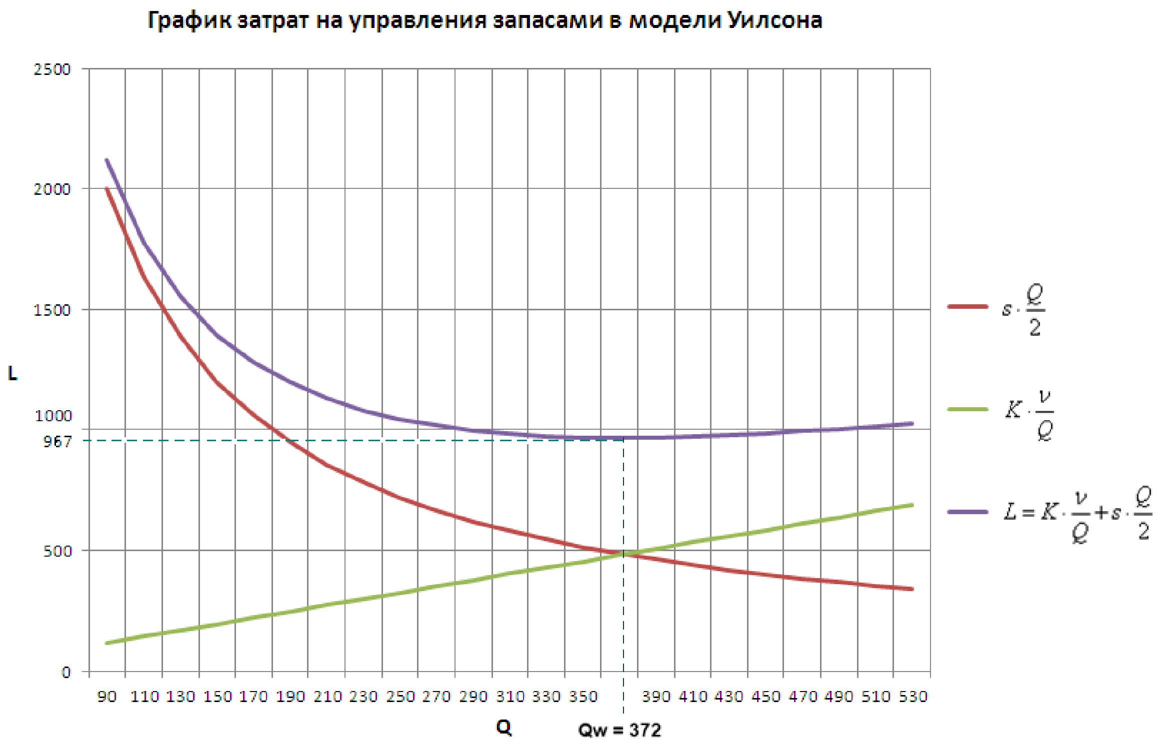


Рис.1.5. Затраты на управление запасами в модели Уилсона

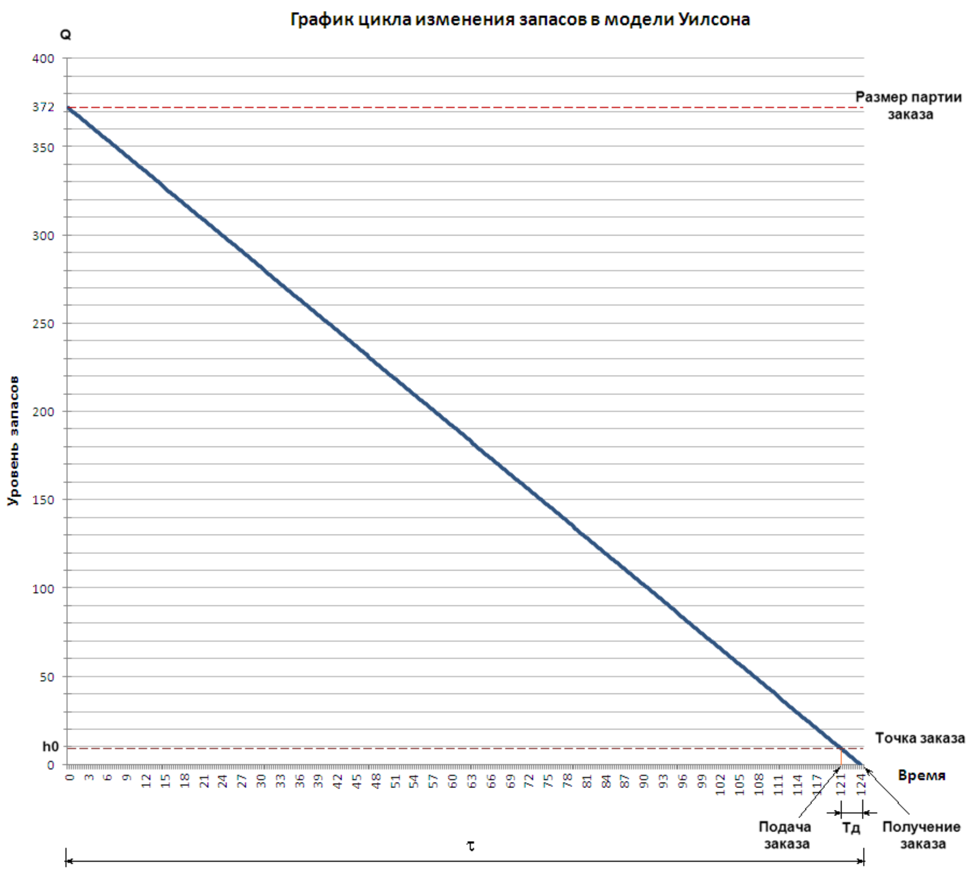


Рис.1.6. Изменение уровня запасов в модели Уилсона

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 1

Номер варианта	**ν**	**s**	**K_1**	**K_2**	**Тд**
1	1000	2	5	100	3
2	1100	3	6	200	4
3	1200	4	7	300	5
4	1300	5	8	400	6
5	1400	6	9	500	7
6	1500	7	10	100	8
7	1600	8	11	200	9
8	1700	9	12	300	3
9	1800	10	13	400	4
10	1900	3	14	500	5
11	2000	4	15	100	6
12	2100	5	16	200	7
13	2200	6	17	300	8
14	2300	7	18	400	9
15	2400	8	19	500	3

Рассчитать выходные параметры, используя формулу управления запасами Уилсона:

1) **Q** – размер заказа, [ед. тов.];
2) **τ** – период поставки, [ед. времени];
3) **L** – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден.ед./ ед. времени].

Построить графики :

1) затраты на управление запасами в модели Уилсона;
2) изменение уровня запасов в модели Уилсона

Лабораторная работа выполняется в программной среде MS Office с поэтапным описанием выполненных действий со скриншотами.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
Финансовый анализ в MS Excel и построение отчетных таблиц

Цель лабораторной работы – приобретение навыков использования функций финансового анализа MS Excel в целях обеспечения экономической безопасности.

Задание 1. Финансовая функция ПЛТ

Рассмотрим пример расчета с помощью финансовой функции ПЛТ 30-летней ипотечной ссуды со ставкой 8% годовых при начальном взносе 20% суммы и ежемесячной (ежегодной) выплате.

Для приведенного на рис. 2.1 ипотечного расчета в ячейку введите формулу, показанную на рис 2.2.

D1

	A	B	C	D	E
1	**Расчет ипотечной ссуды**				
2					
3	**Исходные данные**				
4	Цена	201 900,00			
5	Первый взнос	20%			
6	Годовая ставка	8%			
7	Размер ссуды	161 520,00			
8		Ежемесячные платежи		Ежегодные выплаты	
9	Срок погашения ссуды	360	месяцев	30	лет
10	**Результаты расчета**				
11	Периодические выплаты	1 185,18р.		14 347,41р.	
12	Общая сумма выплат	426 663,55р.		430 422,21р.	
13	Общая сумма комиссионных	265 143,55р.		268 902,21р.	
14					
15					
16					

Фин функц ПЛТ / Фин функц ЧПС(НПЗ) / ПС(ПЗ) / Г

Готово NUM

Рис. 2.1. Результат расчета ипотечной ссуды

E14

	A	B	C	D	E
1	**Расчет ипотечной ссуды**				
2					
3	**Исходные данные**				
4	Цена	201900			
5	Первый взнос	0,2			
6	Годовая ставка	0,08			
7	Размер ссуды	=B4*(1-B5)			
8		Ежемесячные платежи		Ежегодные выплаты	
9	Срок погашения ссуды	=D9*12	месяцев	30	лет
10	**Результаты расчета**				
11	Периодические выплаты	=ПЛТ(B6/12;B9;-B7)		=ПЛТ(B6;D9;-B7)	
12	Общая сумма выплат	=B9*B11		=D9*D11	
13	Общая сумма комиссионных	=B12-B7		=D12-B7	
14					
15					

Фин функц ПЛТ / Фин функц ЧПС(НПЗ) / ПС(ПЗ) / ПРПЛТ(ПЛ

Готово NUM

Рис. 2.2 Формулы для расчета ипотечной ссуды

Задание 2. Пример расчета эффективности неравномерных капиталовложений с помощью функций ЧПС, ВСД и подбора параметра

Рассмотрим следующую задачу. Вас просят дать в долг 10 000 руб. и обещали вернуть через год 2 000 руб., а через два — 4 000 руб., а через 3— 7 000 руб. при какой годовой процентной ставке эта сделка имеет смысл?

На рисунке 2.3 в ячейку **B8** введена формула, зависящая от функции ЧПС, разговор о которой пойдет ниже в данном задании:

= ЧПС(B7;B3:B5)

кроме того, для автоматизации составления таблицы в ячейку **C6** введена формула:

= ЕСЛИ (B6=1; "год"; ЕСЛИ (B6<=4; "года";"лет"))

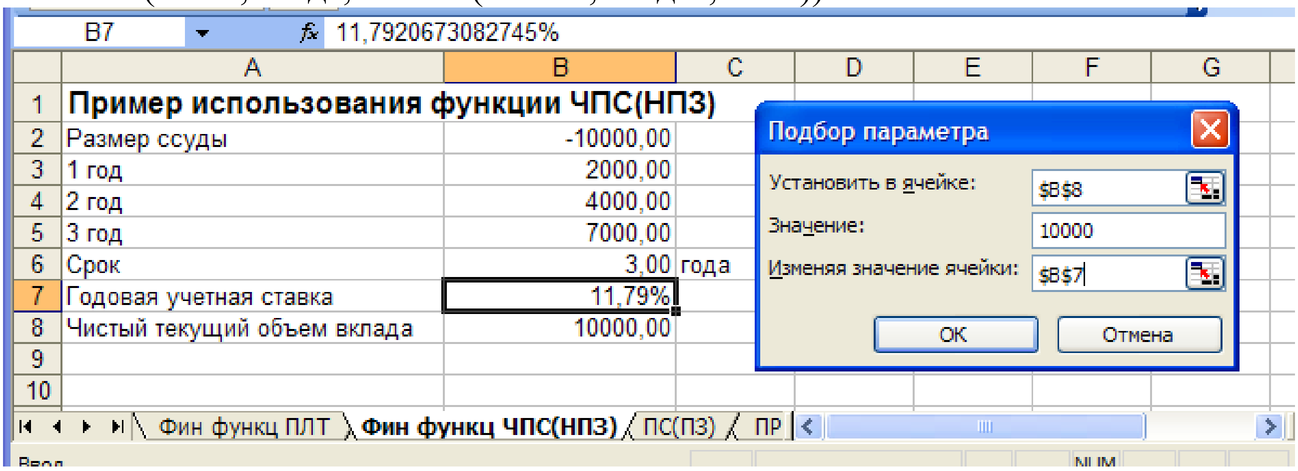


Рис. 2.3. Исходные данные по расчету годовой процентной ставки и диалог

Подбор параметра

Для решения задачи выполните следующие действия:

1. Первоначально в ячейку **B7** введите произвольный процент например, 0%

2. Выберите команду **Сервис→Подбор** параметра и заполните поля ввода, отобразившегося на экране диалогового окна Подбор параметра, как показано на рис.2.3.

В поле **Установить** в ячейке дается ссылка на ячейку **B8**, в которой вычисляется

чистый текущий объем вклада по формуле = ЧПС(B7;B3:B5). В поле Значение введите размер ссуды, равный 10 000.

3. Нажмите кнопку ОК. Средство **Подбор параметра** рассчитает, при какой годовой процентной ставке текущий объем вклада равен 10 000 руб.

Искомая процентная ставка выводится в ячейку **B7**. В нашем случае годовая учетная ставка равна 11,79% . Можно сделать вывод: если банки предлагают большую годовую процентную ставку, то предлагаемая сделка не выгодна.

Функция **ЧПС (NPV)** возвращает чистый текущий объем вклада, вычисляемый на основе ряда последовательных поступлений наличных и нормы амортизации. Текущий объем вклада — это сегодняшний объем будущих платежей (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения).

Функция **ВСД (IRR)** возвращает внутреннюю скорость оборота для ряда последовательных операций с наличными, представленными числовыми значениями.

Объемы операций не обязаны быть регулярными, как в случае ренты. Внутренняя скорость оборота - это процентная ставка дохода, получаемая от инвестиций, состоящих из выплат (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения), которые происходят в регулярные периоды времени.

Задание 3. Пример расчета эффективности капиталовложений с помощью функции ПС

Рассмотрим следующий пример. Вас просят дать в долг 10000 руб. и обещают возвратить по 2 000 в течение 6 лет. Будет ли выгодна сделка при годовой ставке 7%?

В расчете, приведенном на рис.2.4 в ячейку **B5** введена формула функция с функцией **ПС**, о которой речь пойдет ниже в данном разделе:

= ПС(B4;B2;-B3)

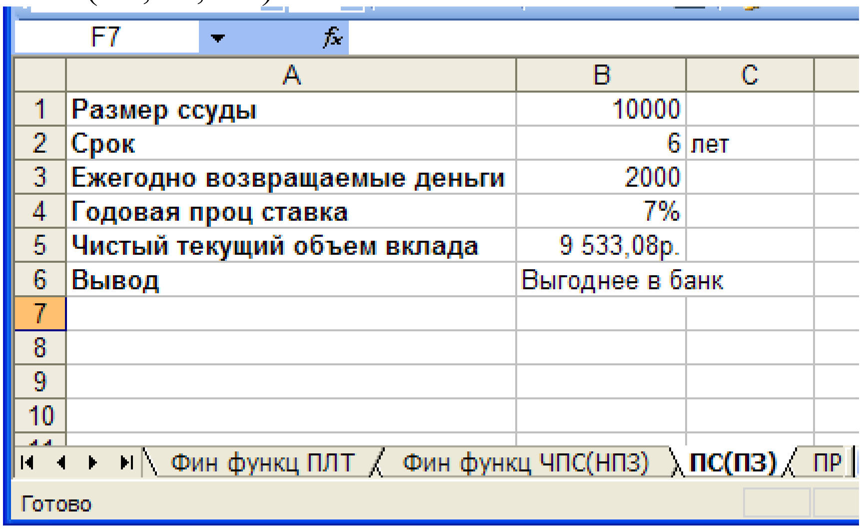


Рис. 2.4. Расчет эффективности капиталовложений

Задание 4. Финансовые функции ПРПЛТ и ОСПЛТ

Рассмотрим пример вычисления основных платежей, платы по процентам, общей ежегодно платы и остатка долга на примере ссуды 100000 руб. на срок 5 лет при годовой ставке 2% (рис. 2.5).

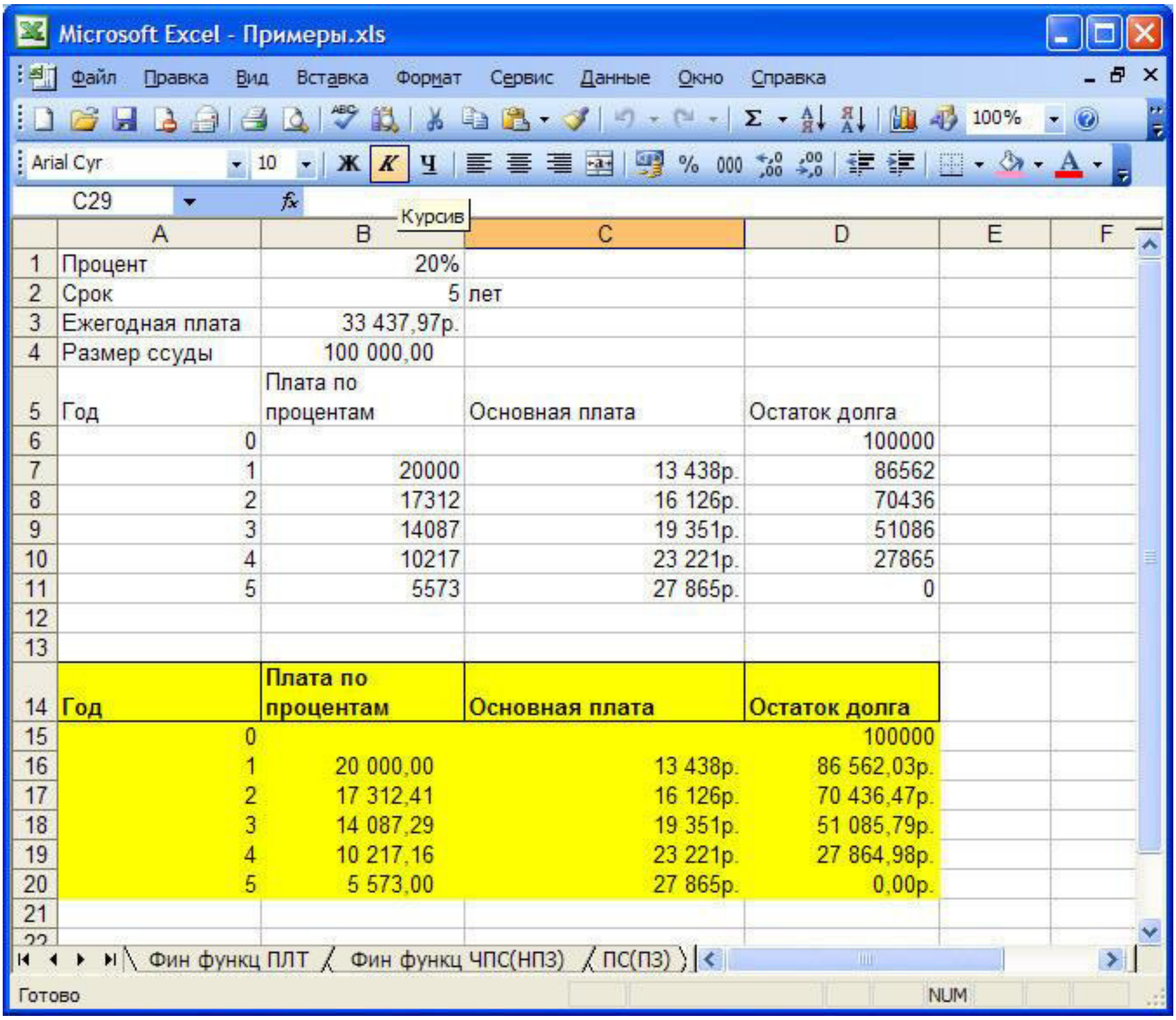
Если в ячейку **D7** ввести формулу =**D6—B7**, то из-за денежного формата при условии что в ячейках **D6** и **C7** введены нули, в ячейку **D&** будет введен **-р.**, а не **0р**. Для избежания этой ситуации в ячейку **D7** вводится формула с функцией **ЕСЛИ**.

В остальные годы эти платы определяются перемещением маркера заполнения диапазона **A7:D7** вниз по столбцам до тех пор, пока в столбец остатка долга не появится ноль.

Отметим, что основную плату по процентам можно было непосредственно найти при помощи функций **ОСПЛТ(PPMT)** и **ПЛПРОЦ(IPMT)**, соответственно.

Функция **ПРПЛТ** возвращает платежи по процентам за данный период на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

Функция **ОСПЛТ** возвращает величину выплаты за данный период на основе периодически постоянных платежей и постоянной процентной ставки.



	A	B	C	D
1	Процент	20%		
2	Срок	5	лет	
3	Ежегодная плата	33 437,97р.		
4	Размер ссуды	100 000,00		
5	Год	Плата по процентам	Основная плата	Остаток долга
6	0			100000
7	1	20000	13 438р.	86562
8	2	17312	16 126р.	70436
9	3	14087	19 351р.	51086
10	4	10217	23 221р.	27865
11	5	5573	27 865р.	0
12				
13				
14	**Год**	**Плата по процентам**	**Основная плата**	**Остаток долга**
15	0			100000
16	1	20 000,00	13 438р.	86 562,03р.
17	2	17 312,41	16 126р.	70 436,47р.
18	3	14 087,29	19 351р.	51 085,79р.
19	4	10 217,16	23 221р.	27 864,98р.
20	5	5 573,00	27 865р.	0,00р.

Рис. 2.5. Вычисление основных платежей и платы по процентам

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 2

Задание 1:

Рассмотрим пример расчета с помощью финансовой функции ПЛТ ___-летней ипотечной ссуды со ставкой ____% годовых при начальном взносе ___% суммы и ежемесячной (ежегодной) выплате.

