

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 03.05.2024 10:09:56  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c114bb7764901694114a65d0891

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 29 » 12 2023 г.

2023 г.

**Формализация проектных процедур системного  
проектирования с помощью математического аппарата  
бесконечнозначной логики**

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы по дисциплине  
«Основы комплексной автоматизации  
проектирования ЭВМ»  
для студентов направления подготовки 09.03.01  
Информатика и вычислительная техника

Курск 2023 г.

УДК 004.02

Составитель Е.Н. Иванова

Рецензент

Доцент кафедры программной инженерии,  
кандидат технических наук

*Т.Н. Конаныхина*

**Формализация проектных процедур системного проектирования с помощью математического аппарата бесконечнозначной логики:** методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2023. – 34 с.: ил. 6. – Библиограф.: с. 34.

Рассматривается методика применения математического аппарата бесконечнозначной логики и теории графов к решению задач расчета, анализа и синтеза средств вычислительной техники и приводится пример применения указанной методики для конкретной задачи.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению Информатика и вычислительная техника.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника дневной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. . Тираж 20 экз. Заказ {309} . Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## **1. Цель**

Изучение методики применения математического аппарата бесконечнозначной логики и теории графов к решению задач расчета, анализа и синтеза средств вычислительной техники на уровне системного проектирования, а также получение практических навыков формализации соответствующих проектных процедур.

## **2. Задачи и математический аппарат системного проектирования**

Уровень системного проектирования, на котором проводится укрупненное рассмотрение всей ЭВМ, наиболее сложен для автоматизации решаемых задач. основными задачами системного проектирования, называемыми также проектными процедурами, являются задачи расчёта, анализа и синтеза. Задача расчёта системы состоит в определении численных значений характеристик функционирования системы по известной её структуре, режиму работы и неизменным численным значениям параметров её блоков. Задача анализа отличается от задачи расчёта тем, что требуется установить не численные значения характеристик системы, а их зависимости от структуры системы, режимов ее работы и параметров ее блоков. Задача синтеза заключается в разработке исходного варианта системы, т.е. её структуры и режима работы по заданным значениям параметров составляющих блоков и требуемым значениям различных характеристик функционирования системы. Задача синтеза, как правило, связана с получением наилучшего проектного варианта системы (структурная оптимизация).

Автоматическое решение на ЭВМ рассмотренных проектных процедур предполагает предварительную их форма-

лизацию с помощью создания адекватной математической модели проектируемого объекта. При этом важнейшую роль играет правильный выбор математического аппарата, включающего как теоретические методы, разработанные для конкретных задач проектирования, так и численные методы реализации теоретических концепций. Математический аппарат системного проектирования характеризуется широким спектром теоретических и численных методов. К основным теоретическим методам относятся теория игр, теория массового обслуживания, системный анализ, исследование операций и т.д. Среди численных методов наибольшее распространение получили методы непрерывной и дискретной оптимизации, статистическое моделирование.

В большинстве случаев задачи системного проектирования относятся к классам вероятностных или комбинаторных задач. Некоторые вероятностные задачи можно решить с помощью построения аналитических моделей массового обслуживания, однако чаще всего используется метод имитационного моделирования. Комбинаторные задачи сводятся к задачам дискретного математического программирования, для которых характерен перебор вариантов решений с целью найти среди них оптимальные. Автоматизация решения последнего класса задач системного проектирования дает возможность ускорить сам процесс перебора, а при использовании подходящего математического аппарата и увеличить размерность решаемых задач. Для формализации соответствующих проектных процедур представляется целесообразным использование математического аппарата бесконечнозначной логики [1].

## 2.1. Особенности проектирования последовательных систем

До настоящего времени комбинаторные алгоритмы, как средства анализа оптимизационных задач с дискретной

структурой разрабатывались в рамках теории расписаний, представляющей собой одно из направлений исследования операций [2]. Объектом изучения теории расписаний являются распределительные задачи, в которых ограниченным ресурсом оказывается время. К задачам такого типа относятся, например, проектирование асинхронных конвейерных процессоров, проектирование параллельных мультипроцессорных систем, анализ многоэтапных технологических процессов и т.д.

