МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
« 6 » 09 _____________ 2021 г.

НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА. МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА

Методические рекомендации
к практическим занятиям
по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»
для студентов направления подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2021

УДК 510.6
Составители: С. В. Дегтярев, Е.Н. Иванова

Рецензент
Доцент кафедры программной инженерии,
кандидат технических наук
Ю.А. Халин

Нечеткая логика. Многозначная логика : методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова. – Курск, 2021. - 17 с. - Библиограф.: с. 17.

Рассмотрены теоретические основы нечеткой логики и многозначной логики. Теоретический материал поясняется примерами, завершается вопросами для самопроверки, заданиями для самостоятельного выполнения.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 6.08.21 . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. . Тираж 20 экз. Заказ 1045 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Цель практических занятий

Изучить основные понятия теории нечеткой и многозначной логики; овладеть методами выполнения операций над нечеткими высказываниями и предикатами, многозначными лингвистическими переменными; приобрести навыки определения областей нечеткой равносильности/неравносильности.

1 Нечеткие множества

В 1965 году американский математик Лотфи Заде (*L. Zade*) опубликовал статью «Нечеткие множества» («*Fuzzy sets*»). Было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания сложных плохо определенных систем, в которых наряду с количественными данными присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные.

Понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, и статья Заде породила новое научное направление. Произошло «раздвоение» математики, появились нечеткие функции, нечеткие отношения, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т.д. Эти понятия широко используются в экспертных системах, системах искусственного интеллекта.

Основные понятия нечетких множеств.

Определение

Нечетким множеством $\bar{A}$ на множестве X назовем пару $\left(X, m_A\right)$, где m_A – функция, каждое значение которой интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству $\bar{A}$, $m_A\left(x\right) \in \left[0; 1\right]$. Функция m_A называется *функцией принадлежности множества* $\bar{A}$.

Для обычного четкого множества A можно положить:

$$m_A\left(x\right) = \begin{cases} 1, \; x \in A, \\ 0, \; x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, обычное множество является частным случаем нечеткого множества.

Функцию принадлежности, как и всякую функцию, можно задавать таблично или аналитически.

Пример

Нечеткое множество $\bar{A}$, которое формализует понятие «несколько», ясного лишь на интуитивном уровне.

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество натуральных чисел, а функция $m_A(x)$ задана таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m_A(x)$	0	0,1	0,6	0,8	1	1	0,9	0,7	0,2	0

Аналогично можно ввести понятия «много», «мало», «около 100», «почти 20», и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются *лингвистическими*. Это основной тип переменных в языке людей.

Пример

Пусть $X = (0; \infty)$ – множество положительных чисел, а функция $m_A(x)$ задана формулой:

$$m_A(x) = \begin{cases} 0, \; 0 < x \leq 50, \\ \left(1 + \dfrac{25}{(x-50)^2}\right)^{-1}, \; x > 50. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 1.