Номер варианта	Ставка	Общее число периодов, лет	Первоначальный взнос, % от суммы
1	6	15	15
2	7	16	15
3	8	17	20
4	9	18	20
5	10	19	20
6	11	20	10
7	6	21	10
8	7	22	10

9	8	23	15
10	9	24	15
11	10	25	15
12	11	26	20
13	12	27	20
14	13	28	20
15	14	29	20

Задание 2:

Вас просят дать в долг_____ тыс. руб. и обещали вернуть через год ______ тыс.руб., а через два _____ тыс.руб., а через 3_____тыс. руб. при какой годовой процентной ставке эта сделка имеет смысл?

Номер варианта	**Ссуда**	**1 год**	**2 год**	**3 год**
1	100	10	30	80
2	100	10	30	60
3	100	10	30	70
4	100	10	30	80
5	100	10	20	90
6	100	20	40	60
7	100	20	40	50
8	100	20	40	70
9	100	20	45	80
10	100	20	45	60
11	100	20	45	50
12	100	5	40	70
13	100	5	40	65
14	100	5	40	80
15	100	5	40	85

Задание 3:

Вас просят дать в долг_____ тыс. руб. и обещают вернуть по ____ тыс. руб. в течение 5 лет. Будет ли выгодна сделка при годовой ставке 5%?

Номер варианта	**Ссуда**	**1 год**
1	100	25
2	100	23
3	100	22
4	100	21
5	50	11
6	50	12
7	50	13
8	80	17
9	80	18

10	80	19
11	90	18
12	90	19
13	90	20
14	110	24
15	110	25

Задание 4:

Вычислить основные платежи, плата по процентам, общей ежегодно платы и остатка долга на примере ссуды _____ руб. на срок 5 лет при годовой ставке 5%

Данные взять из задание 3.

Лабораторная работа выполняется в программной среде MS Office с поэтапным описанием выполненных действий со скриншотами.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
Метод многокритериальной оценки альтернатив

Цель лабораторной работы – приобретение навыков получения оценки по отдельным критериям и их объединения, агрегирования в общую оценку полезности альтернативы.

Теоретические сведения: основные понятия

Во многих случаях объект экспертизы не может быть охарактеризован только одним критерием и возникает необходимость формирования нескольких критериев. При применении большинства методов возникают две основные проблемы: как получить оценки по отдельным критериям и как объединить, агрегировать эти оценки в общую оценку полезности альтернативы. Поэтому решение многих стратегических задач определения наиболее важных направлений деятельности организации, установление приоритетности финансирования проектов и работ, оценка перспективности проектов и т.д. невозможны без использования систем *многокритериального экспертного оценивания.*

Известно множество методов оценивания альтернатив: аналитические и статистические, оценивание альтернатив сложным критерием одного и нескольких измерений, графические методы и другие.

Сначала разрабатывают перечень критериев. При этом определяется, как измерять уровень качества по каждому критерию, т. е. как строить шкалу измерений. Чаще всего используют балльные шкалы (от 1 до 10 или от 0 до 1). Далее на сцену выступают эксперты, которые рассматривают обычно в качестве «измерительных приборов». Эксперты оценивают каждую из альтернатив по шкале из критериев. Если экспертов несколько, то их оценки сводятся к единой. При наличии оценок каждой из альтернатив по каждому из критериев возможен переход к получению общей ценности альтернативы. Такой переход осуществляется обычно на основании формулы, агрегирующей (т. е. объединяющей) оценки по отдельным критериям в общую оценку полезности альтернативы. Существует масса подобных формул. На этом этапе иногда (при большом числе альтернатив и критериев) используется ЭВМ, в которую вводятся общий вид формулы, оценки альтернатив по критериям, а получают на выходе общие оценки альтернатив.

Разные методы принятия решения при многих критериях отличаются способом перехода к единой оценке полезности альтернатив. Можно выделить ряд групп таких методов. Рассмотрим метод «таблица оценок».

Метод “таблицы оценок”. Сущность метода состоит в следующем[1]:

1) формируются критерии оценки альтернатив;
2) диапазон значений каждого критерия увязывается с безразмерной шкалой;
3) на субъективной основе каждому критерию присваивается коэффициент значимости (веса) в случаях, когда критерии неравноценны;
4) определяются результаты оценки по безразмерной шкале во взаимосвязи с коэффициентом значимости (весом);
5) по каждой альтернативе результаты суммируются;

[1] Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ , 2001. - 245с.

6) выбирается альтернатива с наибольшей или наименьшей (в зависимости от выбранной шкалы) суммой результатов.

Рассмотрим алгоритм применения данного метода. Допустим, разработаны проекты A1 , A2 ... Ai , где i принимает значения от 1 до n. Каждый из них оценивается по критериям К1 , К2 ... К j, где j изменяется от 1 до m . Значимость каждого критерия оценивается соответственно Вк1 , Вк2 ... Вкj . Оценка i-ой альтернативы по j-ому критерию по безразмерной шкале равняется Pij. В табличной форме это имеет вид:

Таблица 3.1 - Оценка альтернатив по сумме безразмерных единиц при неравноценных критериях

Альтернативы	Критерии				
	К1	К2	К3	...	Кm
A1	P11	P12	P13	...	P1m
A2	P21	P22	P23	...	P2m
...	...	...	...	...	...
An	Pn1	Pn2	Pn3	...	Pnm
Коэффициенты значимости	Вк1	Вк2	Вк3	...	Вкm

Для альтернативы Ai общая оценка по всем критериям с учетом их коэффициентов значимости (весов) составит:

Pi = Pij x Вкj .

Оптимальным считают вариант с максимальной или минимальной суммой результатов:

max Pi = max Pij x Вкj,

min Pi = min Pij x Вкj .

Пример выбора одного из поставщиков ООО “Сельхозсервиспродукт”[2]

Диагностика проблемы и формирование критериев оценки. ООО“СельхозСервисПродукт”- малое предприятие мукомольной промышленности, созданное на базе хлебоприемного предприятия.

Оборудование, используемое предприятием, предназначено для выработки пищевой муки по сортам: высший и первый, а также отрубей из мягкой краснозерной озимой пшеницы IY типа; 1,2 и 3 подтипов, 1,2 и 3 класса по ГОСТ 9353 с натуральным весом не менее 750 грамм в литре, а также из мягкой озимой пшеницы с примесью твердой не более 20%. Исходная влажность зерна должна быть не менее 12% и не более 14%.

В условиях перехода материально-технического снабжения на оптовую торговлю материальными средствами производства по прямым договорам со свободно выбираемыми поставщиками для слаженной работы предприятия большую значимость приобретает решение о выборе поставщика.

Для выбора оптимального поставщика ООО “СельхозСервисПродукт” значимыми являются следующие критерии:

1) качество зерна;
2) цена зерна;

[2] Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ , 2001. - 245с.

3) транспортные расходы;
4) форма оплаты;
5) минимальный размер поставляемой партии;
6) срок доставки;
7) ритмичность поставок;
8) надежность поставщика.

Очевидно, что цена и качество являются важнейшими критериями, влияющими как на производственный процесс, так и на конечный результат производства (рентабельность, объем реализации, долю рынка и так далее).

Также необходимо учитывать расстояние до поставщика, что в первую очередь выражается в транспортных расходах, непосредственно влияющих на цену. Так как помимо переменных транспортных затрат, зависящих от количества перевезенного груза, имеются и постоянные расходы, зависящие только от места оформления груза, рекомендуется рассматривать транспортные расходы как отдельный критерий.

Немаловажным критерием является форма оплаты, характеризуемая различными сроками отвлечения средств из оборота и степенью риска для предприятия.

Следующим использованным критерием является минимальная партия, объем которой непосредственно связан с объемом производства и размером свободных оборотных средств и обусловлен способом доставки (железнодорожным или автомобильным транспортом) и регионом отправки. Минимальная партия не должна превышать установленных потребностей в сырье, чтобы не допустить сверхнормативных остатков, что в свою очередь уменьшает сроки оборачиваемости оборотных средств и соответственно повышает уровень рентабельности.

Срок доставки и ритмичность поставок, как и размер минимальной партии, оказывают влияние на сроки оборачиваемости оборотных средств, а также на быстроту адаптации производственного процесса к изменению объемов потребительского спроса.

Надежность поставщика - один из важнейших критериев оценки, включающий в себя возможность обеспечения бесперебойных поставок, необходимых для непрерывного функционирования производства, вероятность точного соблюдения условий поставок, а также имидж поставщика, имеющий большое значение при предварительных формах расчетов за поставляемую продукцию.

Описанные выше критерии между собой не равнозначны. Для оценки их сравнительной предпочтительности генеральному директору ООО “СельхозСервисПродукт” было предложено воспользоваться методом Черчмена-Акоффа.

Критерии упорядочили по убывания их важности: O1 - наиболее важный критерий; ... ; O8 - наименее важный критерий. Наиболее важному критерию присвоили значение 1, остальным критериям оценки: V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8 (табл. 3.2).

Таблица 3.2 - Ранжирование критериев по степени их важности

Критерии	Ранг	Оценка
Качество	1	1
Цена	3	0,6
Транспортные расходы	6	0,4
Форма оплаты	4	0,55
Минимальная партия	7	0,2
Срок доставки	5	0,5
Регулярность поставок	8	0,1
Надежность поставщика	2	0,95
Сумма		4,3

Оценка наиболее важного критерия сравнивается с суммой оценок остальных критериев: V1 и V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8. При этом должно соблюдаться условие:

- если критерий О1 предпочтительнее, чем сумма остальных критериев, то V1> V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8,

-если менее предпочтителен - то

$$V1 < V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8,$$

-если равнозначен - то

$$V1 = V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8.$$

Далее сравниваются V1 и V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7. Сравнение продолжается, пока не сопоставятся V6 и V7 + V8 (табл. 3.3).

Таблица 3.3 - Сравнение оценок по методу Черчмена-Акоффа

1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4+0.2+0.1	согласен
1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4+0.2	согласен
1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4	согласен
1 < 0.95+0.6+0.55+0.5	согласен
1 < 0.95+0.6+0.55	согласен
1 < 0.95+0.6	согласен
0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4+0.2+0.1	согласен
0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4+0.2	согласен
0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4	согласен
0.95 < 0.6+0.55+0.5	согласен
0.95 < 0.6+0.55	согласен
0.6 < 0.55+0.5+0.4+0.2+0.1	согласен
0.6 < 0.55+0.5+0.4+0.2	согласен
0.6 < 0.55+0.5+0.4	согласен
0.6 < 0.55+0.5	согласен
0.55 < 0.5+0.4+0.2+0.1	согласен
0.55 < 0.5+0.4+0.2	согласен
0.55 < 0.5+0.4	согласен
0.5 < 0.4+0.2+0.1	согласен
0.5 < 0.4+0.2	согласен
0.4 < 0.2+0.1	согласен

Описанное выше условие соблюдалось во всех неравенствах, поэтому необходимости в корректировке оценок не возникло.

Полученные результаты нормировали и получили следующие веса критериев: качество –1/4,3= 0,23; цена 0,6/4,3= 0,14; транспортные расходы – 0,09; форма оплаты – 0,13; минимальная партия – 0,05; срок доставки – 0,12; ритмичность поставок – 0,02; надежность – 0,22.

Выбор оптимального поставщика методом “таблицы оценок”. ООО “СельхозСервисПродукт” имеет возможность закупать сырье у трех поставщиков, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Сравнительная характеристика каждого из вариантов представлена в табл. 3.4.

Таблица 3.4 - Характеристика поставщиков ООО “СельхозСервисПродукт”

Критерии оценки	Поставщики		
	Колх. “Свобода”,	Колх. “Прогресс”,	Колх. “Светлый путь”,

	Курская область	Урал	Сибирь
1. Качество зерна	Низкое	Высокое	Высокое
2. Цена , руб./т	2700	2500	2350
3.Транспортные расходы, руб.	50	350	650
4. Форма оплаты	Давальческая система	Предоплата (100%)	По факту отправки сырья
5. Минимальный размер партии, т	65	130	130
6. Срок доставки, дней	1	8	10
7. Ритмичность поставок, дн.	1	3	2
8. Надежность поставщика, %	средняя надежность	ненадежен	надежен

Агрегированный коэффициент качества зерна рассчитывается по формуле:

$$Kагр = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{Ki - Эi}{Эi}}$$

где Ki - частные показатели качества зерна;

Эi - эталонные значения показателей, субъективно определенные генеральным директором ООО "ССП".

Качество зерна определяется такими показателями, как натура, содержание клейковины и индекс деформации клейковины (ИДК).

Их допустимые значения:

натура 720-790 г/литр;
клейковина 21-32%;
ИДК 40-90.

За эталонные принимаются верхние допустимые значения клейковины, натуры и индекса деформации клейковины (32%, 790 г/литр и 60 соответственно), т.к. продукция, произведенная из сырья с такими характеристиками, пользуется наибольшим спросом.

Действительные значения показателей:

Курское зерно: натура-763 г/литр;
клейковина-23 %;
ИДК - 91.

Уральское зерно: натура-772 г/литр;
клейковина-28 %;
ИДК-68.

Сибирское зерно: натура-781 г/литр;
клейковина-27 %;
ИДК-55.

Возможные варианты оплаты сырья с точки зрения выгоды для предприятия (срока отвлечения средств из оборота, степени риска и т. д.) можно охарактеризовать следующим образом:

давальческая система - очень выгодно,
предоплата 100% - очень невыгодно,

по факту отгрузки - выгодно.

Для количественной оценки удобства формы оплаты воспользуемся балльной шкалой Харрингтона:

очень невыгодно 1,
невыгодно 2,
средняя степень выгоды 3,
выгодно 4,
очень выгодно 5 .

Надежность поставщиков оценим аналогичным образом:

очень ненадежен 1,
ненадежен 2,
сред. надежность 3,
надежен 4,
очень надежен 5.

Сопоставим полученные результаты с безразмерной шкалой. Диапазон изменения отвлеченных единиц зададим от 1 до 10. В качестве оптимальной примем наибольшую сумму безразмерных единиц. Для получения округленных значений по безразмерной шкале несколько расширим диапазоны табличных значений (табл. 3.5).

Таблица 3.5 - Соответствие размерных и безразмерных характеристик

Безразмерная шкала	Качество, безр.	Цена, руб./т	Транспортные расходы, руб./т	Формаоплаты безр.	Минимальная партия, т	Срок доставки, дн.	Ритмичность поставок, дн.	Надежность поставщика, безр.
1	0,45	3000	900	1	325	10	10	1
2	0,40	2900	800	1	292,5	9	9	1
3	0,35	2800	700	1-2	260	8	8	1-2
4	0,30	2700	600	2	227,5	7	7	2
5	0,25	2600	500	2-3	195	6	6	2-3
6	0,20	2500	400	3	162,5	5	5	3
7	0,15	2400	300	3-4	130	4	4	3-4
8	0,10	2300	200	4	92,5	3	3	4
9	0,05	2200	100	4-5	65	2	2	4-5
10	0	2100	0	5	32,5	1	1	5

Теперь вместо заданных характеристик подставим безразмерные единицы, умножим их на соответствующие весовые коэффициенты, посчитаем суммы этих произведений и найдем максимум (табл. 3.6).

Таблица 3.6 - Оценка альтернатив по сумме безразмерных единиц при неравноценных критериях

Критерии	Вес. коэф.	Альтернативы					
		“Свобода”		“Прогресс”		“Светлый путь”	
	Вк	Р	ВкР	Р	ВкР	Р	ВкР
Качество	0,23	4	0,92	6	1,38	7	1,61
Цена	0,14	4	0,56	6	0,84	7,5	1,05

Транспортные расходы	0,09	9,5	0,855	6,5	0,585	3,5	0,315
Форма оплаты	0,13	10	1,3	1	0,13	9	1,17
Минимальная партия	0,05	9	0,45	7	0,35	7	0,35
Срок доставки	0,12	10	1,2	3	0,36	1	0,12
Ритмичность поставок	0,02	10	0,2	8	0,16	9	0,18
Надежность поставщика	0,22	6	1,32	4	0,88	10	2,2
Сумма	1		6,805		4,685		6,995

Вывод: Максимальная сумма произведений соответствует третьей альтернативе, то есть при выборе альтернативы методом “Таблица оценок” оптимальным вариантом является закупка зерна в Сибири у колхоза “Светлый путь”.

Выбор оптимального поставщика методом “Полигон альтернатив”. На основании принятых критериев и установленных безразмерных оценок в пределах критерия представим графически каждую из предложенных альтернатив и осуществим выбор наилучшего решения (рис. 3.1).

Наилучшие безразмерные значения критериев расположим дальше от центра окружности. Следовательно, оптимальным будем считать вариант, которому соответствует многоугольник, очертивший наибольшую площадь.

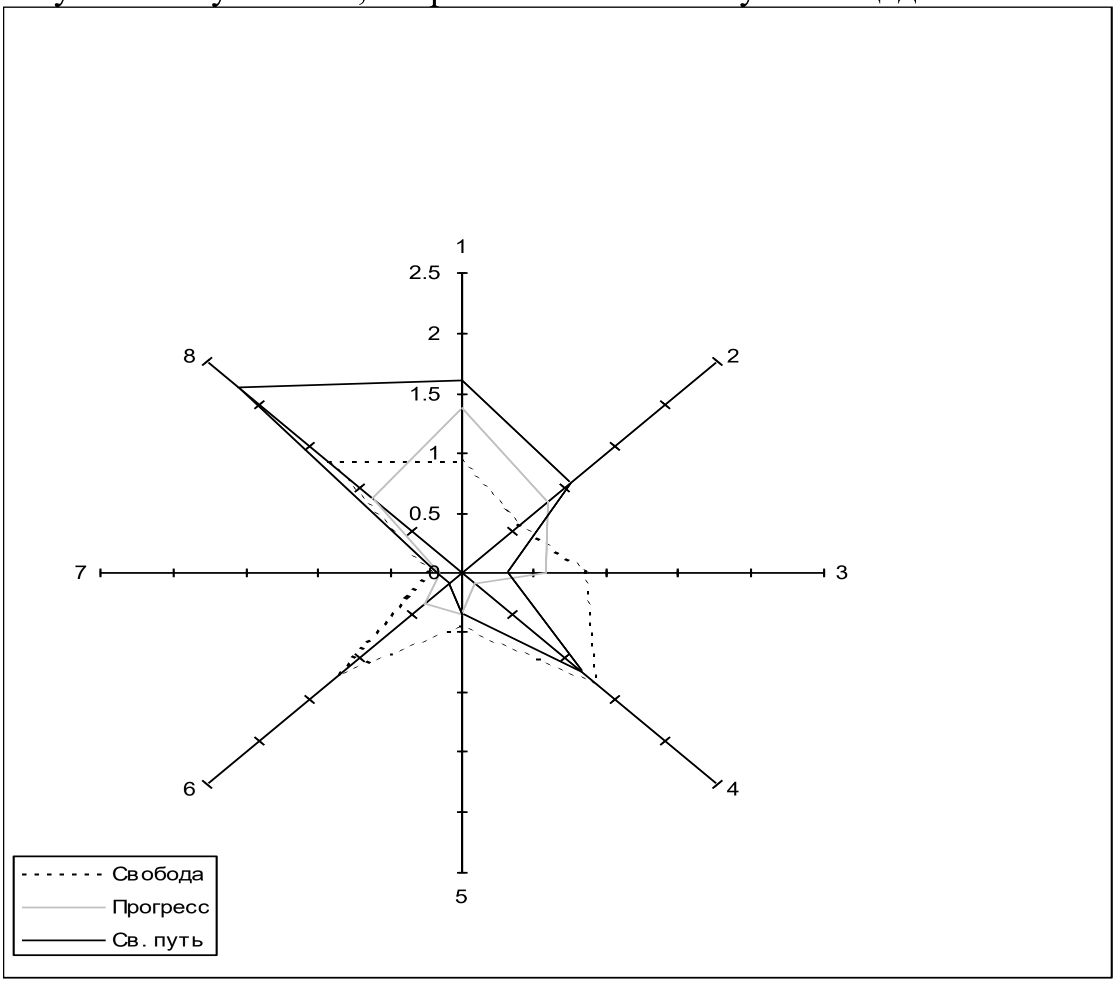


Рисунок 3.1 - Сравнение альтернатив выбора поставщика методом "Полигон альтернатив"

Рис. 3.1. позволяет визуально оценить, что наибольшая площадь соответствует третьей альтернативе. Значения критериев соизмерены, оси - промасштабированы, поэтому для ранжирования альтернатив надо рассчитать площади многоугольников.

Угол между осями равен 45°(360°/8). Следовательно, площадь многоугольников определится формулой:

$$S_{общ} = S1 + S2 + S3 + S4 + S5 + S6 + S7 + S8$$

$$Sn = 1/2 \times A \times B \times SIN\ 45°$$ SIN 45°= 0.7071

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 3.7 - Расчет площадей многоугольников для выбора наилучшей альтернативы

“Свобода”			“Прогресс”			“Светлый путь”		
A	B	Sn	A	B	Sn	A	B	Sn
0.92	0.56	0.1822	1.38	0.84	0.4099	1.61	1.05	0.5978
0.56	0.855	0.1693	0.84	0.585	0.1738	1.05	0.315	0.117
0.855	1.3	0.393	0.585	0.13	0.0269	0.315	1.17	0.1303
1.3	0.45	0.2069	0.13	0.35	0.0161	1.17	0.35	0.1448
0.45	1.2	0.1909	0.35	0.36	0.0446	0.35	0.12	0.0149
1.2	0.2	0.0849	0.36	0.16	0.0204	0.12	0.18	0.0076
0.2	1.32	0.0934	0.16	0.88	0.0498	0.18	2.2	0.14
1.32	0.92	0.4294	0.88	1.38	0.4294	2.2	1.61	1.2525
Sобщ ко =1.7499			Sобщ у =1.1708			Sобщ с =2.4048		

Согласно данным табл. 1.7 наибольшую площадь занимает многоугольник, соответствующий третьей альтернативе (закупка зерна у колхоза “Светлый путь”). Результаты расчетов совпали с выводами, сделанными визуально и полученными методом “Таблица оценок”.