Определим проектируемую систему как множество блоков, объединенных некоторым множеством связей с целью выполнения заданного множества работ. Пусть каждая работа состоит из некоторого числа различных операций, выполняемых соответствующими блоками. Будем рассматривать только наиболее полно исследованные системы регулярной структуры в виде цепочки последовательно соединенных блоков (конвейерные системы).

При проектировании последовательных систем введем следующие допущения:

1. работа системы в однопрограммном режиме функционирования означает, что в системе одновременно выполняется только одна работа, а в многопрограммном – несколько работ;
2. все работы имеются в наличии в начальный момент запуска системы и поступают в систему для их выполнения в соответствии с наличием в ней свободных блоков;
3. поток работ является конечным детерминированным;
4. порядок прохождения работ через систему одинаков на всех операциях;
5. для каждой работы задано множество составляющих её операций, причем каждая операция имеет не более одной предшествующей и одной последующей операции;

6. в любой работе одновременно может выполняться не более одной операции;
7. работы после окончания предыдущей операции ожидают освобождения блока, выполняющего следующую операцию;
8. очередь работ к занятому блоку обслуживается в соответствии с дисциплиной FIFO;
9. все блоки системы абсолютно надежны;
10. в любой момент времени каждый блок может выполнять не более одной операции;
11. начатая любым блоком операция выполняется до конца.

К основным характеристикам таких систем относят характеристики быстродействия:

1. суммарное время выполнения системой фиксированного множества работ, в однопрограммном или многопрограммном режимах;
2. скорость функционирования системы, т.е. число работ, выполняемых системой в единицу времени;

а также характеристики загрузки системы в однопрограммном и многопрограммном режимах работы:

1. доля времени, в течение которой любой блок занят выполнением работ (средняя загрузка блока);
2. мгновенная загрузка блока в любой момент времени;
3. средняя по всем блокам доля занятости (средняя загрузка системы);
4. мгновенная загрузка системы в целом в любой момент времени.

Для оценки указанных характеристик можно воспользоваться математическим аппаратом бесконечнозначной логики.

## 2.2. Элементы алгебры бесконечнозначной логики

Бесконечнозначная логика (БЗЛ) представляет собой аналог булевой алгебры, в которой допускается, что и переменные исходные величины и результат операций принимает значения из бесконечного непрерывного множества чисел [1]. Пусть это множество образовано замкнутым и ограниченным интервалом  $C = [A, B]$  множества всех вещественных чисел. Точка  $M = (A + B)/2$  соответствует середине интервала  $C$ . По аналогии с булевой алгеброй в БЗЛ можно ввести операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Считая, что  $a, a_1, a_2 \in C$ , конъюнкция определяется как

$$a_1 \wedge a_2 = \min(a_1, a_2), \quad (1)$$

дизъюнкция

$$a_1 \vee a_2 = \max(a_1, a_2), \quad (2)$$

а отрицание

$$\bar{a} = 2M - a. \quad (3)$$

Суперпозиция таких логических операций и обычных алгебраических операций задает произвольные функции БЗЛ, принимающие значения из множества  $C$ . Множество всех функций БЗЛ, рассматриваемых совместно с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания БЗЛ и обычными алгебраическими операциями называется алгеброй БЗЛ. Подобно булевой алгебре функции БЗЛ часто удобно представлять в виде дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм. При вычислении значений функций известных аргументов следует руководствоваться формулами (1) – (3). Понятия уравнений и неравенств в БЗЛ (но не методы их решения) не отличаются от общепринятых.

В задачах проектирования последовательных систем важное значение имеют операции над логическими определителями (ЛО) БЗЛ с ограничениями на область матрицы.

Эти определители выражаются через свои элементы с помощью конъюнкции и дизъюнкции БЗЛ и алгебраического сложения. Пусть  $\bar{A} = \| a_{ij} \|$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$  – произвольная прямоугольная матрица с числовыми элементами. Рассмотрим в  $\bar{A}$  всевозможные нисходящие ступенчатые пути вдоль элементов, начинающиеся верхним левым элементом  $a_{11}$  и оканчивающиеся нижним правым элементом  $a_{mn}$ . Если  $\sum'_q a_{ij}$  – сумма элементов матрицы  $\bar{A}$ , расположенного вдоль  $q$ -го пути, а  $\sum''_q a_{ij}$  – сумма ее элементов, расположенных вне  $q$ -го пути, где  $q = \overline{1, M}$ ,  $M$  – общее число нисходящих ступенчатых путей из  $a_{11}$  в  $a_{mn}$ , то дизъюнктивным ЛО называется