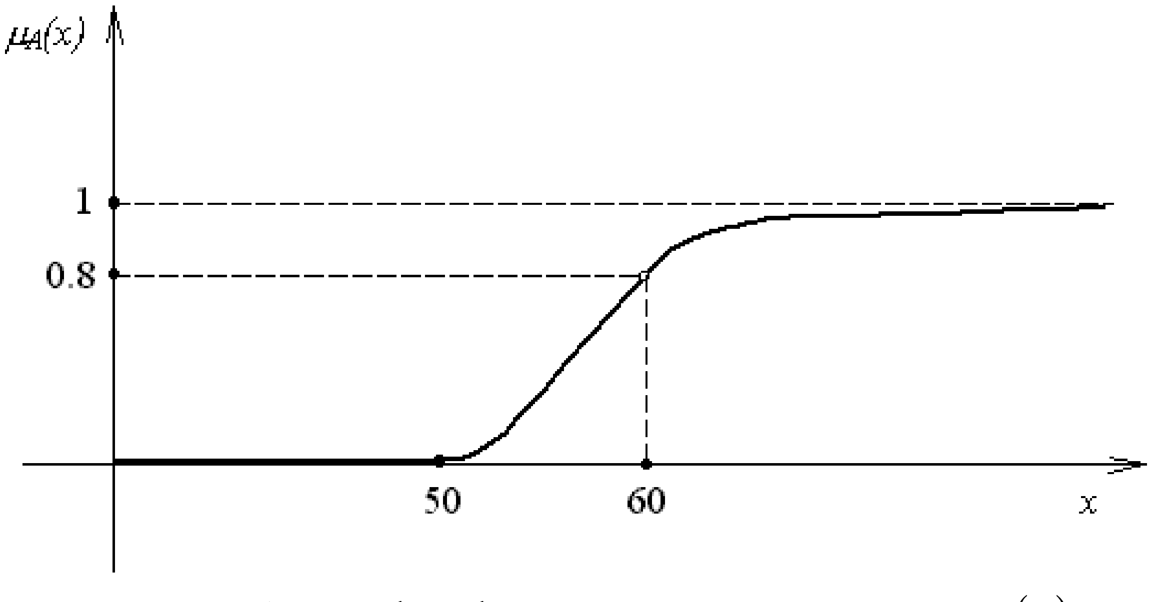

Рисунок 1 – График функции принадлежности $m_A(x)$

Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество $\bar{A}$ соответствует понятию «старый». Аналогично можно ввести понятия «молодой», «средних лет» и т.д.

Пример

Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями: «малое», «большое», «среднее», «около 5 км» и т.д. Каждое значение описывается нечетким множеством. Пусть речь идет о поездках на такси по городу. В качестве универсального множества X можно взять отрезок $[0; 100]$ км и задать функцию принадлежности значений так, как показано на рис. 2.

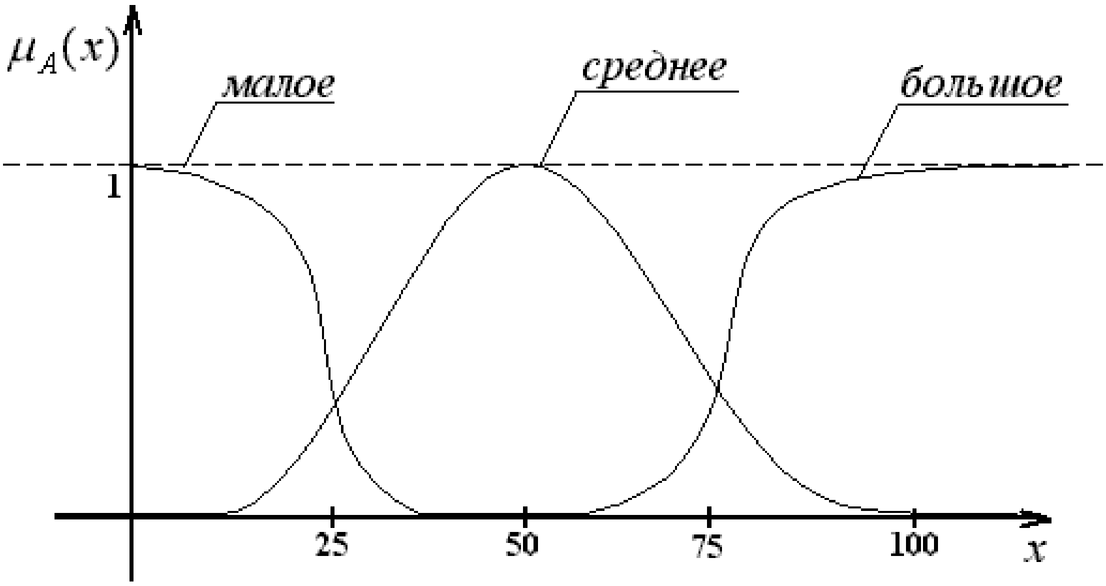

Рисунок 2 – Функция принадлежности переменной «расстояние»

Введем операции с нечеткими множествами аналогично операциям с обычными множествами.

Пусть $\bar{A}$ и $\bar{B}$ – два нечетких множества с функциями принадлежности $m_A(x)$ и $m_B(x)$.

В таблице 1 приведены названия основных операций, их лингвистический смысл и формула для определения функции принадлежности множества $\bar{C}$, которое является результатом соответствующей операции.