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 3

Дано условие: ОАО «Электроагрегат» выбирает одну из четырех систем управления запасами (табл. 1.8).

Таблица 1.8 - Сравнительная характеристика систем управления запасами

Критерии оценки	Система управления запасами			
	Система управления с фиксированным размером заказа	Система управления с фиксированным интервалом времени между заказами	Система с установленной периодичностью пополнения запасов до установленного уровня	Система «Максимум-минимум»
Затраты на хранение	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**
Издержки выполнения заказа	**b1**	**b2**	**b3**	**b4**
Реагирование системы на задержку поставки	Быстро реагирует	Реагирует	Реагирует	Средняя степень
Наличие страхового запаса	**Z**	**Z**	**Z**	**Z**
Вид контроля за товарно-материальными ценностями	Высокая степень контроля	Отсутствует постоянный контроль	Высокая степень контроля	Отсутствует постоянный контроль
Размер максимального желательного запаса	**c1**	**c2**	**c3**	**c4**
Реагирование системы на дефицит	Быстро реагирует	Реагирует	Быстро реагирует	Медленно реагирует
Реакция системы на изменение темпов потребления	Медленно реагирует	Реагирует	Быстро реагирует	Медленно реагирует

Номер варианта	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**b1**	**b2**	**b3**	**b4**	**Z**	**c1**	**c2**	**c3**	**c4**
1	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	2377	1408	2288	2288
2	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
3	4000	4500	4400	4450	605	688	873	750	900	1700	1800	1400	1200
4	4000	4500	4400	4450	505	588	473	650	800	1100	1200	1100	1000
5	5000	5500	5400	5450	505	588	473	650	700	1100	1200	1100	1000
6	5000	5500	5400	5450	500	600	470	650	600	1100	1200	1100	1000
7	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	1700	1800	1400	1200
8	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
9	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	2377	1408	2288	2288
10	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
11	4000	4500	4400	4450	605	688	873	750	900	1700	1800	1400	1200
12	4000	4500	4400	4450	505	588	473	650	800	1100	1200	1100	1000
13	5000	5500	5400	5450	505	588	473	650	700	1100	1200	1100	1000
14	5000	5500	5400	5450	500	600	470	650	600	1100	1200	1100	1000
15	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	1700	1800	1400	1200

Задание: Используя методы «таблицы оценок» и «полигон альтернатив» предложить наилучший вариант.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Решение стратегических матричных игр

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения стратегических матричных игр.

Теоретические сведения: основные понятия

Одним из важнейших математических методов, которые применяются в экономических исследованиях, являются методы принятия управленческих решений в конфликтных ситуациях, которые объединяются под общим названием «Теория игр». Конфликтной ситуацией называется некоторая проблема, в которой участвуют несколько сторон, интересы которых противоположны. Методы теории игр позволяют планировать экономические процессы, оптимально распределять ресурсы, выбирать наилучшие варианты при принятии решений, решать другие задачи оптимизации.

Решение игр в чистых стратегиях

Рассмотрим следующую модель. Некоторый субъект А (предприниматель, организация, совет и др.) желает принять решение, на результат которого влияет другой субъект В, цели которого противоположны А. При этом В анализирует все возможные варианты А и принимает такое решение, которое приводит к наименьшему выигрышу А (соответственно максимальному своему выигрышу). Примерами таких ситуаций служат отношения между продавцом и покупателем, адвокатом и прокурором, кредитором и дебитором, истцом и ответчиком и т.д. Подобные ситуации называются *конфликтными*. Математические методы анализа конфликтных ситуаций объединяются под названием *теории игр*, сама конфликтная ситуация носит название *игры*, а стороны, участвующие в конфликте, называются *игроками*. Если в игре участвуют только две стороны, то игра называется *парной*. Исход игры называется *выигрышем* (или *проигрышем*) игроков. Если выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, то игра называется *антагонистической*. Пусть игрок А может выбрать в качестве действий одну из n альтернатив: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Эти альтернативы в теории игр принято называть стратегиями. Аналогично, игрок В может принять одну из m стратегий $B_1, B_2, \dots, B_m$. Предположим, что известны выигрыши (проигрыши) игрока А при любой выбранной им стратегии A_i и любом ответе ему игроком В – стратегии B_j. Пусть этот результат выражен числом a_{ij} (которое может быть и отрицательным в случае проигрыша А). Величины a_{ij} образуют матрицу:

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{21}	…	A_{2m}
…			…	
A_n	a_{n1}	A_{n2}	…	a_{nm}

Эта матрица называется платежной или матрицей игры.

Рассмотрим игру со стороны А. Он, выбирая свою стратегию A_i, понимает, что В ответит ему такой стратегией B_j , чтобы выигрыш А был минимальным. Поэтому, из всех наихудших вариантов (минимальных элементов каждой строки платежной матрицы) α=$\min\limits_{j}(aij)$, игроку A выгодно выбрать стратегию, соответствующую максимальному из этих элементов:

$$\alpha=\max_i(\alpha i)=\max_i \min_j(aij).$$

Величина α называется нижней ценой игры или максимином. Это гарантированный выигрыш игрока A. С другой стороны, игрок B выбирая свою стратегию Bj понимает, что игрок A ответит такой стратегией Ai, чтобы его выигрыш был максимален. Поэтому из наилучших вариантов для A (максимальных элементов каждого столбца) β = $\max\limits_i aij$ игроку B рационально выбрать свою стратегию, соответствующую минимальному из этих чисел:

$$\beta=\min_j(\beta j) = \min_j \max_i(aij).$$

Величина β называется *верхней ценой игры* или *минимаксом*. Это максимальный проигрыш игрока B. Реальный результат решения конфликтной ситуации, называемый *ценой игры* ν, заключен между верхней и нижней ценой: $\alpha \le \nu \le \beta$. В случае, если верхняя и нижняя цены совпадают $\alpha = \beta = \nu$, то игра имеет *решение в чистых стратегиях*, то есть можно точно определить стратегии (Ai Bj), которые выгодны для обоих сторон. Если одна сторона отойдет от своей оптимальной стратегии, то ее выигрыш от этого только уменьшится.

Пример 1. Дебитор A желает выбрать один из четырех условий займа: A1, A2, A3, A4. Кредитор может на любой вариант займа ответить вариантом предоставления кредита B1, B2, B3, B4, B5. Процентные ставки для дебитора при любом варианте кредитора представлены платежной матрицей:

Bj / Ai	B1	B2	B3	B4	B5
A1	6	1	8	7	4
A2	4	3	2	6	5
A3	3	7	6	9	8
A4	2	6	7	8	3

Находим минимальные элементы каждой строки платежной матрицы αI и из них находим максимальное значение. Из максимальных элементов каждого столбца βj выбираем минимальный.

Bj / Ai	B1	B2	B3	B4	B5	αi
A1	6	1	8	4	4	1
A2	9	6	7	$\boxed{5}$	8	$\boxed{5}$
A3	3	7	6	2	8	2
A4	2	6	7	3	3	2
βj	9	7	8	$\boxed{5}$	8	

Видно, что верхние и нижние цены игры совпадают $\alpha = \beta = \nu = 5$, следовательно для обоих игроков выгодны стратегии (A2, B4) и процентная ставка, равная 5. При принятии игроками иной стратегии, отличной от оптимальной, этот игрок только проиграет.

Решение игр в смешанных стратегиях

Рассмотрим теперь ситуацию, когда верхняя и нижняя цены не совпадают $\alpha \neq \beta$. В этом случае игра решается в *смешанных стратегиях*. Смешанный стратегии предполагают, что каждый игрок будет выбирать случайно из возможно допустимых чистых стратегий (но выбирать их с вероятностями), либо частично реализовывать чистые стратегии в заданных пропорциях. Нахождение этих вероятностей (или пропорций) и является решением игры. Таким образом, в общем виде, решением игры являются смешанные стратегии $\begin{pmatrix} A1 & A2 & \dots & An \\ p1 & p2 & \dots & pn \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B1 & B2 & \dots & Bm \\ q1 & q2 & \dots & qm \end{pmatrix}$, где pi и qj – вероятности чистых или доли чистых стратегий Ai и Bj в смешанной.

Рассмотрим сначала простейший случай игры, решаемой в смешанных стратегиях – игру 2x2, когда у каждого игрока имеется лишь по две стратегии. Платежная матрица такой игры есть:

Bj / Ai	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Решение игры $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, где $p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$, $p_2 = 1 - p_1$,

$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$, $q_2 = 1 - q_1$. Цена игры равна $v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$.

Пример 2. Игрок A прячет в одной из рук монету. Игрок B пытается угадать руку с монетой. Если B не угадывает, то A получает от B 1 у.е. Если B угадывает руку с монетой и эта рука правая, то он получает от A 1 у.е. Если B находит монету в левой руке, то он получает от A 2 у.е. Определить оптимальные стратегии поведения для каждого игрока и средний выигрыш для A.

Пусть стратегии игроков: A_1 – спрятать в правой; B_1 – искать в правой; A_2 – спрятать в левой; B_2 – искать в левой. Игровая матрица для данной ситуации относительно игрока A имеет вид:

Bj / Ai	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	1	-2

Тогда вероятность чистых стратегий в смешанной равны:

$p_1 = \frac{-2-1}{-1-2-1-1} = \frac{3}{5}$, $p_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, $q_1 = \frac{-2-1}{-1-2-1-1} = \frac{3}{5}$, $q_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Цена игры равна $v = \frac{(-1)*(-2)-1*1}{-1-2-1-1} = -\frac{1}{5}$.

Таким образом, игроку А нужно случайно чередовать руки с монетой, но в правой руке прятать в среднем в трех случаях из пяти, а в левой в двух случаях из пяти. В это случае в каждой игре в среднем А получит (-1/5) руб., то есть теряет 20 коп., игра для А не выгодная. Для игрока В выгодно также чередовать руки в которых он ищет монету, но в правой руке искать в 3 случаях из 5, что приведет к среднему выигрышу для него в 20 коп. за игру.

В данном примере виден смысл величин p_1, p_2 и q_1, q_2. Это – вероятности выбора чистых стратегий в смешанной (вероятности выбрать руку в общей стратегии поведения). Однако данные показатели могут иметь смысл доли реализации чистых стратегий в смешанной. Рассмотрим это на примере.

Пример 3. Торговая организация А выделяет 1 млн. руб. на закупку товара на реализацию. Имеется выбор между закупкой товаров T_1 или T_2. Ожидаемая прибыль зависит от того, какой товар T_1 или T_2 будет закупать конкурент В. Если оба будут закупать T_1, то ввиду конкуренции А понесет убытки в 200 тыс. руб. Если оба будут закупать T_2, то по той же причине А понесет убытки в 100 тыс. руб. Если А закупит T_1 а В закупит T_2, то прибыль А составит 900 тыс. руб. Если А закупит T_2 а В закупит T_1, то прибыль А составит 700 тыс. руб. Как лучше поступить игрокам при оптимальном поведении?

Обозначим стратегии игроков:

A_1 – компания А закупает товар T_1,

A_2 – компания А закупает товар T_2,

B_1 – компания В закупает товар T_1,

B_2 – компания В закупает товар T_2.

Платежная матрица имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	-200	900
A_2	700	-100

Тогда вероятности чистых стратегий в смешанной равны:

$p_1 = \frac{-100-700}{-200-100-700-900} = \frac{8}{19}$, $p_2 = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{19}$, $q_1 = \frac{-100-900}{-200-100-700-900} = \frac{10}{19}$,

$q_2 = 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{10}$.

Цена игры равна $v = \frac{(-200)*(-100)-900*700}{-200-100-700-900} = 226{,}316$.

Следовательно, игроку выгодно реализовать обе стратегии A_1 и A_1 в долях 8/19=0,421 и 11/19=0,579, то есть закупить и товар T_1, и T_2. При этом T_1 должен быть закуплен на сумму 421 тыс. руб., а T_2 на сумму 579 тыс. руб. Прибыль, не зависимо от поведения соперника, составит 226,316 руб. То же можно сказать и для игрока В (если, конечно, игра антагонистическая и выигрыш А это проигрыш В): закупать оба товара, первого на сумму 10/19 от запланированной, а второго на сумму 9/19.

В некоторых случаях удается аналогичным образом решить и игровые ситуации с платежными матрицами, большего размера, упростив их до игры 2х2. При этом используются следующие правила:

1) Если все элементы какой-либо строки платежной матрицы не превышают соответствующих элементов любой другой строки, то строка с меньшими элементами соответствует стратегии, которая для игрока А заведомо не выгодна при любом ответе игрока В. Поэтому из платежной матицы строку с меньшими элементами можно вычеркнуть, тем самым выведя из рассмотрения соответствующую ей стратегию.

2) С другой стороны, для игрока В невыгодна заранее, независимо от ответа А, стратегия, которой соответствует столбец платежной матрицы, у которого все элементы больше или равны соответствующим элементам любого другого столбца. Столбец с большими элементами также можно вывести из рассмотрения, вычеркнув из платежной матрицы.

Пример 4. Директор транспортной компании А, оказывающей транспортные услуги по перевозке пассажиров в областном центре, планирует открыть один или несколько маршрутов: A_1, A_2, A_3 и A_4. Для этого было закуплено 100 микроавтобусов. Он может поставить весь транспорт на одном из маршрутов (наиболее выгодном), либо распределить по нескольким маршрутам. Спрос на транспорт, а соответственно и прибыль компании во многом зависит от того, какие маршруты в ближайшее время откроет главный конкурент - компания В. Ее руководство полностью владеет ситуацией и может открыть несколько из пяти маршрутов B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. Оценки прибыли компании А (млн. руб.) при любом ответе В представлена платежной матрицей:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	6	4	6	9
A_2	6	5	3	4	8
A_3	7	6	6	7	5
A_4	6	7	5	4	3

Находим оптимальное распределение прибыли по маршрутам и ожидаемую прибыль.

Вычеркиваем из таблицы второй столбец, т.к. все его элементы больше или равны элементам третьего. Вычеркиваем четвертую строку, т.к. ее оставшиеся элементы меньше элементов третьей. Элементы первого столбца больше элементов третьего, вычеркиваем первый столбец. Вторую строку вычеркиваем в результате сравнения с первой. Четвертый столбец вычеркиваем после сравнения с третьим.

В результате получаем матрицу:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	~~5~~	~~6~~	4	~~6~~	9
A_2	~~6~~	~~5~~	~~3~~	~~4~~	~~8~~
A_3	~~7~~	~~6~~	6	~~7~~	5
A_4	~~6~~	~~7~~	~~5~~	~~4~~	~~3~~

которая эквивалентна матрице:

B_j	B_3	B_5

Ai		
A1	4	9
A3	6	5

Тогда вероятности чистых стратегий компании А в смешанной $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}$ равны:

$p_1 = \frac{5-6}{4+5-6-9} = \frac{1}{6}$, $p_3 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Цена игры равна $v = \frac{4*5-9*6}{4+5-6-9} = \frac{34}{6} \approx 5{,}67$.

Следовательно, 1/6 часть автопарка (17 машин) нужно направить на маршрут A_1, а остальные 5/6 парка (83 машины) на маршрут A_3. Маршруты A_2 и A_4 использовать не рационально. При этом прибыль, не зависимо от ответа компании В будет составлять 34/6 млн. руб.

Приведение матричных игр к задаче линейного программирования и решение их на ЭВМ

Рассмотрим случай, когда платежную матрицу нельзя упростить до размера 2x2.

Пусть упрощенная платежная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

Тогда для нахождения вероятностей p_i и q_j смешанных стратегий $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$, необходимо решать прямую и двойственную задачи линейного программирования вида:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \to \min;$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n \ge 1; \\ \dots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n \ge 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = 1, 2, \dots, n.$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m \to \max$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \le 1; \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m \le 1; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0;\ j = 1, 2, \dots, m.$$

Из решения задач линейного программирования находятся цена игры $v = \frac{1}{x1 + x2 + \dots + xn} = \frac{1}{y1 + y2 + \dots + ym}$ и вероятности состояний $p_i = x_i v$, $q_j = y_j v$.

Пример 5. Построить прямую и двойственную задачи линейного программирования для решения матричной игры, заданной платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Прямая и двойственная задачи линейного программирования имеют вид:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \geq 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 8x_5 \geq 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \geq 1; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 \geq 1; \end{cases}$$

$x_i \geq 0;\ i = 1, 2, 3, 4, 5.$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 9y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 5y_4 \leq 1; \\ 2y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 3y_4 \leq 1; \\ 6y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq 1; \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 \leq 1; \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 1; \end{cases}$$

$y_j \geq 0;\ j = 1, 2, 3, 4.$

Из решения можно найти игры цену игры $v = \frac{1}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5} = \frac{1}{y_1+y_2+y_3+y_4}$ и вероятности состояний $p_i = x_i v$, (i=1, 2, 3, 4, 5); $q_j = y_j v$, (j= 1, 2, 3, 4).

Известно, что решение задач линейного программирования связано с громоздкими вычислениями. Однако эти задачи легко решаются на ЭВМ. Для численного решения этих задач можно использовать надстройку пакета прикладных программ MS Excel «Поиск решения», которая входит в MS Office. Как это делать на практике – рассмотрим на примере.

Пример 6. В регионе две конкурирующие фирмы по производству обуви: фирма А и фирма В. Фирма А может производить в будущем году 4 новых модели обуви: A_1, A_2, A_3 и A_4. Конкурент В также может производить 4 новые модели: B_1, B_2, B_3, B_4. Так как обувь аналогичная, то спрос и соответственно прибыль каждой фирмы от производства каждой модели зависит от того, что производит конкурент. Оценки прибыли фирмы А (которые, ввиду конкуренции, пропорциональны убыткам фирмы В) приведены в таблице (тыс. р.):

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	30	20	50
A_2	60	50	40	80
A_3	20	60	80	60
A_4	50	70	30	50

Как рациональнее всего поступить каждой фирме, чтоб получить наибольшую прибыль?

Построим задачу линейного программирования. Рассмотрим задачу со стороны фирмы А. Введем параметры, пропорциональные вероятностям чистых стратегий, которые равны x_1, x_2, x_3, x_4. Тогда нужно составить задачу линейного программирования (ЗЛП), то есть необходимо найти минимум функции при ограничениях:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1; \\ 30x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 70x_4 \geq 1; \\ 20x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 30x_4 \geq 1; \\ 50x_1 + 80x_2 + 60x_3 + 50x_4 \geq 1; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0.$

Для решения полученной задачи линейного программирования необходимо подготовить предварительно в электронной таблице данные. Запускаем программу MS EXCEL. Вводим в открывшуюся электронную таблицу в ячейку A1 (левая верхняя) надпись «Переменные» (здесь и далее кавычки вводить не надо), а в следующие ячейки — произвольные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Это вначале могут быть произвольные числа, например единицы. Вводим в ячейки B1–E1 в каждую цифры 1.

Далее, в ячейку A2 вводим подпись «Целевая» (целевая функция одинаковая для всех задач, зависит только от числа альтернатив для игрока A). Вводим в соседнюю ячейку B2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): **«=B1+C1+D1+E1»**, что означает формулу $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, так как значение x_1 хранится в ячейке B1, значение x_2 хранится в ячейке C1 и т. д. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку A3 и вводим в ней текст «Ограничения». Переключившись в английский режим клавиатуры, вводим в ячейку B3 формулу **«=70*B1+60*C1+20*D1+50*E1»**, которая соответствует левой части первого ограничения системы $70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1$ (здесь переменная x_1 —данные в ячейке B1, переменная x_2 — данные в C1 и т. д.). Три остальных ограничения вводим в ячейки C3–B3, а именно:

в ячейку C3: **«=30*B1+50*C1+60*D1+70*E1»**,

в ячейку D3: **«=20*B1+40*C1+80*D1+30*E1»**,

в ячейку E3: **«=50*B1+80*C1+60*D1+50*E1».**

После этого вызываем специальную надстройку, которая позволяет решать подобные задачи.