$$A^\vee = | a_{ij} |^\vee = \bigvee_{q=1}^M \sum'_q a_{ij},$$

конъюнктивным ЛО называется

$$A^\wedge = | a_{ij} |^\wedge = \bigwedge_{q=1}^M \sum''_q a_{ij},$$

а суммирующим ЛО матрицы  $\bar{A}$

$$A^+ = | A_{ij} |^+ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

Определители обладают следующими свойствами:

$$| a_{ij} + c |^\vee = | a_{ij} |^\vee + c(m + n - 1); \quad (4)$$

$$| a_{ij} + c |^\wedge = | a_{ij} |^\wedge + c(mn - m - n + 1); \quad (5)$$

$$| a_{ij} + c |^+ = | a_{ij} |^+ + cmn; \quad (6)$$

$$| a_{ij} + c |^\vee = \begin{cases} | a_{ij} |^\vee + c, & \text{при } c > 0, \\ | a_{ij} |^\vee - \Delta, & \text{при } c < 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$| a_{ij} + c |^\wedge = \begin{cases} | a_{ij} |^\wedge + c, & \text{при } c > 0, \\ | a_{ij} |^\wedge + \Delta, & \text{при } c < 0; \end{cases} \quad (8)$$



$$|a_{ij}c|^+ = |a_{ij}|^+ c; \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} + d \end{vmatrix}^{\vee} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\vee} + c + d; \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} + d \end{vmatrix}^{\wedge} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}^{\wedge} + c + d; \quad (11)$$

$$A^{\vee} + A^{\wedge} = A^+; \quad (12)$$

где  $c, d$  – константы;

$$\Delta = \bigvee_{q=1}^M \sum'_{q} a_{ij} - \bigwedge_{q=1}^M \sum'_{q} a_{ij} \quad (13)$$

Суммирующий ЛО  $A^+$  вычисляется непосредственно по его определению (2). Вычисление дизъюнктивного ЛО  $A^{\vee}$  на практике может осуществляться следующими тремя способами:

1. путем разложения ЛО  $A^{\vee}$  по его угловому элементу  $A_{11}$  или  $A_{mn}$ , получая результат в виде суммы этого элемента и дизъюнкции логических дополнений строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент:

$$A^{\vee} = a_{11} + (A_{1,}^{\vee} \vee A_{,1}^{\vee}) \quad (14)$$

$$A^{\vee} = a_{mn} + (A_{m,}^{\vee} \vee A_{,n}^{\vee}) \quad (15)$$

где  $A_{i,}^{\vee}$  - логическое дополнение  $i$ -ой строки ЛО  $A^{\vee}$ , полученное вычеркиванием из  $A^{\vee}$   $i$ -ой строки;

$A_{,j}^{\vee}$  - логическое дополнение  $j$ -го столбца ЛО  $A^{\vee}$ , полученное вычеркиванием из  $A^{\vee}$   $j$ -го столбца;

2. путем разложения ЛО  $A^{\vee}$  по произвольной строке или столбцу:

$$A^{\vee} = \bigvee_{k=1}^n (A_{zk,1}^{\vee} + A_{zk,2}^{\vee}), \quad z = \overline{2, m}; \quad (16)$$

$$A^{\vee} = \bigvee_{z=1}^m (A_{zk,1}^{\vee} + A_{zk,2}^{\vee}), \quad z = \overline{2, n}; \quad (17)$$

где  $A_{zk,1}^{\vee}$  - левое логическое дополнение элемента  $a_{zk}$ , полученное из  $A^{\vee}$  вычеркиванием столбцов, стоящих правее элемента  $a_{zk}$ , и строк, стоящих ниже  $a_{zk}$ ; ниже  $a_{zk}$ ;

$A_{zk,2}^{\vee}$  - правое логическое дополнение элемента  $a_{zk}$ , полученное из  $A^{\vee}$  вычеркиванием столбцов, стоящих левее элемента  $a_{zk}$ , и строк, стоящих выше  $a_{zk}$ ;