Таблица 1 – Операция с нечеткими множествами

Операции	Лингвистический смысл	Формула для $m_C(x)$
Пересечение $\bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B}$	И	$\min\left(m_A\left(x\right), m_B\left(x\right)\right)$
Объединение $\bar{C} = \bar{A} \cup \bar{B}$	ИЛИ	$\max\left(m_A\left(x\right), m_B\left(x\right)\right)$
Дополнение	НЕ	$1 - m_A\left(x\right)$
Концентрация	ОЧЕНЬ	$\left(m_A\left(x\right)\right)^2$
Размывание	НЕ ОЧЕНЬ	$\left(m_A\left(x\right)\right)^{1/2}$

Нечеткое множество называется *пустым*, если $m_A\left(x\right) = 0$ для всех $x \in X$.

Пример

Пусть X – множество студентов, $\bar{A}$ – множество пожилых людей. Множество $\bar{A}$ – пустое, $m_A\left(x\right) = 0$ для всех $x \in X$, так как пожилых студентов, вообще говоря, не бывает.

Введенные для нечетких множеств операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: очень много, не старше и не моложе и т.д. По аналогии с четкими множествами определяется отношение включения множества $\bar{A}$ в множество $\bar{B}$, а именно $\bar{A}$ является подмножеством $\bar{B}$ тогда и только тогда, когда $m_A\left(x\right) \le m_B\left(x\right)$ для всех $x \in X$.

Мы видим, что понятие нечеткого множества носит субъективный характер, такова и его формализация. Результаты, полученные с помощью аппарата алгебры нечетких множеств, должны носить качественный характер. Большей объективности выводов можно добиться, получив оценки функции принадлежности $m_A\left(x\right)$ путем опроса экспертов.

2 Нечеткие высказывания

Определение

Нечетким высказыванием называется высказывание $\tilde{A}$, степень истинности которого $\mu\left(\tilde{A}\right)$ можно оценить числом из интервала $\left[0;1\right]$, $\mu\left(\tilde{A}\right)\in\left[0;1\right]$. Если $\mu\left(\tilde{A}\right)=0,5$, то высказывание называется индиффирентным.

Определение

Нечеткой высказывательной переменной $\tilde{X}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{X}$, степень истинности которого может меняться в интервале $\left[0;1\right]$.

Так как степень истинности нечеткого высказывания не связана с сутью высказывания, будем в дальнейшем отождествлять нечеткое высказывание с его степенью истинности аналогично тому, как обычное четкое высказывание отождествлялось с его истинностью или ложностью. Нечеткие высказывания и степень их истинности будем обозначать большими буквами с тильдой: $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{X}$ и т.д.

На множестве нечетких высказываний вводятся логические операции, аналогичные операциям алгебры высказываний.

Отрицание нечеткого высказывания:

$$\overline{\tilde{A}}=1-\tilde{A}$$

Конъюнкция нечетких высказываний:

$$\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}=\min\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$$

Дизъюнкция нечетких высказываний:

$$\tilde{A}\vee\tilde{B}=\max\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$$

Импликация нечетких высказываний:

$$\tilde{A}\supset\tilde{B}=\max\left(1-\tilde{A},\tilde{B}\right)$$

Эквивалентность нечетких высказываний:

$$\tilde{A}\sim\tilde{B}=\min\left(\max\left(1-\tilde{A},\tilde{B}\right),\max\left(\tilde{A},1-\tilde{B}\right)\right)$$

Старшинство операций принято в порядке: 1) – 5).

Пример

Найти степень истинности высказывания

$$\tilde{C}=\left(\tilde{A}\vee\tilde{B}\right)\sim\left(\tilde{A}\supset\left(\tilde{A}\,\&\,\tilde{B}\right)\right)\text{ при }\tilde{A}=0,8;\ \tilde{B}=0,3$$

Решение

Порядок действий определяется старшинством операций и скобками.

1) $\bar{A}\,\&\,\bar{B}=\min\left(\bar{A},\,\bar{B}\right)=\min\left(0{,}8;\,0{,}3\right)=0{,}3$.

2) $\bar{A}\supset\left(\bar{A}\,\&\,\bar{B}\right)=\max\left(1-0{,}8;\,0{,}3\right)=0{,}3$.