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ. Если Вы работаете в «EXCEL 2003» или ранней версии, то заходим в меню СЕРВИС, выбираем НАДСТРОЙКИ и проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК», заходим вновь в меню СЕРВИС, выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ. Если Вы работаете в «EXCEL 2007» или более поздней версии, то нажимаем левой кнопкой мыши по круглой кнопке ―Office‖ в верхнем левом углу экрана, внизу выбираем «Параметры EXCEL», слева выбираем НАДСТРОЙКИ, нажимаем кнопку «Перейти» внизу окна и в открывшемся окне проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК». В меню ДАННЫЕ выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ, открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» даем ссылку на B2 (ставим в поле курсор и щелкаем мышью по B2). Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на минимальное значение. Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки B1–E1. Далее, переводим курсор в поле «Ограничения» и вводим ограничения. Для этого нажимаем на кнопку «Добавить» слева от поля и в появившемся окне в поле «Ссылка на ячейку» даем ссылку на ячейку, содержащую левую часть первого ограничения $70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1$, которая хранится в ячейке B3 (то есть переводим курсор в поле «Ссылка на ячейку» и щелкаем мышью по ячейке B3). В центральном поле выбираем знак неравенства — ограничения : «≥», в поле «Ограничение» вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить», вводим в поля: ссылку на «C3», «≥», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить», ссылку на «D3», «≥», «1», «ОК», «Добавить», ссылку на «E3», «≥», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$ нажимаем «Добавить», в поле «Ссылка на ячейку» ставим курсор и обводим ячейки В1–Е1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить». Результат: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}015$, $x_3 = 0{,}05$, $x_4 = 0$, что видно из ячеек В1–Е1. Вводим в А5 подпись «Цена игры», а в соседнюю В5 формулу (переключаясь на английский язык) «=1/(B1+C1+D1+E1)». Результат: 50. Это ожидаемая прибыль для фирмы А. Находим вероятности чистых стратегий в смешанной стратегии p. Для этого вводим в А6 подпись «P1=«, а в соседнюю В6 формулу «=B5*B1», вводим в А7: «P2=«, а в В7 формулу «=B5*C1», в А8: «P3=«, а в В8: «=B5*D1», в А9: «P4=«, в В9: «=B5*E1». Данные показатели (0; 0,75; 0,25; 0) и есть решение задачи. То есть фирме А модели А1 и А4 выпускать не надо совсем, модель А2 должна составлять 75 % всего ассортимента, а А3 — 25 %.

Рассмотрим теперь решение относительно фирмы В. Для него вводим переменные, пропорциональные вероятностям чистых стратегий y_1, y_2, y_3, y_4 ЗЛП для игрока В имеет вид:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 70y_1 + 30y_2 + 20y_3 + 50y_4 \le 1; \\ 60y_1 + 50y_2 + 40y_3 + 80y_4 \le 1; \\ 20y_1 + 60y_2 + 80y_3 + 60y_4 \le 1; \\ 50y_1 + 70y_2 + 30y_3 + 50y_4 \le 1; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0.$$

Переходим на «Лист 2» электронной таблицы, щелкнув на соответствующей закладке внизу таблицы. Вводим в ячейки открывшейся чистой электронной таблицы в ячейку А1 надпись «Переменные», а в следующие ячейки, произвольные значения переменных, например, вводим в ячейки В1–Е1 в каждую цифры 1. В ячейку А2 вводим подпись «Целевая». Вводим в ячейку В2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): **«=B1+C1+D1+E1»**, что означает формулу y_1, + y_2, + y_3, + y_4. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку А3 и вводим в ней текст «Ограничения». Переключившись в английский режим клавиатуры, вводим в ячейку В3 формулу **«=70*B1+30*C1+20*D1+50*E1»**, которая соответствует левой части первого ограничения системы $70y_1 + 30y_2 + 20y_3 + 50y_4 \le 1$.

Вводим:

в ячейку C3: **«=60*B1+50*C1+40*D1+80*E1»**,

в ячейку D3: **«=20*B1+60*C1+80*D1+60*E1»**,

в ячейку E3: **«=50*B1+70*C1+30*D1+50*E1».**

После этого вызываем надстройку в меню «сервис» и подменю «Поиск решений», открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» даем ссылку на В2. Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на максимальное значение. Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки В1–Е1. Далее переводим курсор в поле «Ограничения» и вводим ограничения. Для этого нажимаем на кнопку «Добавить» и далее в поле «Ссылка на ячейку» даем ссылку на ячейку В3, в центральном поле выбираем знак неравенства — ограничения :

«≤», в поле «Ограничение» вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить», вводим в поля: «С3», «≤», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить», ссылку на «D3», «≤», «1», «ОК», «Добавить», ссылку на «Е3», «≤», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$; $y_4 \geq 0$ нажимаем «Добавить», в поле «Ссылка на ячейку» ставим курсор и обводим ячейки В1–Е1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить». Результат решения ЗЛП в ячейках В1–Е1. Вводим в А5 подпись «Цена игры», а в соседнюю В5 формулу (переключаясь на английский язык) «=1/(B1+C1+D1+E1)». Находим вероятности чистых стратегий q в смешанной стратегии игрока В. Для этого вводим в А6 подпись «q1=«, а в соседнюю В6 формулу «=B5*B1», вводим в А7: «q2=«, а в В7 формулу «=B5*C1», в А8: «q3=«, а в В8: «=B5*D1», в А9: «q4=«, в В9:»=B5*E1». Данные показатели и есть решение задачи для фирмы В. Из решения видно, что лучше всего 50 % выпускать В1 и 50 % В3, модели В2 и В4 выпускать не следует.

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 4

Задание № 1.

Предприниматель собирается вложить сумму в количестве 100 тыс. р. в совместное предприятие. У него есть четыре альтернативы выбора формы заключения договора с партнером (стратегии A_1, A_2, A_3, A_4). С другой стороны, прибыль предпринимателя зависит от того, какую стратегию поведения выберет его партнер и совет директоров (у партнера — контрольный пакет акций). Имеются оценки выигрышей предпринимателя для каждой пары альтернатив (A_i, B_j) (прибыль приводится в процентах годовых от вложения), которые приведены в платежной матрице a_{ij}. Определить оптимальную стратегию вложения денег для предпринимателя, если партнер получает тем большую прибыль, чем меньше получит предприниматель, поэтому в его задачу входит минимизировать прибыль предпринимателя.

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Номер варианта	**Платежная матрица, a_{ij}**				**Номер варианта**	**Платежная матрица, a_{ij}**			
1	30	60	30	70	**9**	10	70	30	80
	60	50	40	70		30	40	50	30
	50	60	30	50		40	60	70	90
	40	70	40	90		20	30	60	70
2	100	90	30	70	**10**	70	40	20	30
	80	70	40	50		80	50	40	70
	30	40	20	60		50	70	30	80
	70	50	30	50		20	30	20	60
	45	30	50	80		10	30	10	50

3	75	70	90	80	**11**	80	60	30	50
	60	40	50	70		40	30	20	60
	10	20	30	40		20	50	20	70
4	40	50	50	60	**12**	90	70	50	80
	20	30	30	40		60	30	40	50
	10	20	20	30		30	70	20	90
	5	15	15	20		20	50	20	70
5	60	70	90	80	**13**	40	30	50	60
	40	50	70	30		80	70	60	70
	20	30	20	10		70	60	50	55
	5	15	15	20		60	50	40	40
6	20	10	20	50	**14**	50	60	90	80
	50	40	50	60		30	80	50	30
	30	20	30	70		40	50	90	80
	40	10	20	60		60	50	40	40
7	70	20	60	50	**15**	50	70	40	30
	90	40	80	50		30	80	70	10
	80	50	70	90		40	50	60	20
	40	10	20	60		30	50	20	10
8	60	50	40	30					
	70	60	70	90					
	60	50	80	80					
	40	30	60	70					

Задание № 2.

В регионе имеются две конкурирующие компании А и В, которые производят меховую одежду. Перед отделом маркетинга компании А поставлена задача определить оптимальный выпуск новых видов продукции, при этом имеется возможность выпускать один или несколько моделей одежды из возможных трех, которые обозначим A_1, A_2 и A_3. Ожидаемая прибыль по прогнозам экспертов во многом зависит от того, какие модели будет выпускать конкурент В. По имеющейся информации компания В может наладить выпуск одной или нескольких моделей из четырех: B_1, B_2, B_3 и B_4. Прогнозируемая прибыль компании А для каждой модели одежды при всех возможных вариантах выпуска одежды компанией В описывается платежной матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

Методами теории игр ответить на вопрос: В каких долях нужно выпускать каждый вид одежды из возможных компанией А, чтобы полученная прибыль была максимальна и не зависима от действий компании В?

Номер варианта	Платежная матрица игры, a_{ij}				Номер варианта	Платежная матрица игры, a_{ij}			
1	6	5	3	4	**9**	2	0	-1	3
	7	4	7	8		2	2	2	-1
	3	3	2	4		1	3	1	-3
2	7	5	6	7	**10**	8	7	8	8
	6	9	10	11		5	4	5	7
	5	7	8	9		7	6	7	9
3	4	3	1	4	**11**	5	4	6	8
	6	3	2	5		9	8	5	6
	5	7	6	4		6	5	9	9
4	10	9	6	7	**12**	6	2	3	4
	8	7	4	5		4	5	6	7
	5	4	2	6		7	3	4	5
5	7	2	6	5	**13**	7	6	5	3
	9	4	8	9		8	5	4	7
	8	5	3	5		5	7	3	2
6	3	5	2	-4	**14**	5	2	4	3
	-1	0	-2	3		3	8	9	10
	1	6	-4	-6		4	1	2	3
7	8	9	4	2	**15**	3	2	1	2
	9	7	6	9		8	6	4	5
	5	8	7	3		4	3	5	7
8	9	4	5	6					
	8	7	3	7					
	7	6	9	9					

Задание № 3.

Составить задачу линейного программирования для выбора оптимальных смешанных стратегий для сторон A и B.

Номер варианта	Платежная матрица, a_{ij}						Номер варианта	Платежная матрица, a_{ij}					
1	3	4	5	3	6	8	**9**	4	4	9	7	7	5
	6	3	5	3	1	9		3	8	4	7	6	7
	5	3	5	5	10	9		1	3	1	4	7	6
	9	7	6	8	6	7		1	3	5	8	5	7
2	4	3	5	7	5	8	**10**	7	6	5	4	7	5
	2	7	1	2	5	8		3	7	6	6	3	4
	5	3	2	5	7	2		7	7	5	7	3	2
	8	7	3	5	2	2		7	6	7	1	6	9
3	5	2	4	2	2	1	**11**	2	5	6	2	4	8
	6	8	9	4	7	8		3	3	7	6	7	4
	5	8	5	2	2	6		6	6	4	2	4	8
	7	9	3	4	9	6		8	7	6	5	6	8
4	2	2	1	5	1	3	**12**	1	3	1	4	7	6
	4	7	8	8	9	4		1	3	5	8	5	7
	2	2	6	6	3	8		1	8	4	6	5	6
	4	9	6	4	7	4		2	6	8	3	7	4

5	3	4	9	5	5	4	**13**	7	6	7	1	6	9
	4	5	4	4	4	3		4	7	6	6	3	9
	4	5	3	7	5	6		8	5	7	7	6	5
	4	3	7	6	6	8		6	5	6	4	2	3
6	4	5	3	7	1	5	**14**	4	4	5	3	7	1
	1	2	3	5	3	2		3	1	2	3	5	3
	7	2	2	7	6	5		6	7	2	2	7	6
	6	4	6	3	7	6		8	6	4	6	3	7
7	7	1	5	8	6	3	**15**	6	2	4	8	1	3
	5	3	2	9	7	7		7	6	7	4	1	3
	7	6	5	4	7	7		4	2	4	8	1	8
	3	7	6	6	3	4		6	5	6	8	2	6
8	5	2	3	7	7	2							
	2	2	4	9	1	1							
	2	5	6	2	4	8							
	3	3	7	6	7	4							

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Решение поставленной задачи в условиях полной неопределенности и в условиях риска

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения поставленной задачи в условиях полной неопределенности и в условиях риска.

Теоретические сведения: основные понятия

Критерий максимакса

$$M = \max_i \max_j a_{ij}$$

Максимальный критерий Вальда

$$W = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий минимального риска Сэвиджа

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

$$G_i = \lambda \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max_j a_{ij}$$

Критерий среднего выигрыша

$$K_{\text{опт}} = \max \sum_{j=1}^{N} p_j k_{ij}$$

Критерий Лапласа

$$K_{\text{опт}} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} \right)$$

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 5

Дано условие:

Рудное месторождение разведано редкой сетью скважин (в основном по категории С1). В связи с нехваткой сырья требуется принять решение о мощности рудника, не ожидая завершения детальной разведки. Разведанные запасы месторождения (точнее их математическое ожидание) составляют 40 млн.т. Так как верность подсчета запасов по категории С1 составляет 100%, реально резервы сырья могут изменяться от 20 до 80 млн. т. Обозреваются 5 возможных вариантов запасов 20, 30, 40, 60 и 80 млн.т . (которые соответствуют П1-П5 состояниям природы).

В свою очередь рассматриваются 4 варианта строительства рудника мощностью 2,3,4 или 5 тыс.т.(которые соответствуют стратегиям А1-А4). Для каждой вариации мощности при рассматриваемых состояниях природы (вариантов запасов месторождения) рассчитаны вероятные значения суммарной приведенной прибыли (таблица 1).

Отрицательное значение прибыли, существующие в ряде случаев, демонстрирует, что в связи с не подтверждением запасов и крупными капиталовложениями эксплуатация месторождения убыточна.

Для утверждения окончательного решения о мощности рудника **необходимо рассчитать критерии** Вальда, Сэвиджа, Лапласа и среднего выигрыша (математическое ожидание прибыли), задаваясь вероятностями состояний природы (по аналогии с другими месторождениями). Для критерия среднего выигрыша предполагаем, что наблюдается стандартный закон распределения погрешности подсчета запасов, вследствие этого примем вероятности состояния равными соответственно (p1 ;p2 ; p3 ; p4 ; p5)=(0,12; 0,25; 0,3; 0,25; 0,08). **Для критерия Гурвица** зададимся тремя значениями коэффициента λ , выражающим долю оптимизма λ = 0,5; 0,3 и 0;7.

Вариант мощности	Прибыль, млн руб. для вариантов запасов (состояний природы), млн. т				
	20($П_1$)	30($П_2$)	40($П_3$)	60($П_4$)	80($П_5$)
2 (A_1)	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1
3 (A_2)	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2
4 (A_3)	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3
5 (A_4)	a_4	b_4	c_4	d_4	e_4

Номер варианта	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**b1**	**b2**	**b3**	**b4**	**c1**	**c2**	**c3**	**c4**
1	-10	-40	-65	-85	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
2	-15	-10	-45	-70	60	10	-20	60	50	110	90	70
3	-20	-30	-45	-75	40	-10	-35	-25	60	90	100	110
4	-30	-50	-80	-70	30	-80	-40	-45	80	60	90	100
5	-10	-30	-45	-15	50	-50	-15	-45	80	90	100	80
6	-80	-40	-65	-45	50	-80	-45	-10	70	50	120	100
7	-90	-40	-65	-85	90	-20	-45	-70	120	100	90	130
8	-70	-20	-65	-40	70	-50	-15	-45	90	100	80	70
9	-110	-90	-65	-50	50	120	-45	-65	170	100	120	130
10	-100	-50	-50	-30	80	-60	-50	-70	70	110	100	80
11	-40	-50	-70	-40	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
12	-10	-50	-60	-80	70	-20	-45	-60	90	90	100	70
13	-80	-40	-65	-50	80	-70	-40	-50	70	100	110	140
14	-10	-60	-80	-90	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
15	-100	-40	-60	-80	50	-40	-80	-30	70	100	120	130

Номер варианта	**d1**	**d2**	**d3**	**d4**	**e1**	**e2**	**e3**	**e4**
1	70	100	120	130	72	105	150	165
2	80	90	170	100	80	100	140	180
3	50	80	180	180	90	180	190	220
4	90	50	140	90	70	100	140	180
5	80	100	150	190	80	180	140	210
6	80	70	120	60	80	100	140	180
7	100	90	110	100	80	190	140	180
8	180	50	100	140	80	100	110	40
9	60	90	110	100	50	150	70	110
10	80	50	170	100	80	100	120	180
11	70	90	140	110	80	180	140	90

12	80	50	90	100	90	100	190	150
13	50	90	150	100	80	100	140	110
14	90	150	100	40	80	90	170	150
15	60	90	140	100	180	100	140	210

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Решение задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

Инструкция по использованию Microsoft Excel для решения ЗЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести условие задачи:

a) создать экранную форму для ввода условия задачи:

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

b) ввести исходные данные в экранную форму:

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) ввести зависимости из математической модели в экранную форму:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) задать ЦФ (в окне «Поиск решения»):

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

e) ввести ограничения и граничные условия (в окне «Поиск решения»):

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. Решить задачу:

a) установить параметры решения задачи (в окне «Поиск решения»);

b) запустить задачу на решение (в окне «Поиск решения»);

c) выбрать формат вывода решения (в окне «Результаты поиска решения»).

Пример

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

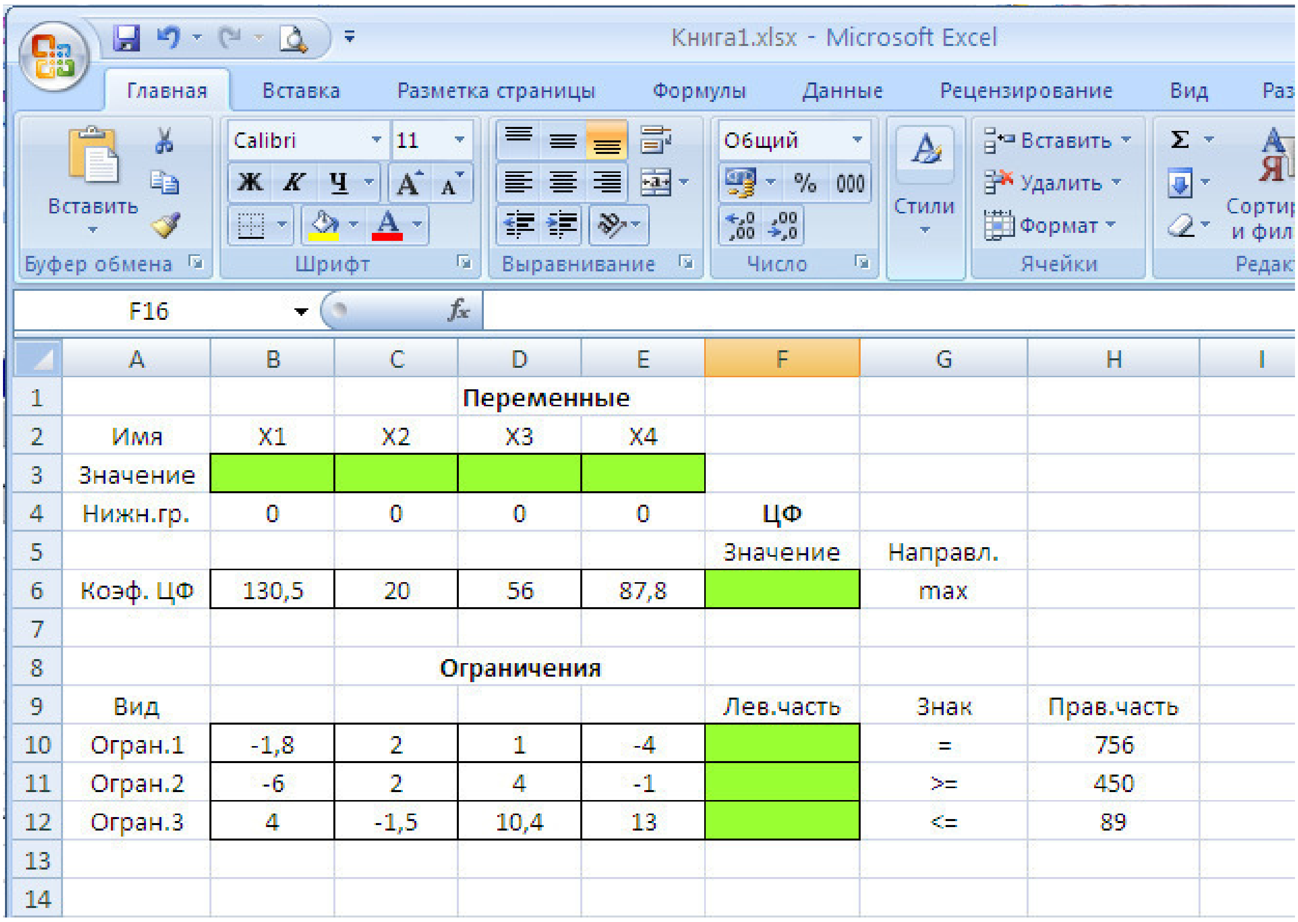
$$Z(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \ge 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \le 89, \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (1)$$

1.Ввод исходных данных

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 6.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Переменные				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение							
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max	
7								
8				Ограничения				
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89
13								
14								

Рис. 6.1. Экранная форма задачи (1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рисунке 1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1) соответствуют ячейки **B3** (x1), **C3** (x2), **D3** (x3), **E3** (x4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** (c1= 130,5), **C6** (c2= 20), **D6** (c3= 56), **E6** (c4= 87,8), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** (b1=756), **H11** (b2= 450), **H12** (b3= 89) и т.д.

2.Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1) значение ЦФ определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \, . \qquad (2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рисунок 1), формулу для расчета ЦФ (2) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 \, . \qquad (3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **«Enter»**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), *(4)*

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ: означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6** и **E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рисунок 6.2).