3. с помощью рекуррентного волнового алгоритма, на первом шаге которого вычисляются все элементы первой строки и первого столбца присоединенной матрицы  $\bar{A}^* = \| A_{zk}^{\vee} \|$ ,  $z = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а на втором – остальные элементы матрицы  $\bar{A}^*$  в направлении вычислений от левого верхнего к правому нижнему углу матрицы, причем на каждом шаге вычисляемый элемент  $A_{zk}^{\vee}$  матрицы  $\bar{A}^*$  принимается равным максимальному из элементов, стоящих слева от него и над ним, сложенному соответствующим элементом  $a_{zk}$  матрицы  $\bar{A}$ . Последний вычисляемый элемент  $A_{mn}^{\vee}$  равен искомому ЛО  $A^{\vee}$ .

Хотя для вычисления конъюнктивных ЛО  $A^{\wedge}$  существуют алгоритмы, подобные приведенным выше, на практике чаще всего применяется формула 12.

### 3. Методика системного проектирования последовательных систем

#### 3.1. Постановка задачи проектирования

Рассматривается система в виде  $m$  последовательно соединенных блоков для последовательного выполнения  $m$  различных операций. На вход системы поступает  $n$  различных

работ, каждая из которых состоит из  $m$  указанных операций. Работы запускаются в систему и проходят ее последовательные блоки  $1, 2, \dots, m$  в одном и том же порядке  $P_n = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ , где  $j_k$  – номер работы, следующей  $k$ -ой по порядку. Первый блок системы загружается для выполнения первой операции очередной работы сразу же после его освобождения от первой операции предыдущей работы, т.е. работает без простоев. Во всех остальных блоках простои возможны. Время выполнения в работе  $j$  ее  $i$ -ой операции равно  $a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Времена  $a_{ij}$  выполнения операций известны и образуют матрицу времен операций  $\bar{A} = \| a_{ij} \|$ . Считаем, что порядок прохождения работ через различные блоки один и тот же.

Задачей синтеза системы является выбор оптимального порядка следования работ через систему, при котором суммарное время выполнения всех работ минимально. Обозначим такой оптимальный порядок следования как  $P'_n = (j'_1, j'_2, \dots, j'_n)$ .

Таким образом, задача синтеза - нахождение перестановки, переводящей  $P_n$  в  $P'_n$ . Тогда задачей расчета и анализа синтезированной системы будет вычисление различных ее характеристик, перечисленных в п.2.1.

### 3.2. Методика расчёта и анализа последовательных систем

Расчет характеристик быстродействия системы выполняется по следующим формулам:

1. суммарное время  $T_0(m, n)$  прохождения всех  $n$  работ через все  $m$  блоков системы с однопрограммным режимом функционирования

$$T_0(m, n) = A^+; \quad (18)$$

2. суммарное время  $T_M(m, n)$  прохождения всех  $n$  работ через все  $m$  блоков системы с многопрограммным режимом

функционирования

$$T_M(m, n) = A^V; \quad (19)$$

3. абсолютное значение экономии суммарного времени благодаря многопрограммности режима функционирования системы

$$T_1(m, n) = T_0(m, n) - T_M(m, n) = A^+ - A^V; \quad (20)$$

4. относительное значение экономии суммарного времени благодаря многопрограммности режима функционирования системы

$$P_T = \frac{A^+}{A^V}; \quad (21)$$

5. скорость функционирования системы в однопрограммном режиме

$$v_0 = \frac{n}{T_0(m, n)} = \frac{n}{A^+}; \quad (22)$$

6. скорость функционирования системы в многопрограммном режиме

$$v_M = \frac{n}{T_M(m, n)} = \frac{n}{A^V}; \quad (23)$$

Анализ быстродействия системы заключается в определении зависимостей вышеуказанных характеристик быстродействия от величин элементов матрицы времен операций  $\bar{A}$  и проводится с использованием соотношений (4) – (12).