3) $\bar{A}\vee\bar{B}=\max\left(\bar{A},\,\bar{B}\right)=\max\left(0{,}8;\,0{,}3\right)=0{,}8$.

4)

$$\bar{C}=\left(\bar{A}\vee\bar{B}\right)\urcorner\left(\bar{A}\supset\left(\bar{A}\,\&\,\bar{B}\right)\right)=\min\left(\max\left(1-0{,}8;\,0{,}3\right),\,\max\left(0{,}8;\,1-0{,}3\right)\right)=$$

$$=\min\left(\max\left(0{,}2;\,0{,}3\right),\,\max\left(0{,}8;\,0{,}7\right)\right)=\min\left(0{,}3;\,0{,}8\right)=0{,}3$$

Множество нечетких высказываний вместе с введенными на них операциями образуют *алгебру нечетких высказываний.*

Определение

Нечеткой логической формулой называется:

а) любая нечеткая высказывательная переменная;

б) если $\bar{A}$ и $\bar{B}$, – нечеткие логические формулы, то $\bar{\bar{A}}$, $\bar{A}\,\&\,\bar{B}$, $\bar{A}\vee\bar{B}$, $\bar{A}\supset\bar{B}$, $\bar{A}\urcorner\bar{B}$ – тоже нечеткие логические формулы.

Определение

Пусть $\bar{A}\left(\bar{X}_1,\,\bar{X}_2,\ldots,\,\bar{X}_n\right)$ и $\bar{B}\left(\bar{X}_1,\,\bar{X}_2,\ldots,\,\bar{X}_n\right)$ – две нечеткие логические формулы. *Степенью равносильности формул* $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называется величина

$$\mu\left(\bar{A},\,\bar{B}\right)=\underset{(\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_n)}{\&}\left\{\bar{A}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\Gamma\ \bar{B}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)\right\}$$

Здесь логические операции конъюнкции и эквивалентности имеют смысл, определенный выше для логических операций над нечеткими высказываниями, причем конъюнкция берется по всем наборам степеней истинности $\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$ нечетких переменных $\left(\bar{X}_1,\,\bar{X}_2,\ldots,\,\bar{X}_n\right)$.

Множество всех наборов степеней истинности $\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$ нечетких переменных $\left(\bar{X}_1,\,\bar{X}_2,\ldots,\,\bar{X}_n\right)$ назовем *полной областью определения* C^n. Очевидно, что множество C^n имеет мощность континуума в отличие от двузначной логики высказываний, где число всех наборов переменных конечно и равно 2^n.

Если $\mu\left(\bar{A}, \bar{B}\right) = 0,5$, то нечеткие формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называются *индиффирентными.*

Если $\mu\left(\bar{A}, \bar{B}\right) > 0,5$, то нечеткие формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называются *нечетко равносильными.*

Если $\mu\left(\bar{A}, \bar{B}\right) < 0,5$, то нечеткие формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называются *нечетко неравносильными.*

Определение

Степенью неравносильности формул $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называется величина

$$\overline{\mu}\left(\bar{A}, \bar{B}\right) = 1 - \mu\left(\bar{A}, \bar{B}\right)$$

Пример

Определить степень равносильности формул.

$$\bar{A} = \bar{X} \supset \bar{Y}, \ \bar{B} = \overline{\bar{X} \,\&\, \bar{Y}}$$

при условии, что $\bar{X}, \bar{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества $\{0,1;\ 0,2\}$.

Решение

Перечислим все возможные наборы значений $\bar{X}, \bar{Y}$:

$A_1 = \{0,1;\ 0,1\}$;

$A_2 = \{0,1;\ 0,2\}$;

$A_3 = \{0,2;\ 0,1\}$;

$A_4 = \{0,2;\ 0,2\}$.