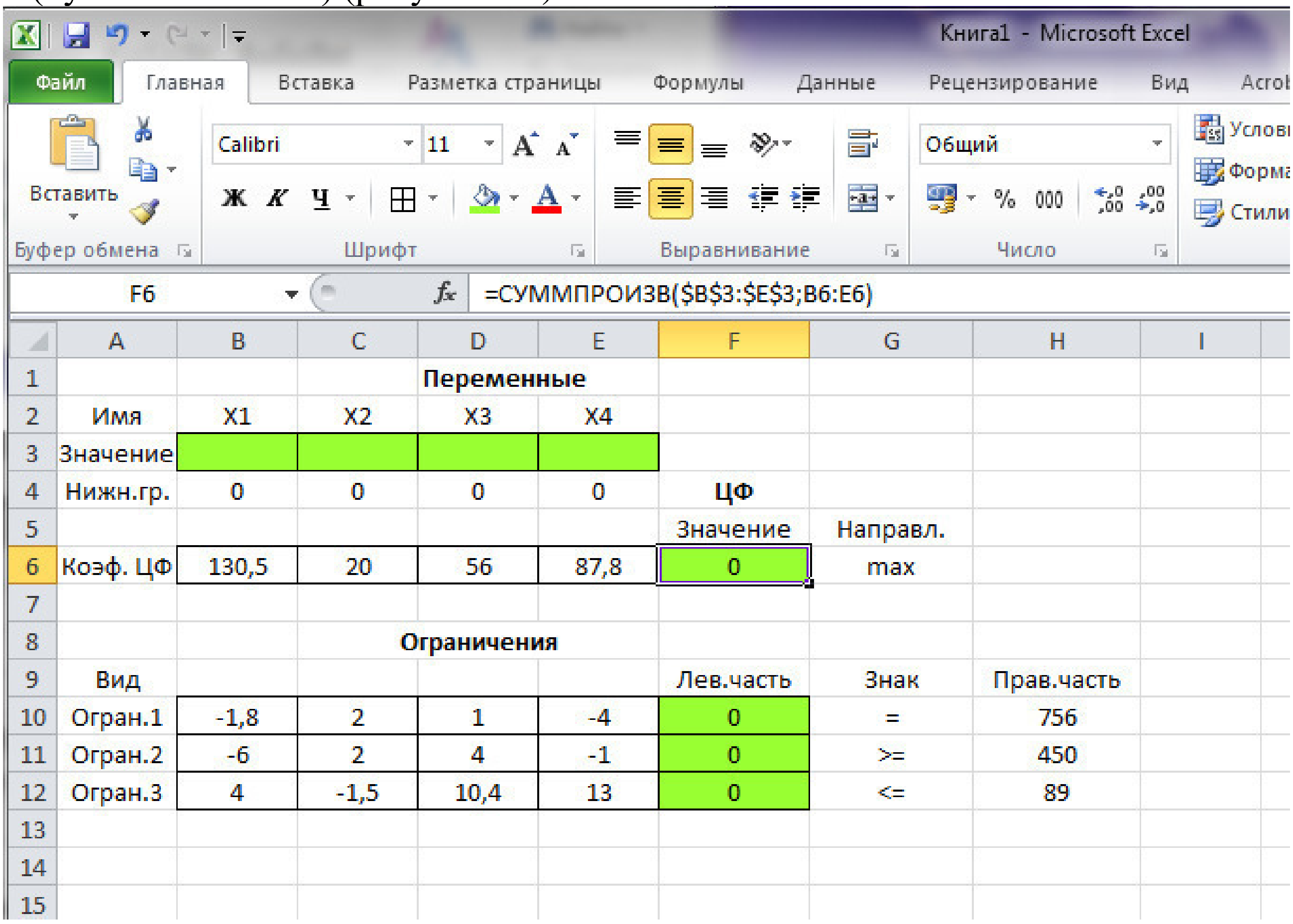


Рис. 6.2. Экранная форма задачи (1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима «Вставка функций», который можно вызвать из вкладки «Формулы» или при нажатии кнопки «f $_x$ » на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (4) можно задать следующим образом:

– курсор в поле **F6**;
– нажав кнопку « x f » ,вызовите окно «**Мастер функций – шаг 1 из 2**»;
– выберите в окне «**Категория**» категорию «**Математические**»;
– в окне «**Функция**» выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
– в появившемся окне «СУММПРОИЗВ» в строку «Массив 1» введите выражение **B$3:E$3**, а в строку «**Массив 2**» – выражение **B6:E6** (рис. 3);
– после ввода ячеек в строки «**Массив 1**» и «**Массив 2**» в окне «СУММПРОИЗВ» появятся числовые значения введенных массивов (см. рисунок 6.3), а в экранной форме в ячейке F6 появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

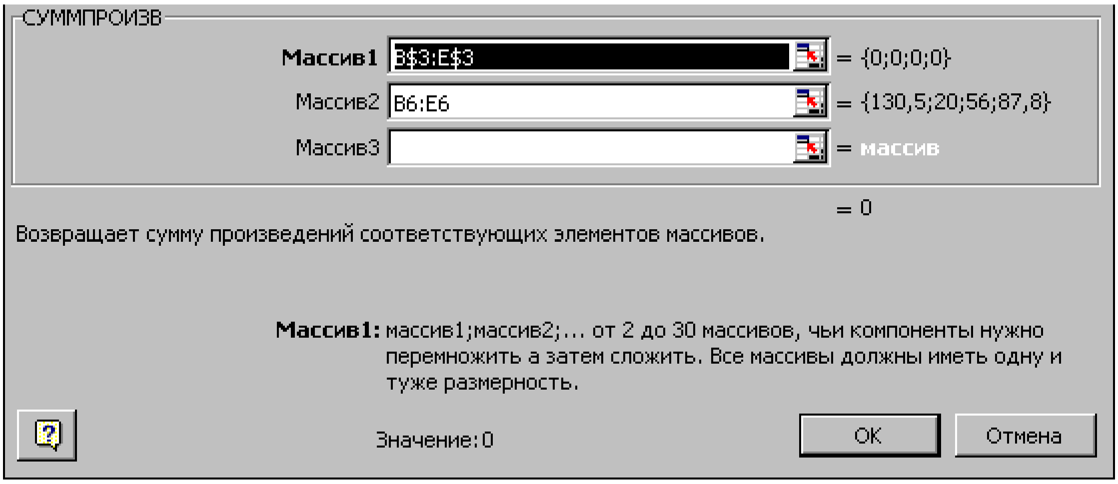


Рис. 6.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно «Мастер функций»

3.Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1) представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – 1-е ограничение; B11, C11, D11, E11 – 2-е ограничение и B12, C12, D12, E12 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 - Формулы, описывающие ограничения модели (1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1+2x_2+x_3-4x_4$ или $B10\cdot B3+C10\cdot C3+D10\cdot D3+E10\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B10:E10)**
$-6x_1+2x_2+4x_3-x_4$ или $\mathrm{B11}\cdot\mathrm{B3}+\mathrm{C11}\cdot\mathrm{C3}+\mathrm{D11}\cdot\mathrm{D3}+\mathrm{E11}\cdot\mathrm{E3}$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B11:E11)**
$4x_1-1{,}5x_2+10{,}4x_3+13x_4$ или $B12\cdot B3+C12\cdot C3+D12\cdot D3+E12\cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B12:E12)**

Как видно из таблицы 6.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1), отличаются друг от друга и от формулы (4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

– поместить курсор в поле целевой ячейки F6 и протянуть за маркер автозаполнения (черный крестик в правом нижнем углу ячейки);

– на экране в полях F10, F11 и F12 появится 0 (нулевое значение) (см. рисунок 2).

4.Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рисунки 6.4 и 6.5).

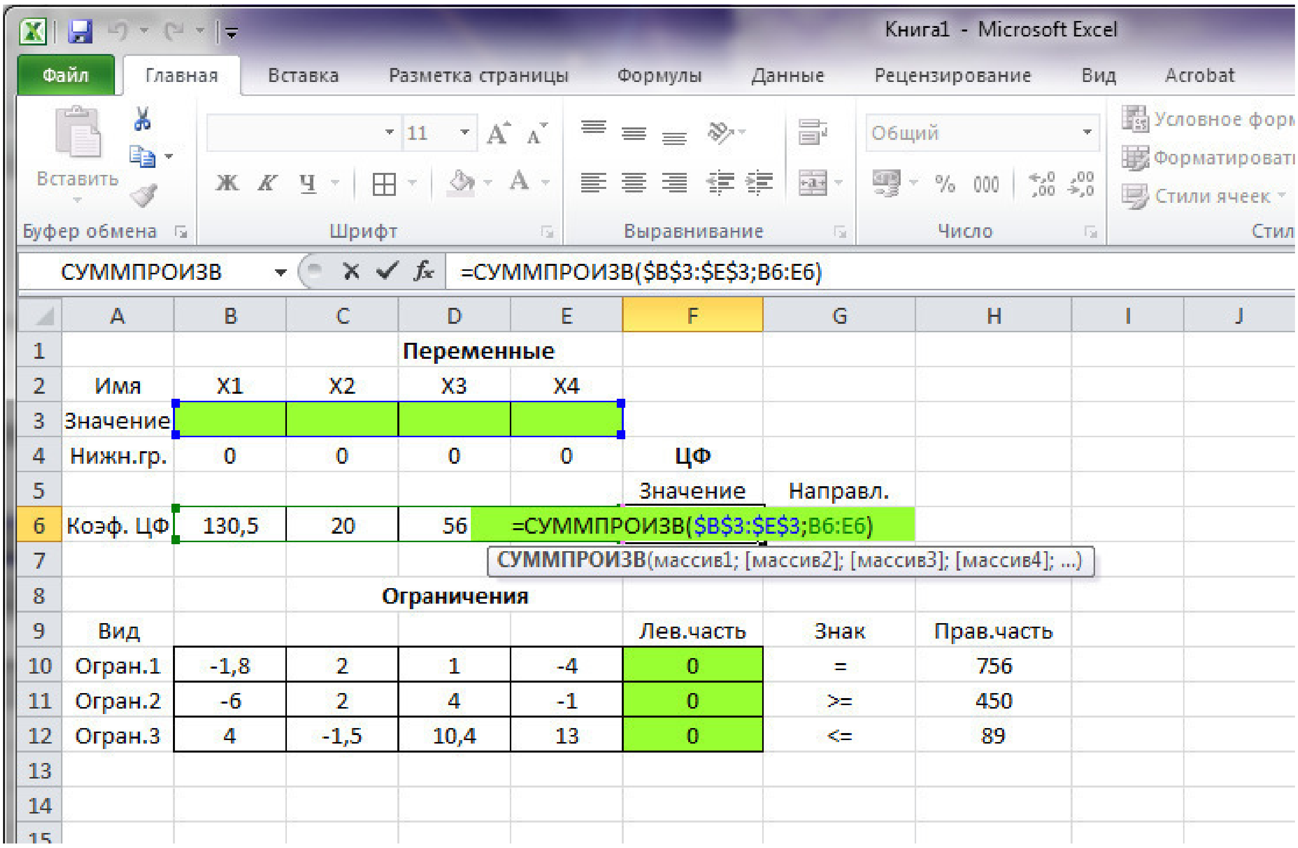


Рис. 6.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**

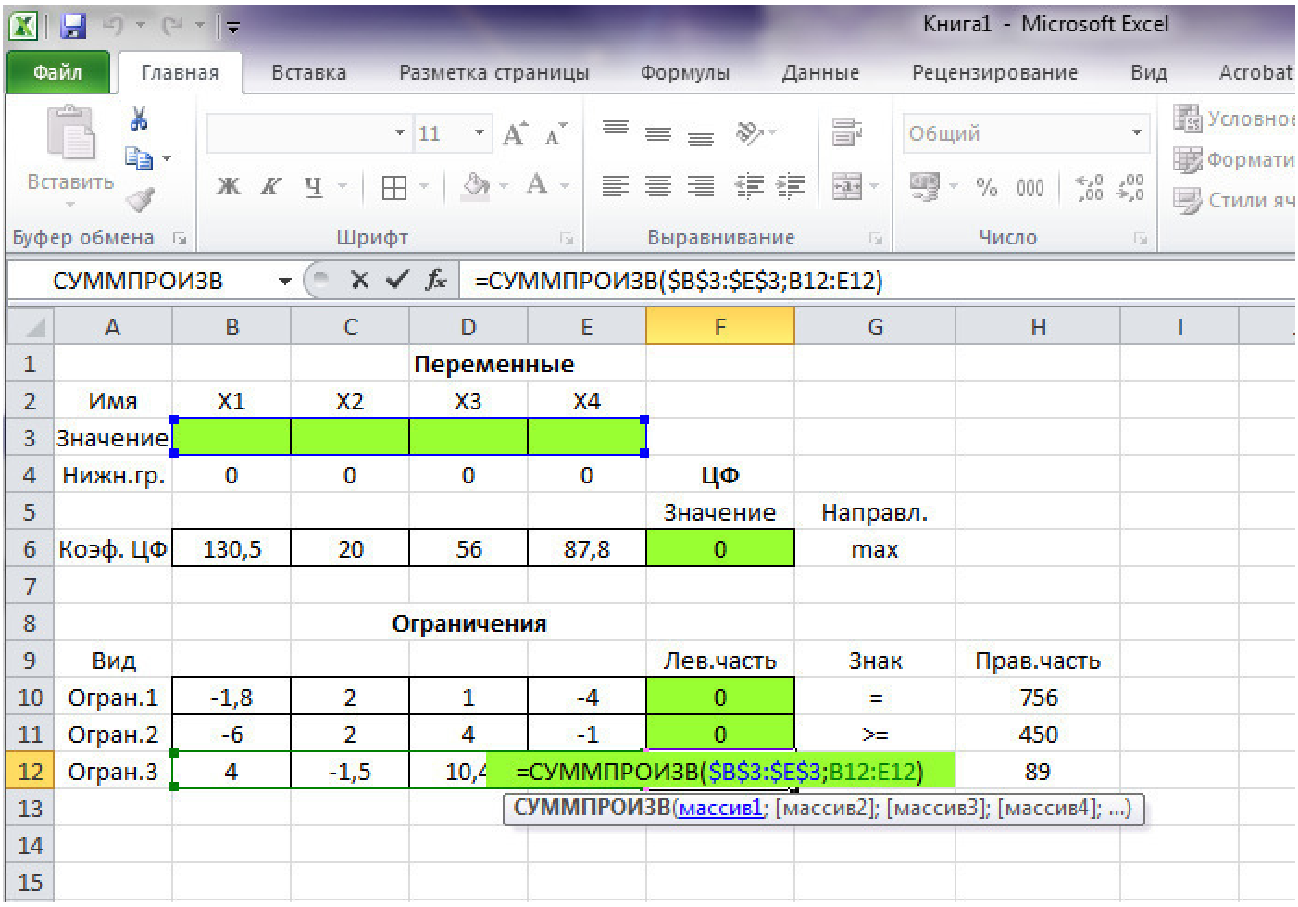


Рис. 6.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12** для левой

части ограничения 3

5.Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из вкладки «Данные» (рисунок 5.6):

!!!Проверьте, если у вас установлена надстройка «Поиск решения» (рис. 6), пропустите этот пункт.

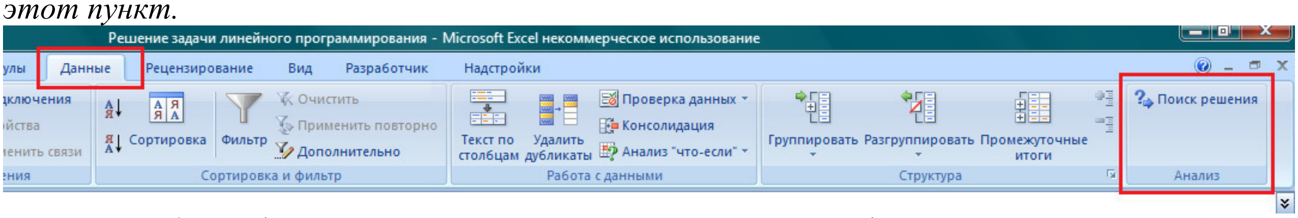


Рис. 6.6. Надстройка Поиск решения установлена; вкладка «Данные», группа «Анализ»

Если надстройки «Поиск решения» вы на ленте Excel не обнаружили, щелкните на кнопку Microsoft Office, а затем Параметры Excel (рис. 6.7).

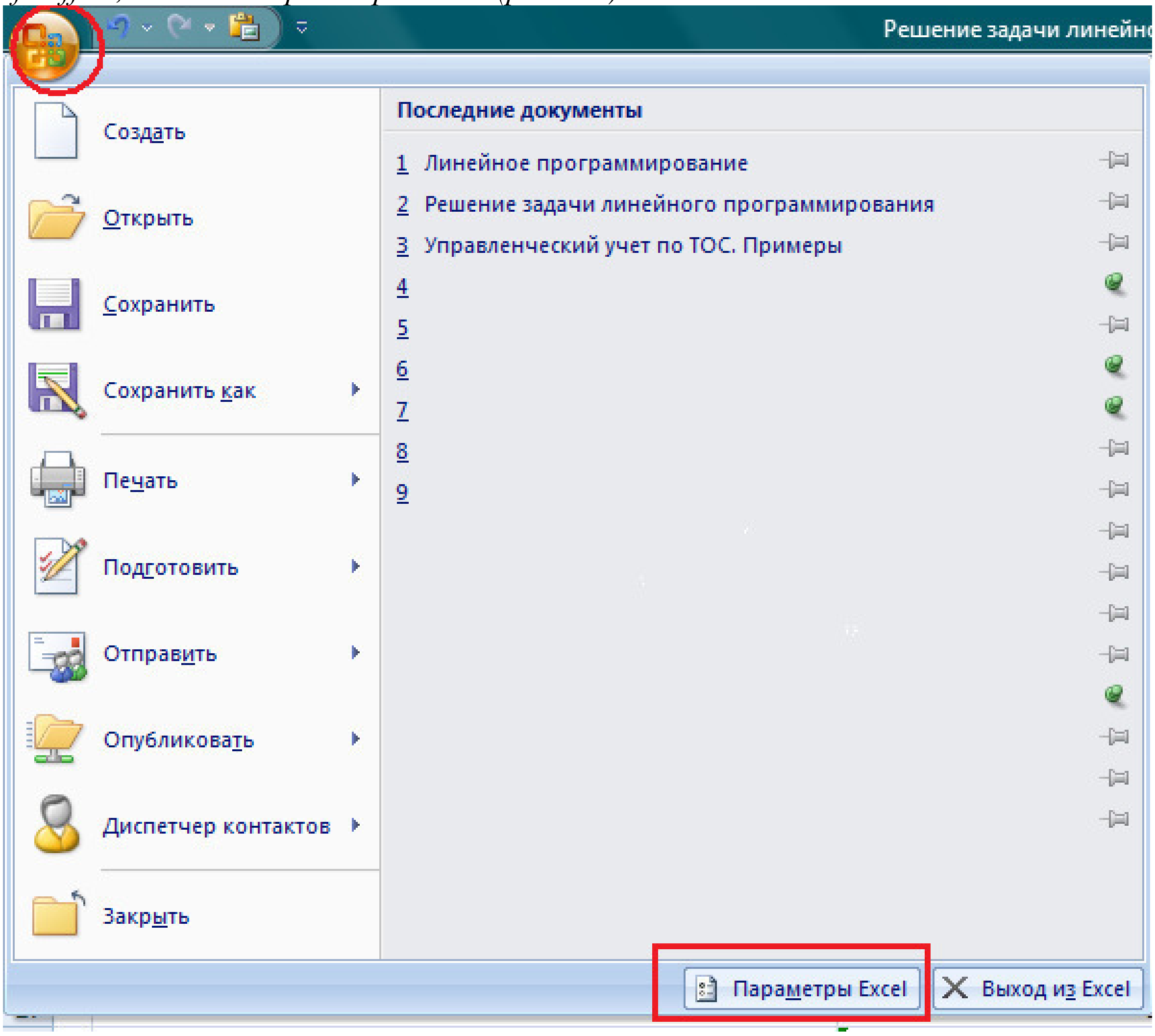


Рис. 6.7. Параметры Excel

Выберите строку Надстройки, а затем в самом низу окна «Управление надстройками Microsoft Excel» выберите «Перейти» (рис. 6.8).