Расчет характеристик загрузки системы выполняется по следующим формулам:

1. средняя загрузка любого  $k$ -го блока за время  $T(m, n)$  прохождения  $n$  имеющихся работ через  $m$  блоков системы в однопрограммном режиме

$$R_{k,0} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{k,j}}{A^+}; \quad (24)$$

а в многопрограммном режиме

$$R_{k,M} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{k,j}}{A^\vee}; \quad (25)$$

2. мгновенная загрузка любого  $k$ -го блока в любой момент времени  $t$  для однопрограммного режима

$$z_{k,0}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{k-1} a_{i1}, \sum_{i=1}^k a_{i1} \right], \right. \\ \left. \left[ \sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i2}, \sum_{i=1}^m a_{i1} + \sum_{i=1}^k a_{i2} \right], \dots, \right. \\ \left. \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{in}, \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} + \sum_{i=1}^k a_{in} \right] \right\}, \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad (26)$$

3. мгновенная загрузка любого  $k$ -го блока в любой момент времени  $t$  для многопрограммного режима

$$z_{k,M}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \{ [t_{k1}^H, t_{k1}^b], [t_{k2}^H, t_{k2}^b], \dots, [t_{kn}^H, t_{kn}^b] \} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (27)$$

где  $t_{ps}^H$  и  $t_{ps}^b$  – элементы матриц  $\bar{T}_H = \bar{A}^* - \bar{A}$ ,  $\bar{T}_b = \bar{A}^*$ , соответственно;

$\bar{A}^*$  – матрица, присоединенная к матрице времен операций  $\bar{A}$ , вычисляемая с помощью алгоритма (см. п.2.2);

4. средняя загрузка системы в целом для однопрограммного режима

$$R_0 = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj}}{mT_0(m,n)}, \quad (28)$$

а для многопрограммного

$$R = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj}}{mT_M(m,n)}; \quad (29)$$

5. мгновенная загрузка системы в целом в любой момент времени  $t$  для однопрограммного режима

$$z_0(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m z_{k,0}(t), \quad (30)$$

а для многопрограммного

$$z_M(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m z_{k,M}(t). \quad (31)$$

Наглядно характеристики быстродействия и загрузки системы можно представить геометрически с помощью Гантт-карт [2]. Для этого каждой операции работы ставится в соответствие отрезок определенной длины, каждому блоку системы – прямая линия (ось времени), вдоль которой размещаются отрезки – операции работ, выполняемые на этом блоке.

### 3.3. Методика синтеза последовательных систем

Для синтеза последовательной системы, т.е. выбора оптимального порядка следования работ, в [1] указаны необходимые и достаточные условия оптимальности, базирующиеся на следующих определениях и теоремах.

**Определение 1.** Последовательность прохождения работ  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$  называется сильно разделимой, если перестановка в ней любой пары  $(i, j)$  соседних работ увеличивает или уменьшает момент окончания выполнения подпоследовательности работ  $P_{k+2}^{ij} = (i_1, \dots, i_k, i, j)$  во всех блоках  $q = \overline{2, m}$  вне зависимости от предшествующей этой паре подпоследовательности работ  $P_k = (i_1, \dots, i_k)$ .

**Определение 2.** Последовательность прохождения работ  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$  называется слабо разделимой, если перестановка в ней любой пары  $(i, j)$  соседних работ увеличивает или уменьшает момент окончания выполнения подпоследовательности работ  $P_{k+2}^{ij} = (i_1, \dots, i_k, i, j)$  хотя бы в

одном блоке  $q = \overline{2, m}$  вне зависимости от предшествующей этой паре подпоследовательности работ  $P_k = (i_1, \dots, i_k)$ .

**Теорема 1.** (достаточное условие оптимальности). Для того, чтобы последовательность  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$  прохождения  $n$  работ через  $m$  блоков системы была оптимальной и сильно разделимой, достаточно, чтобы у любой упорядоченной пары  $(i, j)$  соседних работ в этой последовательности времена операций удовлетворяли следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} A_{S,S+1}^\vee(i, j) \leq A_{S,S+1}^\vee(j, i), & s = \overline{1, m-1}, \\ A_{S,S+2}^\vee(i, j) \leq A_{S,S+2}^\vee(j, i), & s = \overline{1, m-2}, \\ A_{1m}^\vee(i, j) \leq A_{1m}^\vee(j, i). \end{cases} \quad (32)$$

где

$$A_{Sr}^\vee(i, j) = \begin{vmatrix} a_{si} & a_{sj} \\ a_{s+1,i} & a_{s+1,j} \\ \dots & \dots \\ a_{ri} & a_{rj} \end{vmatrix} \quad 1 \leq S \leq r \leq m. \quad (33)$$