Преобразуем заданные формулы:

$$\bar{A} = \bar{X} \supset \bar{Y} = \max\left\{1 - \bar{X}, \bar{Y}\right\}$$

$$\bar{B} = \overline{\bar{X} \,\&\, \bar{Y}} = 1 - \bar{X} \,\&\, \bar{Y} = 1 - \min\left\{\bar{X}, \bar{Y}\right\}$$

Вычислим значения формул $\bar{A}$ и $\bar{B}$ на каждом из четырех наборов $A_1 - A_4$:

$$\bar{A}_1 = \max\{1 - 0,1;\ 0,1\} = 0,9$$

$$\bar{A}_2 = \max\{1 - 0,1;\ 0,2\} = 0,9$$

$\bar{A}_3 = \max\{1-0,2;\ 0,1\} = 0,8$

$\bar{A}_4 = \max\{1-0,2;\ 0,2\} = 0,8$

$\bar{B}_1 = 1-\min\{0,1;\ 0,1\} = 0,9$

$\bar{B}_2 = 1-\min\{0,2;\ 0,1\} = 0,9$

$\bar{B}_3 = 1-\min\{0,2;\ 0,1\} = 0,9$

$\bar{B}_4 = 1-\min\{0,2;\ 0,2\} = 0,8$

Вычислим теперь степень равносильности формул $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Для этого сначала вычислим $\bar{A}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,\Gamma\,\bar{B}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ для всех наборов A_1-A_4:

$\bar{A} \urcorner \bar{B} = \min\left\{\max\left\{\left(1-\dot{A}\right), \bar{B}\right\}, \max\left\{\left(1-\ddot{B}\right), \ddot{A}\right\}\right\}$

Поэтому

$\bar{A}_1 \urcorner \bar{B}_1 = \min\left\{\max\left\{(1-0,9), 0,9\right\}, \max\left\{(1-0,9), 0,9\right\}\right\} = 0,9$

$\bar{A}_2 \urcorner \bar{B}_2 = \min\left\{\max\left\{(1-0,9), 0,9\right\}, \max\left\{(1-0,9), 0,9\right\}\right\} = 0,9$

$\bar{A}_3 \urcorner \bar{B}_3 = \min\left\{\max\left\{(1-0,8), 0,9\right\}, \max\left\{(1-0,9), 0,8\right\}\right\} = 0,8$

$\bar{A}_4 \urcorner \bar{B}_4 = \min\left\{\max\left\{(1-0,8), 0,8\right\}, \max\left\{(1-0,8), 0,8\right\}\right\} = 0,8$

Окончательно получим:

$$\mu\left(\bar{A}, \bar{B}\right) = \underset{(\alpha_1,\alpha_2,\ \ ,\alpha_n)}{\&}\left\{\dot{A}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\,\Gamma\,\ddot{B}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\right\} =$$

$$= 0,9 \,\&\, 0,9 \,\&\, 0,8 \,\&\, 0,8 = 0,8$$

Формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ нечетко равносильны.

На других наборах степеней истинности нечетких переменных $\bar{X}, \bar{Y}$ формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ могут быть нечетко неравносильны.

Определение

Пусть $\bar{A}\left(\dot{X}_1, \dot{X}_2,\ldots, \dot{X}_n\right)$ и $\bar{B}\left(\dot{X}_1, \dot{X}_2,\ldots, \dot{X}_n\right)$ – две нечеткие логические формулы, рассмотренные на некотором множестве M изменения нечетких переменных $\bar{X}_1, \dot{X}_2,\ldots, \dot{X}_n$ *Областью нечеткой равносильности формул* $\bar{A}$ и $\bar{B}$ называется подмножество множества M, на котором формулы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ нечетко равносильны.

Пример

Определить область нечеткой равносильности формул.
$\tilde{A} = \tilde{X} \supset \tilde{Y}$, $\tilde{B} = \overline{\tilde{X} \,\&\, \tilde{Y}}$
при условии, что $\tilde{X}, \tilde{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества $\{0,1;\ 0,2\}$.

Решение

Множество изменения нечетких переменных *M* состоит из четырех наборов:
$A_1 = \{0,1;\ 0,1\}$;
$A_2 = \{0,1;\ 0,2\}$;
$A_3 = \{0,2;\ 0,1\}$;
$A_4 = \{0,2;\ 0,2\}$.

На каждом наборе формулы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечетко равносильны, так как $\mu\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = 0,8 > 0,5$. Поэтому областью нечеткой равносильности будет все множество *M*.