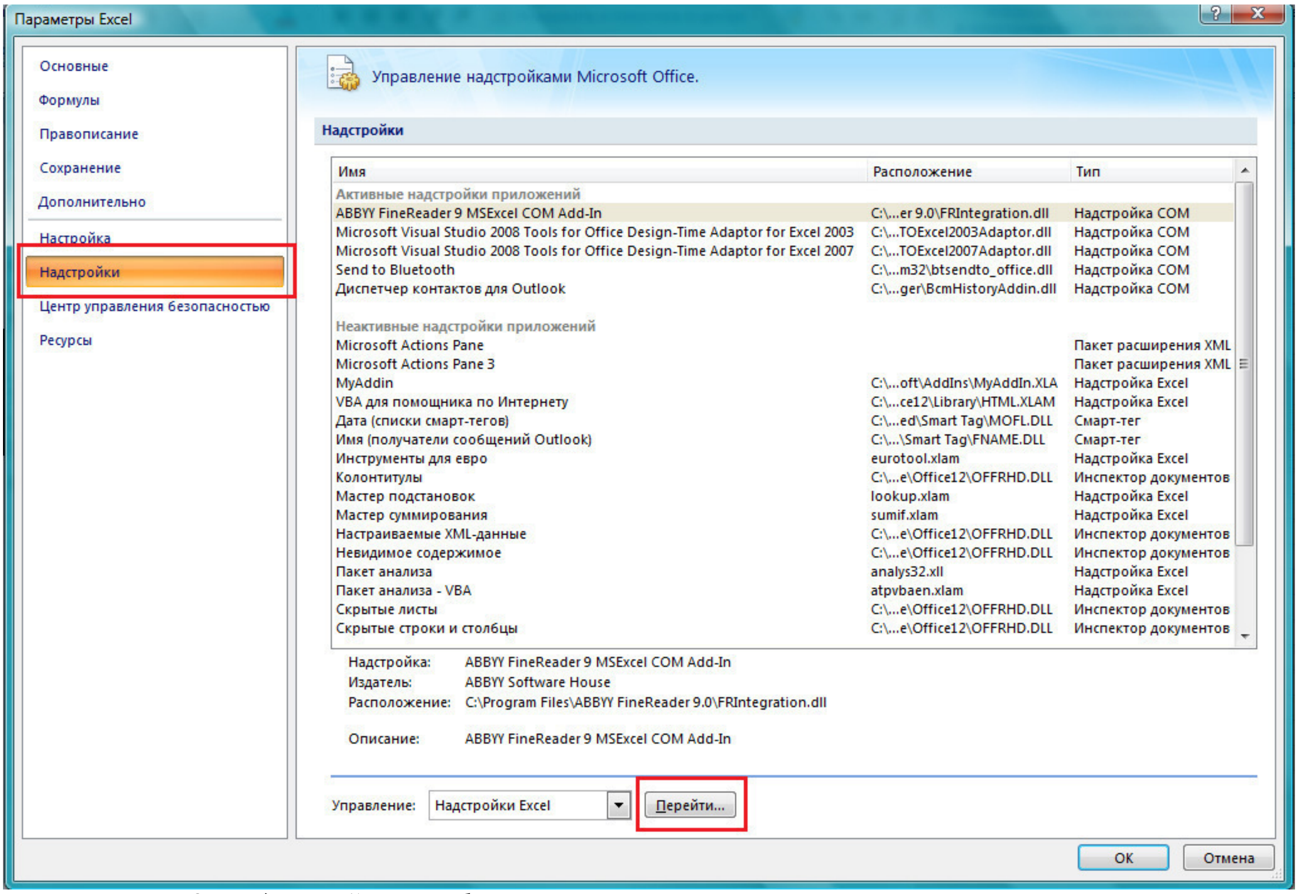


Рис. 5.8. Надстройки Excel

В окне «Надстройки» установите флажок «Поиск решения» и нажмите Ok (рис. 5.9). (Если «Поиск решения» отсутствует в списке поля «Надстройки», чтобы найти надстройку, нажмите кнопку Обзор. В случае появления сообщения о том, что надстройка для поиска решения не установлена на компьютере, нажмите кнопку Да, чтобы установить ее.)

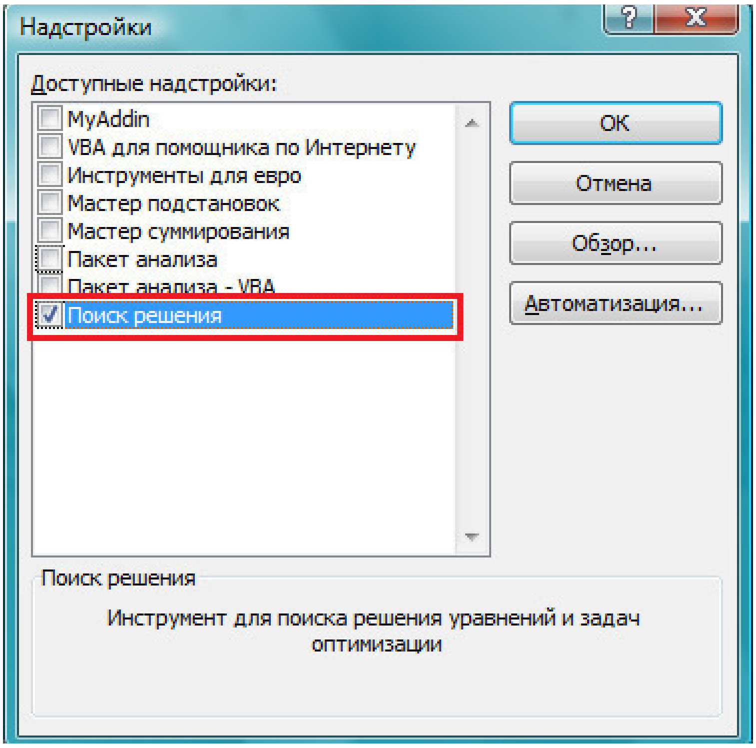


Рис. 5.9. Активация надстройки «Поиск решения»

После загрузки надстройки для поиска решения в группе Анализ на вкладке Данные становится доступна команда Поиск решения (рис. 5.6).

Вернемся к задаче:

– поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;

– введите адрес целевой ячейки **$F$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме – это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

– введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «максимальному значению».

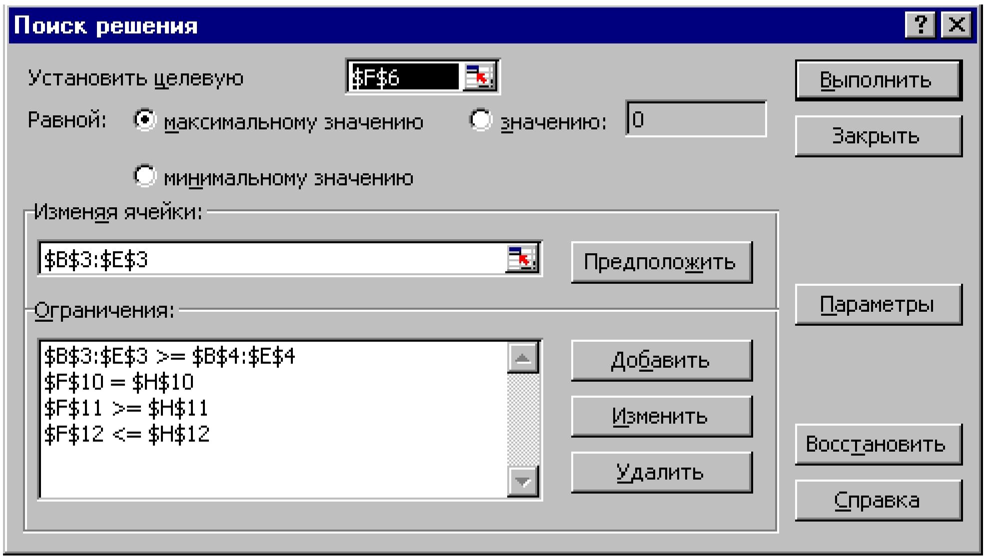


Рис. 6.10. Окно «Поиск решения» задачи (1)
Ввод ограничений и граничных условий

6.Задание ячеек переменных

В окно «Поиск решения» в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса **$B$3:$E$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

7.Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рисунок 6.1).

– Нажмите кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рисунок 6.11).

– В поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

– В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите.

– В поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$B$4:$E$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

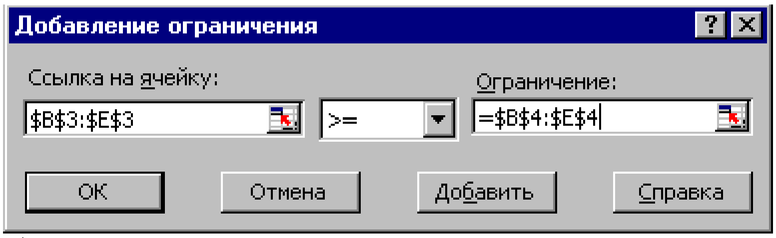


Рис. 6.11. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1)

8.Задание знаков ограничений $\leq$, $\geq$, =

В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр «Относительная погрешность» служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр «**Допустимое отклонение**» служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр «**Сходимость**» применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка «**Линейная модель**» обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки «**OK**».

9.Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна «**Поиск решения**» путем нажатия кнопки «**Выполнить**».

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно «**Результаты поиска решения**» с одним из сообщений, представленных на рисунках 6.13, 6.14 и 6.15.

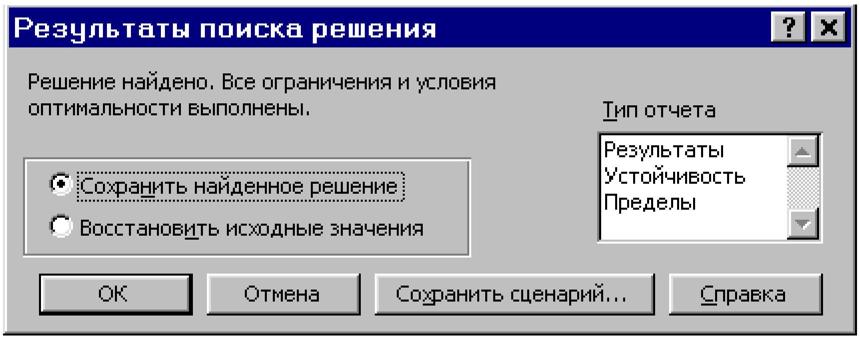


Рис. 6.13. Сообщение об успешном решении задачи

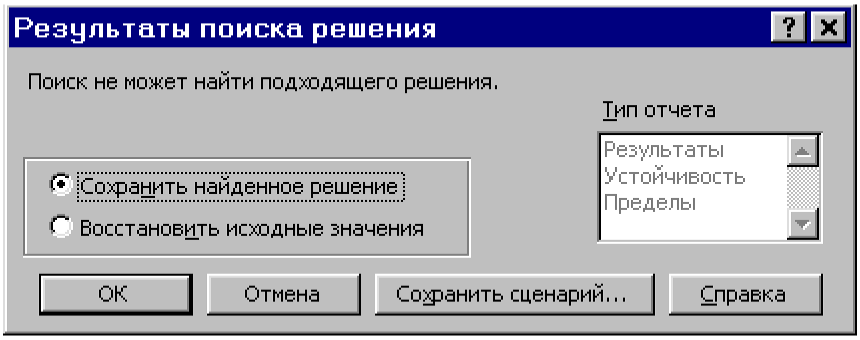


Рис. 6.14. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

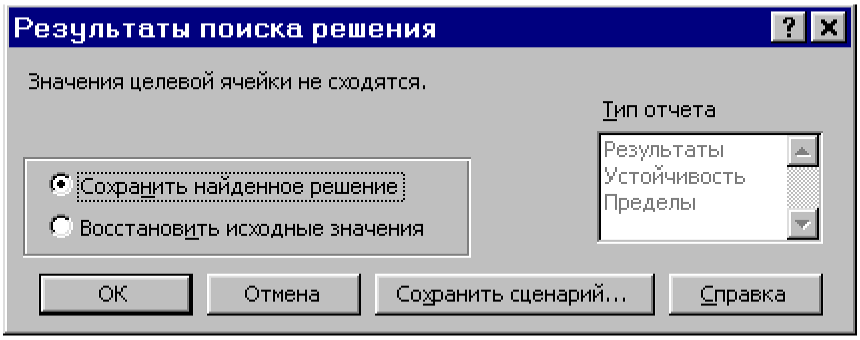


Рис. 6.15. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рисунках 6.14 и 6.15, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при заполнении полей окна «**Поиск решения**» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра «**Относительная погрешность**» не позволяет найти оптимальное решение.

Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне «**Результаты поиска решения**» представлены названия трех типов отчетов: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «**ОК**». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рисунок 6.16).

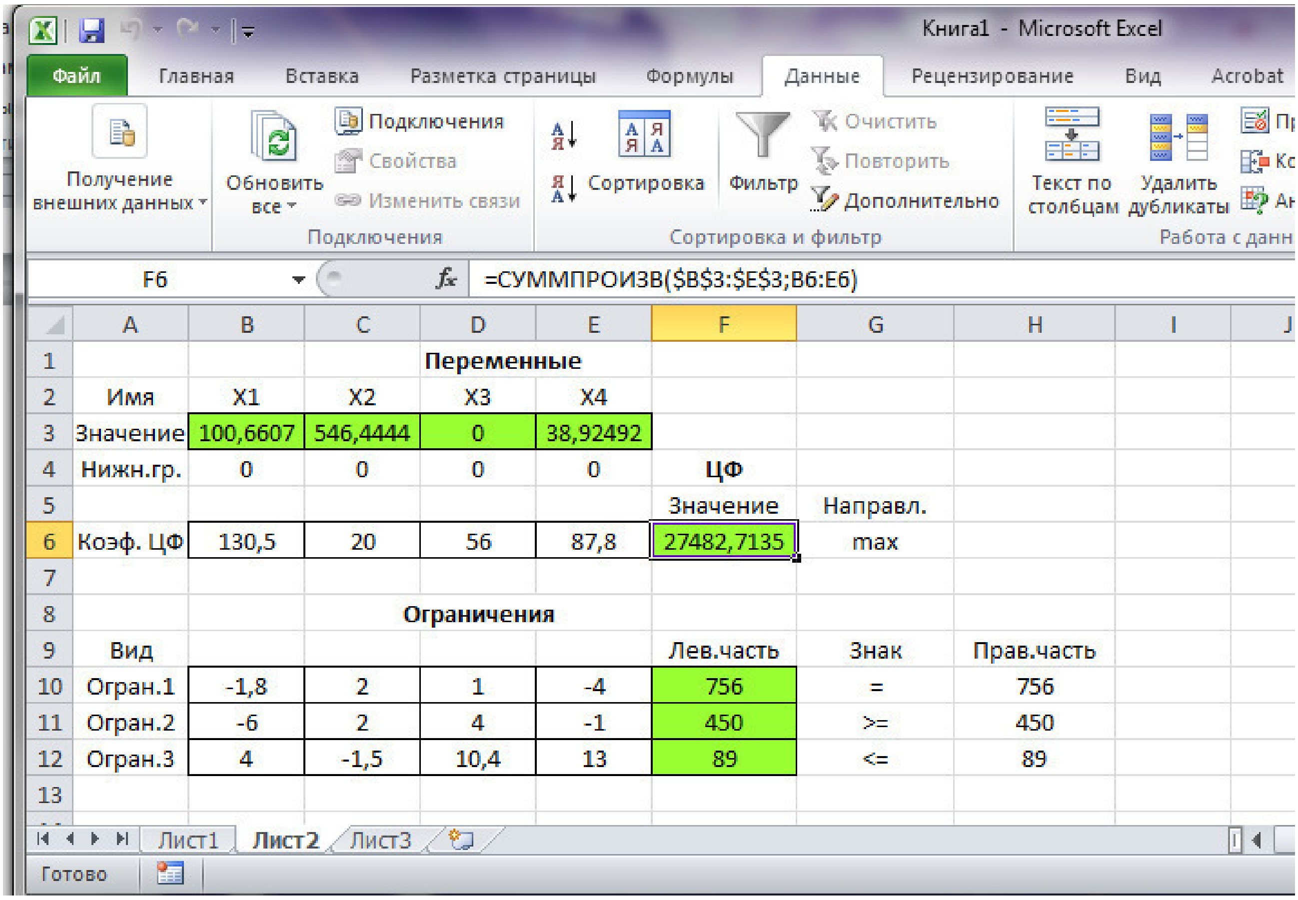


Рис. 6.16. Экранная форма задачи (1) после получения решения

Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо дополнить следующими шагами.

– В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рисунок 6.17).

– В окне «**Поиск решения**» (вкладка «**Данные**» → «**Поиск решения**»), нажмите кнопку «**Добавить**» и в появившемся окне «**Добавление ограничений**» введите ограничения следующим образом (рисунок 6.18):

– в поле «**Ссылка на ячейку**» введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **$B$3:$E$3**;

– в поле ввода знака ограничения установите «**целое**»;

– подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки «**OK**».

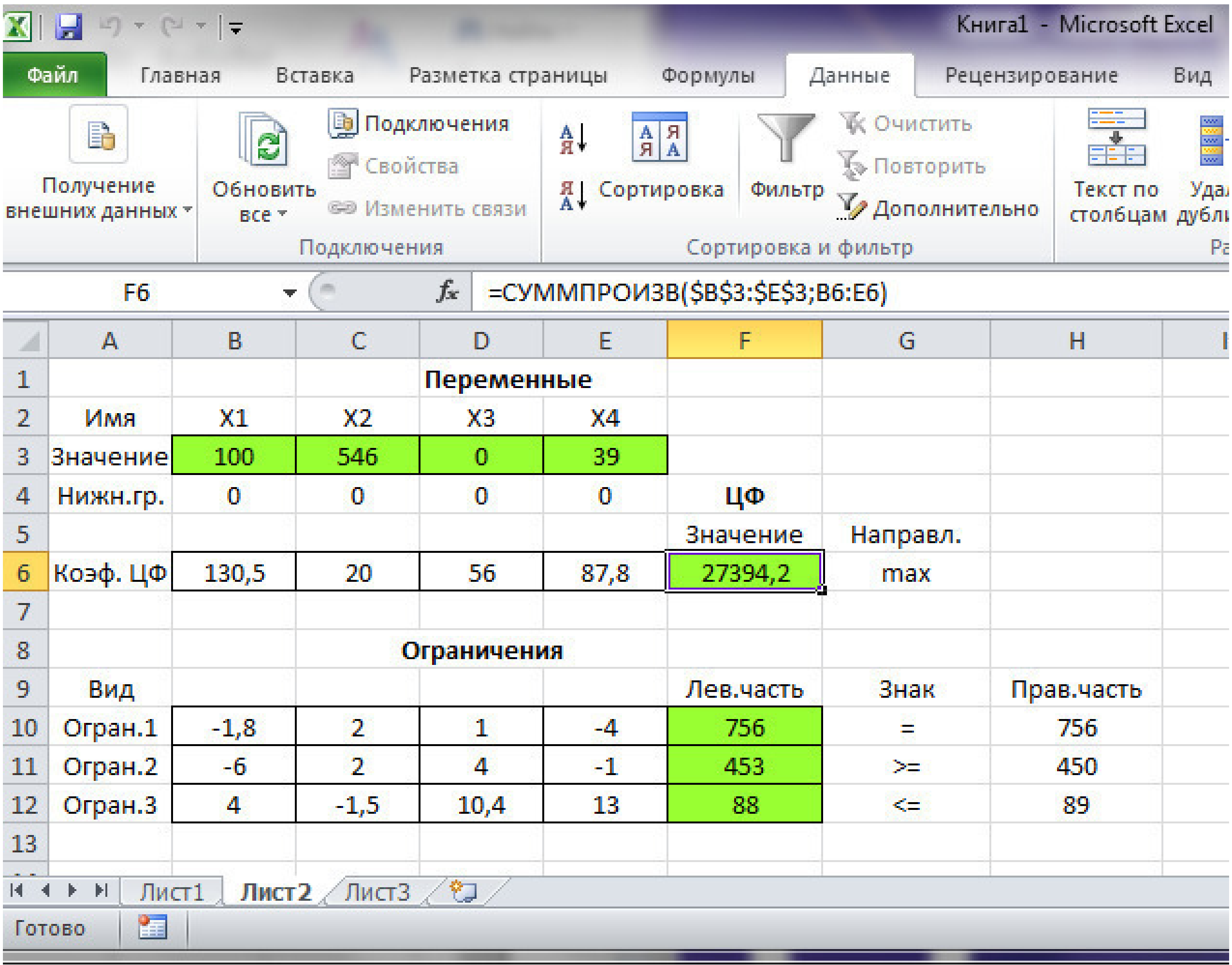


Рис. 6.17. Решение задачи (1) при условии целочисленности ее переменных

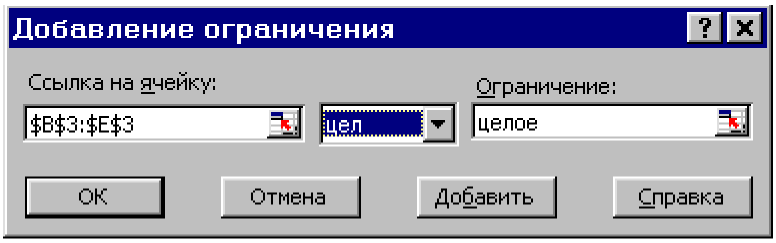


Рис. 6.18. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1)

На рисунке 6.17 представлено решение задачи (1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 6

Дано условие:

ООО «Радость» рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидение, Вконтакте, Instagram и Facebook. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на **a1, a2**, **a3**, и **a4** руб. в расчете 1 руб., затраченный на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствам, подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить **В** тыс.руб.;

б) следует расходовать не более **С1** % бюджета на телевидение и не более **С2** % бюджета на Facebook;

в) вследствие привлекательности для подростков Вконтакте на него следует расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется на телевидение.

Сформируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и решите ее.

Составлена экономико-математическую модель

Переменные: X1 - расходы на рекламу на телевидении, X2- Вконтакте, X3- Instagram, X4- Facebook.

Целевая функция: f(X) = 10 X1 + 3 X2 + 7 X3 + 4 X4 → max

Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать

f(x) = 10X1+3 X2+7X3+4 X4→max

Ограничения по бюджету:

X1+X2+X3+X4≤**B**;

X1≤ **C1**;

X4≤ **C2**;

-0,5·X1+X2≥ 0; (минимум расходов Вконтакте - 50% от того, что планируется на телевидение)

X1, X2, X3, X4 ≥ 0.

Решить задачу с помощью надстройки «Поиск решения» Microsoft Excel.