**Теорема 2.** (необходимое условие оптимальности). Для того, чтобы последовательность  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$  прохождения  $n$  работ через  $m$  блоков системы была оптимальной и слабо разделимой, необходимо, чтобы у любой упорядоченной пары  $(i, j)$  соседних работ в этой последовательности времена операций удовлетворяли следующему объединению систем неравенств:

$$\begin{aligned} A_{12}^\vee(i, j) &\leq A_{12}^\vee(j, i), & \text{или} \\ A_{S3}^\vee(i, j) &\leq A_{S3}^\vee(j, i), & s = \overline{1, 2}, & \text{или} \\ A_{Sm}^\vee(i, j) &\leq A_{Sm}^\vee(j, i), & S = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $A_{Sr}^\vee(i, j)$  определяется согласно (33).

Процедуру синтеза последовательной системы с многопрограммным режимом функционирования можно разбить на три этапа.

**Этап 1.** С помощью ориентированного графа  $\Gamma_{\partial}$  приоритетов работ отыскивается множество  $\{P_n\}_{\partial}$  сильно разделимых последовательностей работ  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$ , удовлетворяющих достаточным условиям оптимальности (32). Для построения графа  $\Gamma_{\partial}$  во взаимно однозначное соответствие каждой работе  $i$  ставится некоторая вершина  $i'$ , а каждой упорядоченной паре работ  $(i, j)$ , удовлетворяющей (32), дуга из вершины  $i'$  в вершину  $j'$ . Условия (32) проверяются для всех возможных  $i \neq j$  пар  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . В графе  $\Gamma_{\partial}$  отыскиваются гамильтоновы пути, т.е. пути, включающие все вершины графа по одному разу. Если  $\{P_n\}_{\partial}$  не пусто, то любая последовательность работ  $\Gamma_{\partial}$  из  $\{P_n\}_{\partial}$  может быть принята за оптимальную. Если гамильтоновых путей в графе  $\Gamma_{\partial}$  не найдено, то выполняется этап 2.

**Этап 2.** С помощью ориентированного графа  $\Gamma_H$  приоритетов работ отыскивается множество  $\{P_n\}_H$  слабо разделимых последовательностей работ  $P_n = (i_1, \dots, i_k, i, j, \dots, i_n)$ , удовлетворяющих достаточным условиям оптимальности (34). Граф  $\Gamma_H$  строится аналогично графу  $\Gamma_{\partial}$  за исключением того, что пары работ  $(i, j)$  должны удовлетворять (34). В графе  $\Gamma_H$  отыскиваются все гамильтоновы пути, каждый из которых определяет некоторую последовательность работ, способную быть оптимальной. Для каждой из таких последовательностей согласно (19) вычисляется суммарное время с выполнения всех  $n$  работ последовательности системой. Последовательность с минимальным значением  $T_M(m, n)$  выбирается в качестве оптимальной. Если Гамильтоновых путей в графе не найдено, то выполняется этап 3.

**Этап 3.** В графе  $\Gamma_H$  выделяется простой (без повторений вершин) путь максимально возможной длины. Перебираются все возможные варианты дополнения этого пути до гамильтонова. Каждому такому гамильтонову пути соответствует своя последовательность выполнения работ  $P_H$ , для



которой по формуле (19) рассчитывается время  $T_M(m, n)$ . Оптимальной последовательности  $P'_n$  выполнения работ в заданной системе соответствует последовательность  $P_n$  с минимальным временем  $T_M(m, n)$ .

Рассмотрим алгоритмы алгебраического метода поиска гамильтоновых путей в ориентированном графе  $\Gamma$  с  $n$  вершинами. Для графа  $\Gamma$  строится  $n \times n$  матрица смежности  $\bar{S} = \|S_{ij}\|$ , где  $S_{ij} = 1$ , если из вершины  $i$  в вершину  $J$  направлена дуга, и  $S_{ij} = 0$  в противном случае. Строится модифицированная матрица смежности  $\bar{Q} \|q_{ij}\|$  графа  $\Gamma$ , которая получается из матрицы  $\bar{S}$  путем замены каждого  $S_{ij} = 1$  на  $q_{ij} = j$ .