Определение

Если формула $\tilde{A}\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n\right)$ на всех наборах переменных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ из некоторого множества *M* имеет степень истинности большую или равную 0,5, то она будет на нем *нечетко истинной*. Обозначается это так:
$\tilde{A} = \tilde{И}$.

Определение

Если формула $\tilde{A}\left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n\right)$ на всех наборах переменных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ из некоторого множества *M* имеет степень истинности меньшую или равную 0,5, то она будет на нем *нечетко ложной*. Обозначается это так:
$\tilde{A} = \tilde{Л}$.

Пример

Покажем, что
$\tilde{X} \vee \overline{\tilde{X}} = \tilde{И}$ и $\tilde{X} \,\&\, \overline{\tilde{X}} = \tilde{Л}$
для всех значений нечеткой переменной $\tilde{X}$: $0 \le \tilde{X} \le 1$.

Решение

Можем записать:

$$\tilde{X} \vee \overline{\tilde{X}} = \max\left(\tilde{X},\, \overline{\tilde{X}}\right) = \max\left(\tilde{X},\, 1-\tilde{X}\right) \geq 0{,}5$$

$$\tilde{X} \,\&\, \overline{\tilde{X}} = \min\left(\tilde{X},\, \overline{\tilde{X}}\right) = \min\left(\tilde{X},\, 1-\tilde{X}\right) \leq 0{,}5$$

3 Нечеткие предикаты

Определение

Нечетким предикатом $\tilde{P}\left(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n\right)$ называется нечеткая формула, переменные которой определены на некотором множестве *M*, $x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n \in M$, а сама она принимает значения из интервала $\left[0;1\right]$.

Нечеткий предикат от *n* переменных называется *n-местным нечетким предикатом.* Нечеткое высказывание $\tilde{A}$, задаваемое степенью истинности $\mu\left(\tilde{A}\right) \in \left[0;1\right]$ является одноместным нечетким предикатом.

Пример

Пусть $M = \left\{0, 1, 2, 3\right\}$. Зададим нечеткий предикат следующим образом:

$\tilde{P}\left(x,\, y\right) = xy/9$.

Его значения определяются следующим образом:

$\tilde{P}\left(0,\, y\right) = \tilde{P}\left(x,\, 0\right) = 0$

$\tilde{P}\left(1, 1\right) = 1/9$

$\tilde{P}\left(1, 2\right) = \tilde{P}\left(2, 1\right) = 2/9$

$\tilde{P}\left(1, 3\right) = \tilde{P}\left(3, 1\right) = 3/9 = 1/3$

$\tilde{P}\left(2, 2\right) = 4/9$

$\tilde{P}\left(2, 3\right) = \tilde{P}\left(3, 2\right) = 6/9 = 2/3$

$\tilde{P}\left(3, 3\right) = 9/9 = 1$

Определение

Нечеткими кванторами $\tilde{\forall}$ и $\tilde{\exists}$ называются логические символы, которые придают включающим их выражениям следующий смысл:

$$\tilde{\forall}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \underset{x_i \in M}{\&}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \min_{x_i \in M}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$\tilde{\exists}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \bigvee_{x_i \in M}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \max_{x_i \in M}\tilde{P}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Пример

Найдем значения степени истинности формул $\tilde{\forall}\tilde{P}(x, 1)$ и $\tilde{\exists}\tilde{P}(x, 1)$ для $\tilde{P}(x, y) = xy / 9$, $x \in M = \{0, 1, 2, 3\}$.

Решение

$$\tilde{\forall}\tilde{P}(x, 1) = \min\left\{\tilde{P}(0, 1), \tilde{P}(1, 1), \tilde{P}(2, 1), \tilde{P}(3, 1)\right\} =$$

$$= \min\{0; 1/9; 2/9; 1/3\} = 0$$

$$\tilde{\exists}\tilde{P}(x, 1) = \max\left\{\tilde{P}(0, 1), \tilde{P}(1, 1), \tilde{P}(2, 1), \tilde{P}(3, 1)\right\} =$$