Номер варианта	**Коэффициенты (прирост прибыли, руб.)**			
	X1	**X2**	**X3**	**X4**
1	11	8		6
2	8	9	13	5
3	15	22	9	12
4	14	20	5	16
5	18	10	12	20
6	20	15	10	14
7	10	14	9	20
8	16	8	12	6
9	8	19	13	15
10	12	22	9	12
11	14	19	5	9
12	18	7	12	10

13	20	25	15	8
14	6	12	9	25
15	32	10	12	24

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель В. Леонтьева)

Цель лабораторной работы – приобретение навыков применения модели межотраслевого баланса.

Теоретические сведения

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, называемую еще моделью Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на n отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.д.).

Рассмотрим отрасль i, i = 1, 2,…, n. Она выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме x_i, который еще называют валовым выпуском. Часть объема продукции x_i , произведенная i-ой отраслью используется для собственного производства в объеме x_{ii} , часть – поступает в остальные отрасли j = 1, 2,…, n для потребления при производстве в объемах x_{ij}, и некоторая часть объемом y_i – для потребления в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления. Перечисленные сферы распределения валового продукта i-ой отрасли приводят к соотношению баланса

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Введем коэффициенты прямых затрат a_{ij} , которые показывают, сколько единиц продукции i-ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли j. Тогда можно записать, что количество продукции, произведенной в отрасли i в объеме xij и поступающей для производственных нужд в отрасль j, равно

$$x_{ij} = a_{ij} x_j$$

Считаем сложившуюся технологию производства во всех отраслях неизменной (за рассматриваемый период времени), означающую, что коэффициенты прямых затрат a_{ij} постоянны. Тогда получаем следующее соотношение баланса, называемого моделью Леонтьева

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} + y_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Введя вектор валового выпуска X, матрицу прямых затрат A и вектор конечного потребления Y

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

модель Леонтьева (1) можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y\ . \qquad (2)$$

Матрица A ≥ 0, у которой все элементы $a_{ij} \geq 0$ (неотрицательны), называется X ≥ 0, для которого выполняется неравенство

$$X > AX.$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше, чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт $Y = X – AX > 0$.

Модель Леонтьева с продуктивной матрицей А называется продуктивной моделью.

Для проверки продуктивности матрицы А достаточно существования обратной матрицы $B = (E – A)^{-1}$ с неотрицательными элементами, где матрица Е – единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью модели Леонтьева (2) можно выполнить три вида плановых расчетов, при условии соблюдения условия продуктивности матрицы А:

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей Х можно определить объемы конечной продукции всех отраслей Y

$Y = (E – A)X.$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей Y можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1}Y. \qquad (3)$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица

$B = (E – A)^{-1}$

называется матрицей полных материальных затрат. Ее смысл следует из матричного равенства (3), которое можно записать в виде $X = BY$. Элементы матрицы В показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в i-ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли j.

Рассмотрим пример.

Пример

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат А и вектор конечного продукта Y известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат В.

2) Проверить продуктивность матрицы А.

2) Вектор валового выпуска Х.

3) Межотраслевые поставки продукции x_{ij}.

Математическая модель и последовательность расчетов

Модель Леонтьева имеет вид

$X = AX + Y.$

Матрица полных материальных затрат В равна

$B = (E – A)^{-1}.$

Продуктивность матрицы А проверяется, по вычисленной матрице В. Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица А продуктивна.

Вектор валового выпуска X рассчитывается по формуле

X = BY.

Межотраслевые поставки продукции xij вычисляются по формуле

$x_{ij} = a_{ij}x_j$.

Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

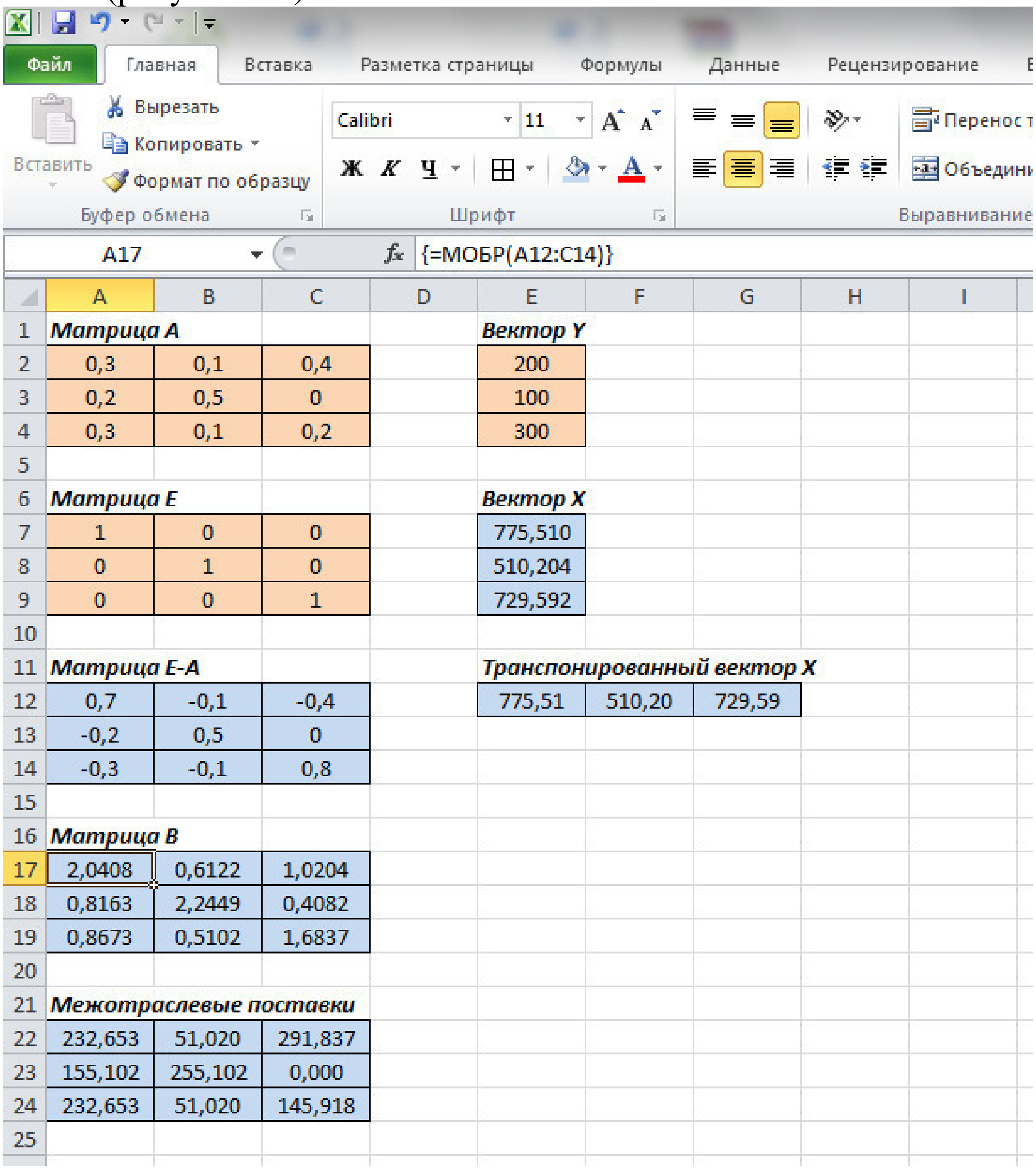
Для решения задачи межотраслевого баланса необходимо уметь выполнять с помощью Excel следующие операции над матрицами:

- Умножение матрицы на вектор;
- Умножение двух матриц;
- Транспонирование матрицы или вектора;
- Сложение двух матриц.

1. Задание Исходных данных задачи

Вызовите Microsoft Excel.

Введите матрицу A в ячейки с адресами **A2:C4** и вектор Y в ячейки с адресами **E2:E4** (рисунок 7.1).



	A	B	C	D	E	F	G
1	*Матрица А*				*Вектор Y*		
2	0,3	0,1	0,4		200		
3	0,2	0,5	0		100		
4	0,3	0,1	0,2		300		
5							
6	*Матрица Е*				*Вектор X*		
7	1	0	0		775,510		
8	0	1	0		510,204		
9	0	0	1		729,592		
10							
11	*Матрица Е-А*				*Транспонированный вектор X*		
12	0,7	-0,1	-0,4		775,51	510,20	729,59
13	-0,2	0,5	0				
14	-0,3	-0,1	0,8				
15							
16	*Матрица В*						
17	2,0408	0,6122	1,0204				
18	0,8163	2,2449	0,4082				
19	0,8673	0,5102	1,6837				
20							
21	*Межотраслевые поставки*						
22	232,653	51,020	291,837				
23	155,102	255,102	0,000				
24	232,653	51,020	145,918				
25							

Рис. 7.1. Задание исходных данных и последовательное выполнение плановых

расчетов

2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат В.

2.1. Введите единичную матрицу Е в ячейки с номерами **A7:C9**.

2.2. Вычислите матрицу Е – А. Матрица Е – А является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее:

- установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом **A12**) результирующей матрицы Е – А, которая будет расположена в ячейках с адресами **A12:C14**;

- введите формулу =**A7-A2** для вычисления первого элемента результирующей матрицы Е – А, предварительно установив английскую раскладку клавиатуры;

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы. Для этого, установите курсор мыши в ячейку **A12**; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки **C12**, а затем так же протяните указатель мыши до ячейки **C14**.

В результате в ячейках **A12:C14** появится искомая матрица, равная разности двух исходных матриц Е и А.

2.3. Вычислите матрицу $B = (E - A)^{-1}$, являющейся обратной по отношению к матрице Е – А. Матрица Е – А расположена в ячейках с адресами **A12:C14**. Для вычисления матрицы В необходимо проделать следующее:

- выделите диапазон ячеек **A17:C19** для размещения матрицы В;

- нажмите на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите Математические, а в поле Выберите функцию – **имя функции МОБР**. Щелкните на кнопке ОК;

- появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы Е – А и введите диапазон матрицы Е – А (диапазон ячеек **A12:C14**) в рабочее поле Массив (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **A12** до ячейки **C14**);

- нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В диапазоне ячеек **A17:C19** появится искомая обратная матрица $(E - A)^{-1}$, равная матрице В.

3. Проверка продуктивности матрицы А.

Поскольку матрица В найдена, следовательно она существует. Все элементы матрицы В неотрицательны, поэтому матрица В – продуктивна.

4. Вычисление вектора валового выпуска X.

Вычисление вектора валового выпуска X находим по матричной формуле X = BY, в которой матрица В вычислена, а вектор Y задан.

Вычисление вектора X = BY производится с помощью операции умножения матриц, а в данном случае – умножения матрицы В на вектор Y. Для этого необходимо:

- выделить диапазон ячеек **E7:E9**, где будет расположен вектор X. Обратите внимание, что по правилам умножения матриц, размерность результирующей матрицы X должна быть равна количеству строк матрицы В на количество столбцов матрицы Y. В нашем случае, размерность вектора X равна: три строки на один столбец;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите Математические, а в поле Выберите функцию – **имя функции МУМНОЖ**. Щелкните на кнопке ОК;-

- появившееся диалоговое окно **МУМНОЖ** мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц B и Y и введите диапазон матрицы B (диапазон ячеек **A17:C19**) в рабочее поле Массив 1 (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **A17** до ячейки **C19**), а диапазон вектора Y (ячейки **E2:E4**) в рабочее поле **Массив 2** (рисунок 7.2);

- нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В диапазоне ячеек **E7:E9** появится искомый вектор X.

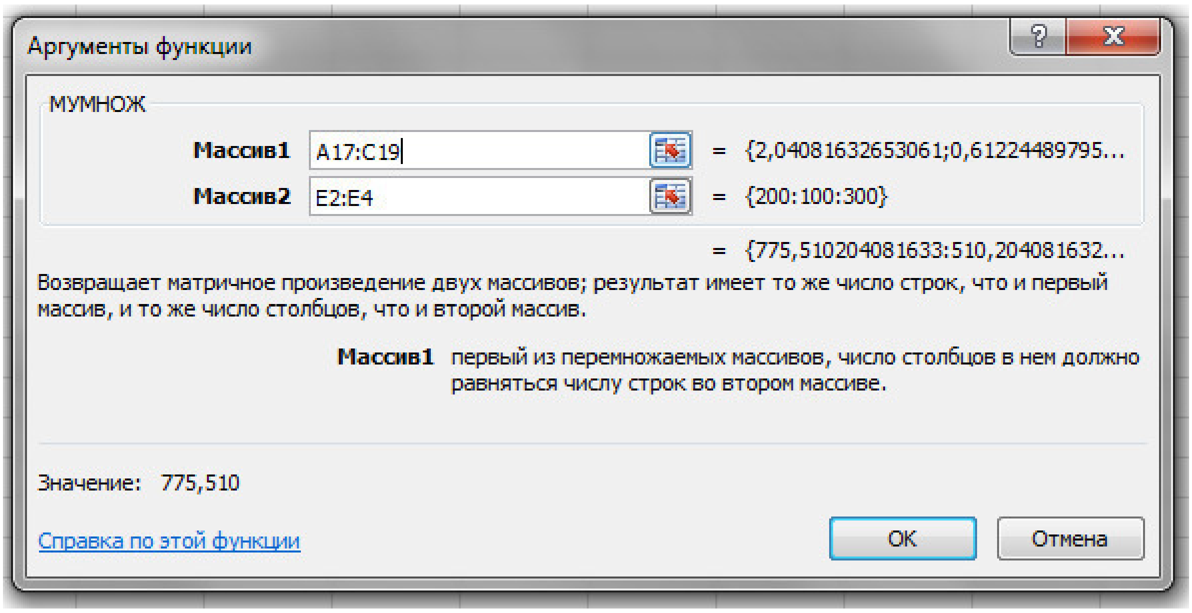


Рис. 7.2. Диалоговое окно умножения матриц МУМНОЖ

5. Вычисление межотраслевых поставок продукции x_{ij}

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле

$x_{ij} = a_{ij}x_j$,

где a_{ij} – элементы исходной матрицы A, расположенной в ячейках **A2:C4**,

x_j – элементы вектора X, найденного выше в п. 4 и расположенные в ячейках **E7:E9**.

Для проведения вычислений x_{ij} необходимо проделать следующее.

5.1. Вычислить транспонированный вектор X^T относительно вектора X.

При этом вектор-столбец X станет вектором-строкой X^T . Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

С этой целью:

- выделить указателем мыши при нажатой левой кнопке ячейки **E12:G12**, которых будет располагаться транспонированный вектор X^T ;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите **Ссылки** и **массивы**, а в поле Выберите функцию – имя функции **ТРАНСП**. Щелкните на кнопке ОК;

- появившееся диалоговое окно **ТРАНСП** мышью отодвиньте в сторону от исходного вектора X и введите диапазон вектора X (диапазон ячеек **E7:E9**) в рабочее поле Массив (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **E7** до ячейки **E9**);

- нажмите сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В результате в поле ячеек **E12:G12** расположится транспонированный вектор X^T .

5.2. Вычислить межотраслевые поставки продукции x_{ij}. Для этого проделать следующие операции:

- поставить курсор мыши в ячейку **A22**, в которой будет расположено значение x_{11} . В этой ячейке набрать формулу =**A2*E$12**, которая означает, что $x_{11} = a_{11} x_1$.

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки (в ячейки **A22:C24**, протащив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки **A22** при нажатой левой кнопке мыши, до ячейки **C24**). При этом будут вычислены $x_{12} = a_{12}x_2$, …, $x_{22} = a_{22}x_2$ x и т.д.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположатся в матрице с ячейками **A22:C24**.

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 7

Дано условие:

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны.

Определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B.
2) Проверить продуктивность матрицы A.
3) Вектор валового выпуска X.
4) Межотраслевые поставки продукции x_{ij}.

Номер варианта	Матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y
1	$A=\begin{pmatrix} 0,31 & 0,33 & 0,2 \\ 0,22 & 0,32 & 0,14 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 210 \\ 140 \\ 250 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} 0,40 & 0,33 & 0,2 \\ 0,13 & 0,32 & 0,14 \\ 0,2 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 200 \\ 140 \\ 250 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,23 & 0,3 \\ 0,22 & 0,32 & 0,14 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,23 & 0,3 \\ 0,15 & 0,32 & 0,14 \\ 0,20 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,20 & 0,3 \\ 0,22 & 0,32 & 0,15 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,14 \\ 0,33 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$

7	$A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,20 & 0,3\\ 0,22 & 0,35 & 0,14\\ 0,10 & 0,0 & 0,45\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 100\\ 250\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 100\\ 450\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,0 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 100\\ 450\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,0 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}320\\ 100\\ 450\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,4 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 150\\ 450\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}0,0 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 100\\ 450\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 150\\ 450\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,3\\ 0,25 & 0,22 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 100\\ 450\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}0,12 & 0,23 & 0,0\\ 0,25 & 0,32 & 0,15\\ 0,35 & 0,14 & 0,4\end{pmatrix}$, $У=\begin{pmatrix}300\\ 112\\ 450\end{pmatrix}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Решение двухиндексных задач линейного программирования. Транспортная задача

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения транспортных задач.

Теоретические сведения

К ЗЛП транспортного типа (транспортной задаче – ТЗ) приходят при рассмотрении различных практических ситуаций, связанных с составлением наиболее экономичного плана перевозок продукции, управления запасами, назначением персонала на рабочие места, оборотом наличного капитала и многими другими.

Цель ТЗ – поиск низкозатратных схем транспортировки товарных запасов или поставок от многих поставщиков (пункты отправления) ко многим потребителям (пункты назначения). Поставщиками могут быть фабрики, склады, отделы или другие места, из которых отправляются товары. Потребителями также могут быть фабрики, склады, отделы или любые другие места, которые получают товары.

Информация, необходимая для использования модели ТЗ, включает следующее:

1. Список пунктов отправления (ПО) и пропускная способность каждого из них или количество поставок за определенный период.

2. Список пунктов назначения (ПН) и их показатели спроса за определенный период.

3. Стоимость транспортировки единицы товара из каждого ПО в ПН. Эта информация представляется в виде так называемой транспортной таблицы.

Стоимость транспортировки одной ед. товара из ПО A_1 в ПН B_1

ПО \ ПН	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2	3	4	2	4	*140*
A_2	8	4	1	4	1	*180*
A_3	9	7	3	7	2	*160*
Потребности	*60*	*70*	*120*	*130*	*100*	**480**

Запас товара в ПО A_2

Потребность в товаре в ПН B_1

Рис.8. 1. Пример транспортной таблицы

Экономико-математическая модель транспортной задачи

Постановка задачи. Некоторый однородный товар (продукт, груз), находящейся у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц ($i = 1,2,...,m$) необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j единиц ($j = 1,2,...,n$). Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить план перевозки, имеющий минимальную стоимость. Основное преположение, используемое при построении модели, состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна количеству единиц перевозимого товара

Обозначим через x_{ij} количество единиц товара, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда математическая модель ТЗ формулируется следующим образом:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, (i = 1,2,\dots,m) \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, (j = 1,2,\dots,n) \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, (i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots n). \tag{4}$$

Ограничения (2) означают, что суммарный объем перевозок от i-го поставщика не может превышать имеющегося у него запаса товара. Ограничения (3) означают, что суммарные перевозки товара j-му потребителю должны полностью удовлетворить его потребности в товаре. Ограничения (4) исключают обратные перевозки.

Из ограничений (2) и (3) следует, что $\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Если имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, (5)

то модель называется сбалансированной транспортной моделью. В сбалансированной модели ограничения (2), (3) имеют вид равенств. В реальных условиях товара не всегда равен спросу (потребности), но транспортную модель всегда можно сбалансировать.

В случае превышения запаса над спросом, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится

фиктивный (n+1) – й потребитель со спросом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а

соответствующие стоимости $c_{i,n+1}$ (i=1,2,…,m) считаются равным нулю.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный (m+1) –й поставщик с

запасом товара $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а соответствующие стоимости $c_{m+1,j}$ (j=1,2,…,n)

считаются равными нулю.

Таким образом, исходная задача сводится к сбалансированной ТЗ, из оптимального плана которой получается оптимальный план несбалансированной ТЗ.

Примечание 1. Несбалансированную ТЗ называют открытой ТЗ, тогда как сбалансированную ТЗ – закрытой ТЗ.

Примечание 2. Стремление сбалансировать ТЗ обусловлено возможностью применить в этом случае эффективный вычислительный метод.

Рассмотрим пример решения ТЗ.

Задача. На трех базах (ПО) A_1, A_2, A_3 находится горючее (однородный груз) в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 тонн. Это горючее требуется перевезти в пять ПН B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 тонн, стоимости перевозки одной тонны горючего из каждого ПО в соответствующие ПН указаны в таблице.

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 X_{11}	3 X_{12}	4 X_{13}	2 X_{14}	4 X_{15}	140
A_2	8 X_{21}	4 X_{22}	1 X_{23}	4 X_{24}	1 X_{25}	180
A_3	9 X_{31}	7 X_{32}	3 X_{33}	7 X_{34}	2 X_{35}	160
Потребности	60	70	120	130	100	**480**

Решение.

Построим математическую модель данной ТЗ. Обозначим через x_{ij} количество тонн горючего, запланированных к перевозке от ПО A_i ($i=1,2,\ldots,m$) в ПН B_j ($j=1,2,\ldots n$).