По формуле

$$\bar{P}(1) = \bar{Q}\bar{S} \quad (35)$$

при  $k = 1$  вычисляется матрица  $\bar{P}(k) = \|P_{ij}(k)\|$ , в которой затем устанавливается  $P_{ii}(k) = 0$  для  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n-2}$  и всем элементам  $P_{ij}(k)$ , содержащим сложные (с повторением вершин) пути, присваивается нулевое значение. Каждый элемент  $P_{ij}(k)$  для  $k-1$  вычисляется путем обычного умножения строк матрицы  $\bar{Q}$  на столбцы матрицы  $\bar{S}$ , причем вместо сложения частичных произведений эти частичные произведения в  $P_{ij}(k)$  перечисляются через запятую. Сложные пути образуются, когда какое-либо частное произведение в  $P_{ij}(k)$  содержит в качестве составляющей вершину  $i$ . По формуле

$$\bar{P}(k+1) = \bar{Q}\bar{P}_k \quad (36)$$

для  $k = \overline{1, n-3}$  рекуррентно вычисляются матрицы  $\bar{P}(k+1)$ , причем в матрице  $\bar{P}(k)$  правой части формулы (36) предварительно должно быть проведено необходимое обнуление элементов как описано выше. Здесь вычисление  $P_{ij}(k+1)$  выполняется путем приписывания слева номера вершины, расположенного в соответствующем элементе матрицы  $\bar{Q}$ , к каждому из перечисленных через запятую частичных про-

изведений (простых путей), расположенных в соответствующем элементе матрицы  $\bar{P}_k$ . Каждый простой путь в  $P_{ij}(n-2)$  матрицы  $\bar{P}(n-2)$ , дополненный в начале вершиной  $i$ , а в конце вершиной  $j$ , дает один гамильтонов путь в  $\Gamma$  из  $i$  в  $j$ .

#### 4. Исходные данные

Индивидуальное задание к практической работе представляет собой  $m \times n$  матрицу времен операций

$$\bar{A} = \|a_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad 1 \leq S \leq r \leq m. \quad (37)$$

где размерность элементов матрицы задается в условных единицах времени. Варианты заданий студент получает у преподавателя.

#### 5. Порядок выполнения работы

5.1. Синтезировать систему по заданной матрице  $\bar{A}$ , пользуясь методикой п.3.3.

5.2. Переупорядочить столбцы матрицы  $\bar{A}$  в соответствии с найденным оптимальным порядком выполнения работ.

5.3. Выполнить расчет характеристик быстродействия системы по формулам (18)- (23).

5.4. Считая, что все времена выполнения операций  $a_{ij}$  в  $\bar{A}$  увеличиваются на  $C$  единиц, получить зависимости характеристик (18) - (23) от величины  $C$ .

5.5. Выполнить расчет характеристик загрузки системы по формулам (24) - (31).

5.6. Оформить отчет.

## 6. Содержание отчета

6.1. Цель работы.

6.2. Исходные данные для решения задачи.

6.3. Процедура синтеза системы.

6.3.1. Результаты вычислений на каждом этапе синтеза с необходимыми пояснениями.

6.3.2. Изображение графа приоритетов работ.

6.3.3. Расчеты, связанные с поиском гамильтоновых путей в графе.

6.4. Расчет характеристик быстродействия системы для переупорядоченной матрицы  $\bar{A}$ .

6.5. Аналитические выражения и графики зависимостей характеристик быстродействия системы от величины  $C$ .

6.6. Расчет характеристик загрузки системы.

6.7. Гантт-карты для однопрограммного и многопрограммного режимов работы системы.

6.8. Выводы по результатам работы.

## 7. Пример выполнения работы

Пусть матрица  $m \times n$  времен операций задана в виде

$$\bar{A} = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \quad m = 4, \quad n = 5.$$

Решим задачу синтеза последовательной системы, для чего исследуем исходную последовательность работ

$P_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$  с целью нахождения оптимальной. По выражения (33) предварительно вычислим, например, с помощью волнового алгоритма, все требуемые в процедуре синтеза значения  $A_{sr}^{\vee}(ij)$  для  $1 \leq s \leq r \leq 4$ , и сведем полученные результаты в таблицу 1.