$$= \max\{0; 1/9; 2/9; 1/3\} = 1/3$$

По аналогии с четкими предикатами вводятся также остальные понятия для нечетких предикатов.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое нечеткое множество?
2. Что называется функцией принадлежности множества $\tilde{A}$?
3. Перечислите операции с нечеткими множествами, поясняя их лингвистический смысл и формализуя функцию принадлежности.
4. Чему равна функция принадлежности пустого нечеткого множества?
5. Что называется нечетким высказыванием?
6. Какое нечеткое высказывание называется индиффирентным?
7. Что называется нечеткой высказывательной переменной?
8. Перечислите операции нечеткой алгебры высказываний.
9. Что такое нечетка логическая формула?
10. Что такое степень равносильности двух нечетких формул?
11. В каком случае две нечеткие формулы называются индиффирентными?
12. В каком случае две нечеткие формулы называются нечетко равносильными?

13. В каком случае две нечеткие формулы называются нечетко неравносильными?

14. Что такое степень неравносильности двух нечетких формул?

15. Что такое область нечеткой равносильности формул?

16. Какая формула называется нечетко истинной? Нечетко ложной?

17. Что называется нечетким предикатом?

18. Что называется нечетким квантором?

Задания для выполнения

1. Определить степень равносильности формул $\bar{A}$ и $\bar{B}$ при условии, что $\bar{X}, \bar{Y}$ принимают значения степеней истинности из множества $M = \{0,6;\ 0,7\}\{0,2;\ 0,3\}$.

№ п/п	$\bar{A}$	$\bar{B}$	№ п/п	$\bar{A}$	$\bar{B}$	№ п/п	$\bar{A}$	$\bar{B}$
1	$\bar{X} \supset \bar{Y}$	$\overline{\bar{X}} \,\&\, \bar{Y}$	11	$\bar{X} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \supset \bar{Y}$	21	$\bar{X} \supset \bar{Y}$	$\bar{X} \vee \overline{\bar{Y}}$
2	$\overline{\bar{X}} \vee \bar{Y}$	$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$	12	$\bar{Y} \supset \bar{X}$	$\overline{\bar{X}} \vee \bar{Y}$	22	$\overline{\bar{Y}} \supset \bar{X}$	$\overline{\bar{X}} \,\&\, \bar{Y}$
3	$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$	$\bar{X} \supset \overline{\bar{Y}}$	13	$\overline{\bar{X}}$	$\bar{X} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$	23	$\overline{\bar{Y}}$	$\bar{X} \supset \bar{Y}$
4	$\overline{\bar{X}}$	$\overline{\bar{X}} \vee \bar{Y}$	14	$\overline{\bar{X}} \,\&\, \bar{Y}$	$\bar{X} \vee \overline{\bar{Y}}$	24	$\overline{\bar{X}}$	$\bar{X} \vee \bar{Y}$
5	$\bar{Y} \supset \overline{\bar{X}}$	$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$	15	$\overline{\bar{X}} \vee \bar{Y}$	$\overline{\bar{Y}}$	25	$\bar{Y} \supset \overline{\bar{X}}$	$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$
6	$\bar{X} \supset \overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{Y}}$	16	$\overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \supset \bar{Y}$	26	$\overline{\bar{X}} \supset \bar{Y}$	$\overline{\bar{Y}}$
7	$\bar{X} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}}$	17	$\bar{X} \supset \bar{Y}$	$\overline{\bar{X}} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$	27	$\overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \,\&\, \bar{Y}$
8	$\overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \supset \overline{\bar{Y}}$	18	$\overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \supset \bar{Y}$	28	$\bar{Y} \supset \bar{X}$	$\bar{X} \vee \overline{\bar{Y}}$
9	$\bar{Y} \supset \bar{X}$	$\bar{X} \vee \overline{\bar{Y}}$	19	$\bar{X} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}}$	29	$\overline{\bar{Y}}$	$\overline{\bar{X}} \supset \bar{Y}$
10	$\overline{\bar{X}}$	$\bar{Y} \supset \bar{X}$	20	$\bar{X} \,\&\, \bar{Y}$	$\overline{\bar{X}} \vee \overline{\bar{Y}}$	30	$\bar{X} \vee \bar{Y}$	$\bar{X} \,\&\, \overline{\bar{Y}}$

4 Многозначные логики

Многозначные логики – обобщение классической двузначной логики, посредством которого к обычным истинностным значениям «истина» и «ложь» добавляются и другие (промежуточные) значения.