Тогда целевая функция для ТЗ запишется как

$Z(X) = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 4x_{15} + 8x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + x_{25} + 9x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + 7x_{34} + 2x_{35} \rightarrow \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} X11 + X12 + X13 + X14 + X15 = 140, \\ X21 + X22 + X23 + X24 + X25 = 180, \\ X31 + X32 + X33 + X34 + X35 = 160, \\ X11 + X21 + X31 = 60 \\ X12 + X22 + X32 = 70, \\ X13 + X23 + X33 = 120, \\ X14 + X24 + X34 = 130, \\ X15 + X25 + X35 = 100, \\ Xij \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

Число неизвестных переменных x_{ij} в ТЗ с m поставщиками и n потребителями равно $m \times n$, а число уравнений в системе (2)-(3) равно $m + n$.

Так как ТЗ является сбалансированной, т.е. выполняется условие (5), число линейно независимых уравнений равно $m + n - 1$. Следовательно, опорный план ТЗ может иметь не более $m + n - 1$ отличных от нуля неизвестных.

Рассмотрим несколько схем построения первоначального опорного плана: метод «северо-западного угла» (СЗУ), метод наименьшей стоимости.

Следует помнить, что перед нахождением опорного плана транспортная задача должна быть сбалансирована.

Построение опорного плана ТЗ методом северо-западного угла

В данной ТЗ m = 3, n = 5 , следовательно, опорный план должен иметь не более m+ n–1= 3+5–1= 7 отличных от нуля переменных. Следуя методу СЗУ, начинают с того, что приписывают переменной x_{11}, расположенной в верхней левой клетке (СЗУ) таблицы, максимально возможное значение.

После этого вычеркивают соответствующий столбец (строку), фиксируя этим, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными 0. Если ограничения, представляемые столбцом и строкой, выполняются одновременно, то вычеркивают либо столбец, либо строку.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будут удовлетворены все потребители за счет запасов поставщиков. Применительно к данной ТЗ эта процедура приводит к виду, представленному в таблице.

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 **60**	3 **70**	4 **10**	2 -	4 -	**(140)** **(80)** **(10)**
A_2	8 -	4 -	1 **110**	4 **70**	1 -	**(180)** **(70)**
A_3	9 -	7 -	3 -	7 **60**	2 **100**	**(160)** **(100)**
Потребности	**(60)**	**(70)**	**(120)** **(110)**	**(130)** **(60)**	**(100)**	**480**

В результате получаем опорный план X_0 = (7 занятых клеток таблицы):

$$X_0=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} (т).$$

Общая стоимость перевозки груза составляет.

$Z(X_0) = 2*60+3*70+4*10+1*110+4*70+7*60+2*100=1380$ (ден. ед.).

Примечание. Если одновременно и столбец, и строка удовлетворяют ограничениям, очередная переменная, включаемая в базисное решение, обязательно имеет нулевое значение.

Построение начального опорного плана ТЗ методом наименьшей стоимости

Согласно данному методу, выбирается переменная x_{ij}, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки во всей таблице, и ей придается возможно большее количество перевезенного груза. Вычеркивается соответствующий столбец или строка. Если ограничения по столбцу (потребности, спрос) и строке (запасы, предложение) выполняются одновременно, то вычеркивается либо столбец, либо строка. После вычисления новых значений потребностей и запасов для всех не вычеркнутых строк и столбцов процесс повторяется при возможно большем значении той переменной x_{ij}, которой соответствует наименьшая стоимость перевозки среди не вычеркнутых. Процедура завершается, когда остается одна строка или один столбец.

ПН / ПО	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы
A_1	2 **60**	3 **-**	4 **-**	2 **80**	4 -	**(140)** **(80)**
A_2	8 -	4 -	1 **120**	4 **-**	1 60	**(180)** **(60)**
A_3	9 -	7 **70**	3 -	7 **50**	2 **40**	**(160)** **(120)** **(50)**
Потребности	**(60)**	**(70)**	**(120)**	**(130)** **(50)**	**(100)** **(40)**	**480**

В результате получаем опорный план X_0 = (7 занятых клеток таблицы):

$$X_0=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} (т).$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$Z(X_0) = 2*60+2*80+1*120+1*60+7*70+7*50+2*40=1380$ (ден. ед.)

Определение оптимального плана ТЗ методом потенциалов

Подобно тому, как ТЗ – частный случай ЗЛП, так и метод потенциалов является разновидностью симплекс-метода. Он представляет собой итеративный процесс, на каждом шаге которого рассматривается некоторый текущий базисный план, проверяется его оптимальность и, если необходимо, определяется переход к следующему – лучшему базисному плану.

Теорема. Если для некоторого опорного плана ТЗ $\overline{X}= (x_{ij})_{min}$ существуют такие числа $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$, что $u_i+v_i=c_{ij}$ –для базисных переменных (занятых клеток), $u_i+v_j \le c_{ij}$ – для остальных переменных (свободных клеток), то $\overline{X}= (x_{ij})_{min}$ – оптимальный план ТЗ.

Числа u_i и v_j называются **потенциалами поставщиков и потребителей** соответственно.

Данная теорема позволяет получить решение ТЗ. После нахождения опорного плана необходимо вычислить значения потенциалов u_i и v_j. Так как для базисных переменных имеет место система m+n-1 уравнений с m+n неизвестными

$$\Delta_{ij}= c_{ij} – (u_i+v_j) =0,$$

то одну из неизвестных переменных можно приравнять к нулю и затем последовательно найти значения остальных неизвестных.

Далее вычисляют *симплексные разности (оценки)* для всех остальных переменных по формуле

$$\Delta_{ij}= c_{ij} - (u_i+v_j).$$

Если среди них нет отрицательных значений, то найденный опорный план является оптимальным.

В противном случае выбирают $\Delta_{lk}=\min \{\Delta ij\}$ и переменную x_{lk} включают в базис. Для определения переменной, исключаемой из базиса, строят замкнутый цикл и перераспределяют поставки. Определение. Циклом называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы (рис. 2).

Определение. ***Циклом*** называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы (рис. 2).

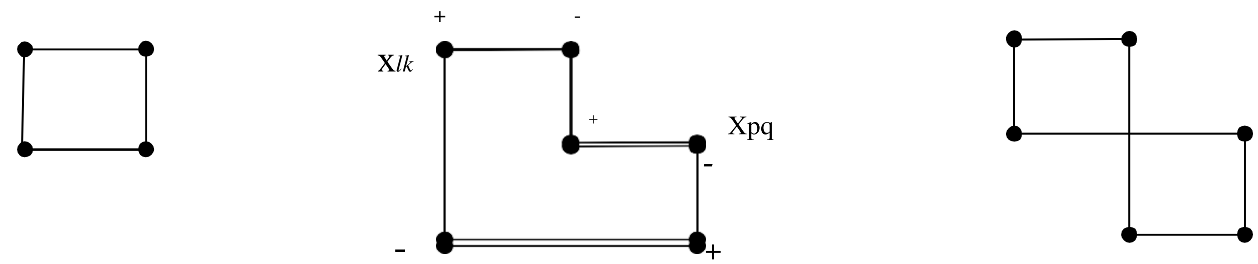


Рис. 8. 2. Примеры циклов

Цикл начинается и заканчивается клеткой, соответствующей включаемой в базис переменной x_{lk}. Перемещение поставок в цикле производится по следующему правилу:

1. Заполняемой клетке, соответствующей переменной x_{lk}, приписываются знак «+», а всем остальным клеткам – поочередно знаки «–» и «+».

2. В заполняемую клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках со знаком «–». Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в клетках со знаком «+», и вычитают из чисел, стоящих в клетках со знаком «–».

3. Клетка со знаком «–», в которой стояло минимальное число, считается свободной, а соответствующая ей переменная x_{pq} исключается из базиса.

Примечание. Если минимальное число x_{pq} достигается более чем в одной клетке, то освобождают лишь одну из них, а остальные оставляют занятыми нулевыми поставками.

Поиск оптимального плана ТЗ

Итерация 1.

Пусть получен первоначальный опорный план, полученный методом северо-западного угла. В соответствии с количеством поставщиков и потребителей рассмотрим три переменные u_1, u_2, u_3 – потенциалы поставщиков и пять переменных v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 – потенциалы потребителей.

Для каждой занятой клетки в таблице 3 запишем уравнения вида

$$u_i + v_j = c_{ij}:$$

$$u_1 + v_1 = 2;\ u_1 + v_2 = 3;\ u_1 + v_3 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = 1;\ u_2 + v_4 = 4;$$

$$u_3 + v_4 = 7; u_3 + v_5 = 2.$$

Полагая u_1=0 (т.к. имеются 8 переменных и 7 уравнений), получаем u_2 = -3; u_3=0; v_1=2; v_2=3; v_3=4; v_4=7; v_5=2.

Далее вычисляем симплексные разности **для свободных переменных** (свободных клеток) по следующей формуле:

$\Delta_{ij}=c_{ij} – (u_i + v_j)$.

Δ_{14}= 2-(0+7)=-5; Δ_{15}=4-(0+2)=2;

Δ_{21}= 8-(-3+2)=9; Δ_{22}=4-(-3+3)=4; Δ_{25}=-1-(-3+2)=2;

Δ_{31}=9-(0+2)=7; Δ_{32}=7-(0+3)=4; Δ_{33}=-3-(0+4)=-1.

Среди полученных симплексных разностей имеются отрицательные значения, следовательно, найденный опорный план не оптимальный.

Имеем следующие значения симплексных разностей:

$$\Delta_{ij}=\{-5;2;9;4;2;7;4;-1\}.$$

$$\Delta_{lk}=\max\ \{\Delta_{ij}\}=\Delta_{14}= -5,$$

$$x_{lk} = x_{14} = 10.$$

Подставляем полученные значения в таблицу с опорным планом и получаем таблицу.

ПН / ПО	B1 $v_1 = 2$	B2 $v_2 = 3$	B3 $v_3 = 4$	B4 $v_4 = 7$	B5 $v_5 = 2$	Запасы
A1 u_1=0	2 **60**	3 **70**	4 **10** -	2 +	4	**140**
A2 u_2= -3	8	4	1 **110** +	4 **70** -	1	**180**
A3 u_3=0	9	7	3	7 **60**	2 **100**	**160**
Потребности	**60**	**70**	**120**	**130**	**100**	**480**

Пометим заполняемую клетку (1,4) знаком «+», а затем поочередно клетки (2,4), (2,3), (1,3) – соответственно знаками «+», «–», «+». Среди клеток таблицы, образующих цикл и помеченных знаком «–», меньшее значение (10) содержится в клетке (1,3). Прибавим это значение к соответствующим числам, стоящим в клетках цикла, помеченных знаком «+», и вычтем из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком «–».

Освободим клетку (1,3), в которой стояло минимальное число, а соответствующую ей переменную 13 x исключим из базиса. Получаем новый опорный план ТЗ:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} (т).$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

Z ($\overline{X1}$) =2*60+3*70+2*10+1*120+4*60+7*60+2*100=1330 (ден. ед.).

Интеграция 2.

Для каждой занятой клетки последней таблицы (с учетом перестановки) снова рассчитаем значения потенциалов поставщиков и потребителей.

$$u_1+v_1=3;\ u_1+v_2=3;\ u_1+v_4=2;$$
$$u_2+v_3=1;\ u_2+v_4=4;$$
$$u_3+v_4=7;\ u_3+v_5=2.$$

Полагая $u_1=0$, получаем $u_2=2$; $u_3=5$; $v_1=2$; $v_2=3$; $v_3=-1$; $v_4=2$; $v_5=-3$.

Для свободных клеток определяем симплексные разности:

$\Delta_{13}=5$; $\Delta_{15}=7$; $\Delta_{21}=4$; $\Delta_{22}=-1$; $\Delta_{25}=2$; $\Delta_{31}=2$; $\Delta_{32}=-1$; $\Delta_{33}=-1$.

Среди полученных симплексных разностей имеются отрицательные значения, следовательно, найденный опорный план не оптимальный.

Имеем следующие значения симплексных разностей:

$$\Delta_{ij}=\{5;7;4;-1;2;2;-1;-1\}.$$
$$\Delta_{lk}=\max\{\Delta_{ij}\}=\Delta_{22}=-1,$$
$$x_{lk}=x_{22}=60.$$

Подставляем полученные значения в таблицу с опорным планом и получаем таблицу.

ПН / ПО	B1 $v_1=2$	B2 $v_2=3$	B3 $v_3=-1$	B4 $v_4=2$	B5 $v_5=-3$	Запасы
A1 $u_1=0$	2 **60**	3 **70** -	4	2 **10** +	4	**140**
A2 $u_2=2$	8	4 +	1 **120**	4 **60** -	1	**180**
A3 $u_3=5$	9	7	3	7 **60**	2 **100**	**160**
Потребности	**60**	**70**	**120**	**130**	**100**	**480**

Пометим заполняемую клетку (2,2) знаком «+», а затем поочередно клетки (1,2), (1,4), (2,4) – соответственно знаками «+», «–», «+». Среди клеток таблицы, образующих цикл и помеченных знаком «–», меньшее значение (60) содержится в клетке (2,4). Прибавим это значение к соответствующим числам, стоящим в клетках цикла, помеченных знаком «+», и вычтем из чисел, стоящих в клетках, помеченных знаком «–».

Освободим клетку (2,4), в которой стояло минимальное число, а соответствующую ей переменную x_{24} исключим из базиса. Получаем новый опорный план ТЗ:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 60 & 10 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 60 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix} (т).$$

Общая стоимость перевозки груза составляет

$Z(\overline{X1})$ =2*60+3*10+2*70+4*60+1*120+7*60+2*100=1270 (ден. ед.).

Аналогично, проделав еще 3 итерации, на последней 5-ой итерации получим, что все симплексные разности неотрицательны. Следовательно, найденный в итерации 4 опорный план является оптимальным. Таким образом, оптимальный план перевозок груза от поставщиков к потребителям имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 70 & 60 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 100 \end{pmatrix} \text{(т.).}$$

Изменение суммарной стоимости перевозок по мере приближения к оптимальному плану показано в таблице.

Целевая функция	$Z(\overline{X0})$	$Z(\overline{X1})$	$Z(\overline{X2})$	$Z(\overline{X3})$	$Z(\overline{X4})$
Стоимость перевозки	1380	1330	1270	1250	1200

Примечание. В некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта отправления Ai в пункт назначения Bj не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что стоимость перевозки единицы груза из пункта Ai в Bj является сколь угодно большой величиной M, при этом условии известными методами находят решение ТЗ. Такой подход к нахождению решения ТЗ называется **запрещением перевозок.**

Индивидуальные задания на лабораторную работу № 8

ПОРЯДОК РАБОТЫ:

Для транспортной задачи под номером Вашего варианта:

1. Составить математическую модель распределения перевозок от поставщиков к потребителям;

Найти:

2. Начальный опорный план методами северо-западного угла, наименьшей стоимости;

3. Оптимальный план методом потенциалов (в качестве начального опорного плана воспользуйтесь решением метода наименьшей стоимости);

Постановка задачи:

Имеются шесть поставщиков I, II, III, IV, V и VI и шесть потребителей A, B, C, D, E и F однородной продукции. Возможности поставщиков задаются параметрами a_i желания потребителей величинами b_j. Стоимости перевозок от поставщиков к потребителям определяются значениями c_{ij}.

1 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	3	9	7	12	6	12	108
II	12	6	11	15	4	13	90
III	3	8	8	6	6	16	52
IV	9	11	11	8	12	15	62
V	17	12	21	16	8	14	100
VI	10	14	11	19	9	12	169
Потребности	42	65	173	93	102	106	

2 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	12	6	15	9	6	106
II	10	12	18	22	20	20	123
III	8	14	14	13	23	20	46
IV	9	14	14	10	16	10	124
V	11	15	7	13	14	20	104
VI	9	7	8	9	13	13	112
Потребности	97	105	23	168	102	120	

3 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	12	9	4	15	4	3	99
II	9	3	5	15	3	10	134
III	6	4	4	16	6	5	81
IV	10	5	9	17	10	8	35
V	16	14	10	14	8	12	139
VI	13	13	12	16	19	15	82
Потребности	79	106	110	105	149	21	

4 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	10	16	8	5	15	5	120
II	20	16	20	15	19	9	72
III	15	20	17	15	17	17	146
IV	9	16	10	5	11	9	43
V	10	12	12	15	18	6	67
VI	18	13	10	13	12	4	214
Потребности	102	106	98	123	163	70	

5 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	12	10	17	3	2	11	137
II	9	19	20	5	12	14	121
III	23	15	22	18	9	21	58
IV	14	15	10	11	6	9	115
V	12	15	15	14	16	17	105
VI	16	9	16	12	11	12	31
Потребности	59	55	168	161	98	26	

6 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	11	15	11	5	15	7	80
II	7	14	11	12	14	12	121
III	7	9	10	7	16	13	158
IV	13	11	10	10	21	17	81
V	8	17	8	15	13	13	100
VI	14	21	13	18	23	15	155
Потребности	53	167	110	115	132	118	

7 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	14	14	10	16	10	18	142
II	22	15	21	13	23	14	141
III	9	8	13	7	9	9	89
IV	13	15	10	15	16	10	88
V	20	23	17	10	22	20	84
VI	23	19	17	10	13	15	83
Потребности	35	114	76	124	132	146	

8 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	16	12	7	9	3	8	74
II	10	11	14	9	13	12	78
III	17	13	20	14	14	19	46
IV	11	5	7	9	7	9	102
V	18	16	18	15	5	8	72
VI	9	5	8	17	7	13	55
Потребности	88	98	77	70	58	36	

9 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	9	10	7	5	14	3	110
II	23	20	13	9	15	9	107
III	16	12	11	14	19	4	139
IV	19	16	17	7	16	13	30
V	19	24	14	17	18	13	112
VI	17	25	12	12	22	8	100
Потребности	45	146	58	92	128	129	

10 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	10	3	9	9	10	7	85
II	12	11	16	18	14	13	29
III	20	13	15	9	6	11	95
IV	10	3	7	15	7	11	73
V	8	10	7	6	11	13	149
VI	18	20	14	18	11	15	193
Потребности	99	112	37	137	107	132	

11 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	9	14	2	14	6	12	139
II	9	17	3	15	11	10	102
III	16	18	13	8	9	14	145
IV	8	8	8	11	16	18	101
V	17	15	14	19	23	17	42
VI	19	15	14	9	16	15	86

Потребно-сти	46	76	136	151	164	42	

12 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	5	9	3	16	11	7	96
II	11	12	12	11	6	8	76
III	10	5	10	18	7	14	22
IV	12	9	11	12	8	17	84
V	14	7	5	19	13	16	75
VI	8	13	5	21	11	19	99
Потребно-сти	104	63	57	26	84	118	

13 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	6	7	9	13	3	13	102
II	18	13	20	19	7	15	102
III	14	19	15	12	15	23	131
IV	14	13	23	13	15	22	26
V	19	12	23	19	10	26	128
VI	11	9	21	15	15	21	174
Потребно-сти	143	162	98	105	130	25	

14 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	15	12	10	3	12	10	151
II	10	7	18	8	16	14	124
III	14	17	16	14	11	13	153
IV	14	13	23	10	16	17	119
V	12	8	15	5	5	6	143
VI	20	10	17	14	14	18	38
Потребно-сти	76	123	158	155	152	64	

15 вариант

ПН / ПО	A	B	C	D	E	F	Запасы
I	14	5	12	8	9	11	87
II	13	12	10	9	23	15	55
III	8	6	5	5	12	14	79
IV	18	7	16	4	14	15	88
V	13	13	14	10	15	18	134
VI	21	17	16	7	21	15	50
Потребно-сти	58	95	107	58	119	56	

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бурда А. Г. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие (курс лекций) / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда; Кубан. гос. аграр. ун-т. – Краснодар, 2015. – 178 с.
2. Вотякова, Л.Р. Экономико-математические методы: лабораторный практикум / Л.Р.Вотякова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт(филиал) ФБГОУ ВПО «КНИТУ», 2014. – 120 с.
3. Карасева Р.Б. Экономико-математические методы и модели в социально-экономических исследованиях: учебное пособие/Р.Б.Карасева.–Омск: СибАДИ, 2012.−107 с.
4. Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ , 2001. - 245с.
5. Кремлев, А. Г. Основные понятия теории игр : учебное пособие / А. Г. Кремлев. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 144 с.
6. Максимова Н.Н. Теория игр: учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2015. – 94 с.
7. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. – 6-е изд., испр. и доп. — М.: Высшее образование, 2006. — 654 с.
8. Тема 11. Общее равновесие и экономическая эффективность. Режим доступа: https://mgimo.ru/upload/iblock/50f/malova.pdf
9. Щерба, В.Н.Экономико-математические методы и моделирование в землеустройстве : учеб.-методич. пособие / В.Н. Щерба, Т.В. Ноженко,Е.В. Некрасова. – Омск : Изд-во ФГБОУ ВПО ОмГАУ им. П.А. Столыпина, 2012. – 92 с.
10. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.:ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
11. Экономико-математические методы: методические рекомендации для лабораторной работы по дисциплине для студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность / Юго-Зап. гос. ун-т.; сост.: И.Ф. Мальцева. - Курск, 2016. - 38 с.
12. Яроцкая Е. В. Экономико-математические методы и моделирование : учеб. пособие / Е. В. Яроцкая. – Краснодар : КубГАУ, 2017. – 176 с.