Этот факт указывает на то, что принцип двузначности («каждое высказывание или истинно, или ложно») отбрасывается, хотя построение многозначной логики осуществляется по аналогии с классической двузначной логикой. Именно на этом пути была впервые построена в 1920 г. Я. Лукасевичем трехзначная логика с целью опровержения логического фатализма

В этой логике явным образом указывается число истинностных значений, в данном случае 1 («истина»), 1/2 («случайность») и 0 («ложь»). Выделенным истинностным значением является 1. Исходными логическими связками у Лукасевича являются:

→ – импликация;

~ – отрицание.

Их табличное определение:

→	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	0

	¬
1	0
1/2	1/2
0	1

Посредством исходных связок определяются $\vee$ (дизъюнкция), & (конъюнкция) и $\leftrightarrow$ (эквиваленция):

$$A \vee B = (A \to B) \to B,$$

$$A \,\&\, B = \overline{\left(\overline{A} \to \overline{B}\right)},$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{\overline{(A \to B)} \to \overline{(B \to A)}}.$$

Значения $A \vee B$ и $A \,\&\, B$, как и в традиционной логике есть max и min соответственно от значений *A* и *B*:

$$A \vee B = \max(A,\, B),$$

$$A \,\&\, B = \min(A,\, B).$$

Формула A является общезначимой (законом логическим), если при любом приписывании значений из множества $\{0; 1/2; 1\}$ переменным, входящим в A, формула A принимает значение 1.

Логика Лукасевича оказалась весьма необычной, например, в ней не имеют места следующие законы двузначной логики:

$A \vee \overline{A}$ – закон исключенного третьего,

$\overline{A \,\&\, \overline{A}}$ – закон непротиворечия,

$\left(A \to \left(A \to B\right)\right) \to \left(A \to B\right)$ – закон сокращения.

С другой стороны, выразительные средства трехзначной логики богаче, поскольку в ней уже можно выразить своеобразные модальные операторы $\Diamond A$ (возможно, что A) и $\square A$ (необходимо, что A):

$\Diamond A = \overline{A} \to A$,

$A = \overline{\Diamond \overline{A}}$,

что и было сделано А. Тарским в 1921 г.

Понятно, что множество связок $\{\neg; \&; \vee\}$ недостаточно для определения $\to$. С другой стороны, добавление к $\{\neg; \&; \vee\}$ одного из модальных операторов позволяет определить $\to$. В 1931 г. трехзначная логика была аксиоматизирована учеником Лукасевича М. Вайсбергом.

В общей теории многозначных логик основным способом задания является матричный. Система $M = \langle M, D, \vee, \&, \supset, \neg \rangle$ называется логической матрицей,

где M – множество истинностных значений;

$D \supset M$ – множество выделенных значений;

$\vee, \&, \supset$ – двуместные операции на M;

$\neg$ – одноместная операции на M.

Поскольку алгебра $A = \langle M, \vee, \&, \supset, \neg \rangle$ является однотипной с алгеброй формул пропозиционального языка L, то обычным образом определяется функция оценки формул языка L в матрице M.

Формула A называется общезначимой в M, если при всех значениях переменных в множестве M значение A принадлежит D. Логическая матрица называется характеристической для исчисления высказываний L, если общезначимы те и только те формулы, которые

выводимы в *L*. Множество всех общезначимых формул называется матричной многозначной логикой. Здесь возникают две проблемы:
1) нахождение минимальной характеристической матрицы для *L*;
2) нахождение конечной аксиоматизации (если это возможно) по каждой конечной матрице *M*.

Примерами минимальных характеристических матриц могут служить матрицы для классической двузначной логики и трехзначной логики Лукасевича.

Список использованных источников

1. Галиев, Ш.И. Математическая логика и теория алгоритмов [Текст] : учебное пособие / Ш.И. Галиев. – Казань : Издательство КГТУ им. А.Н. Туполева, 2002. – 270 с.
2. Ивин, А.А. Модальные теории Яна Лукасевича [Текст] / А.А. Ивин. – М., 2001. – 176 с.