Проверяя систему неравенств (32), убеждаемся, что множество  $\{P_n\}_\partial$  пусто, т.к. ни одна пара не удовлетворяет (32). Например, для  $i = 1, j = 2$  имеем  $A_{23}^{\vee}(1, 2) > A_{23}^{\vee}(2, 1)$ ; для  $i = 1, j = 4$  получается  $A_{24}^{\vee}(1, 4) > A_{24}^{\vee}(4, 1)$  и т.д. Таким образом, граф  $\Gamma_\partial$  является вырожденным, не имеющим гамильтоновых путей. Решение задачи не получено, поэтому переходим ко второму этапу синтеза.

Проверяем неравенства (34) для каждой пары работ  $(i, j)$ . Результаты проверки сведем в таблицу 2, где знак  $\sim$  в неравенствах заменяется на  $<, >$  или  $=$ .

Согласно (34) в графе  $\Gamma_H$  проводится дуга от вершины  $i$  к вершине  $j$ , если удовлетворяется хотя бы одна из систем неравенств №1 – №3. По результатам расчетов, как видно из табл. 2, имеем дуги:  $1 \rightarrow 2$ , т.к. для  $i = 1$  и  $j = 2$  удовлетворяются №1 и №3;  $1 \rightarrow 3$ : №1 и №3;  $1 \rightarrow 4$ : №1;  $1 \rightarrow 5$ : №1 и №2;  $2 \rightarrow 3$ : №1 и №3;  $2 \rightarrow 4$ : №1;  $2 \rightarrow 5$ : №1 и №2;  $3 \rightarrow 4$ : №1;  $3 \rightarrow 5$ : №1 и №2;  $4 \rightarrow 5$ : №1 и №2. Для проверки существования обратно направленных дуг меняем местами значения  $i$  и  $j$  и вновь обратимся к табл.2. Получим дуги  $4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 3$  и  $5 \rightarrow 4$  т.к. в этом случае будет удовлетворяться система неравенств №3. Построенный граф  $\Gamma_H$  приоритетов работ представлен на рис. 1.

Будем искать гамильтоновы пути в графе  $\Gamma_H$  алгебраическим методом согласно методике п.3.3. Матрица  $\bar{S}$  и ее модификация  $\bar{Q}$ :



$$\bar{P}(2) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2,4,5 & 2,3,5 & 2,3,4 \\ 0 & 0 & 4,5 & 3,5 & 3,4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 24,25,54 & 23,25,35,53 & 23,24,34,43 \\ 0 & 0 & 45,54 & 35,53 & 34,43 \\ 0 & 0 & 45,54 & 53 & 43 \\ 0 & 0 & 54 & 35,53 & 34 \\ 0 & 0 & 45 & 35 & 34,43 \end{vmatrix}$$

Исключая диагональные элементы и сложные пути в  $\bar{P}(2)$ , вычисляем  $\bar{P}(3)$ :

$$\bar{P}(3) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 24,25,45,54 & 23,25,35,53 & 23,24,34,43 \\ 0 & 0 & 45,54 & 35,53 & 34,43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 245,254 & 235,253 & 234,243 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Процедура вычисления закончена, т.к. получена матрица  $\bar{P}(n-2) = \bar{P}(3)$  всех простых путей графа  $\Gamma_H$  длины  $n-2=3$ . Каждый простой путь в  $\bar{P}(3 = \|p_{ij}(3)\|)$  дополняем в начале вершиной  $i$ , а в конце вершиной  $j$ , получая при этом

все гамильтоновы пути графа: 12453, 12543, 12354, 12534, 12345, 12435. Итак, получено шесть последовательностей выполнения работ:  $P_{51} = (1, 2, 4, 5, 3)$ ,  $P_{52} = (1, 2, 5, 4, 3)$ ,  $P_{53} = (1, 2, 3, 5, 4)$ ,  $P_{54} = (1, 2, 5, 3, 4)$ ,  $P_{55} = (1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $P_{51} = (1, 2, 4, 3, 5)$ . Для каждой из этих последовательностей соответствующим образом переупорядочиваем столбцы исходной матрицы  $\bar{A}$  времен операций и по формуле (19) рассчитываем времена  $T_{Mk}(m, n)$ ,  $k = \overline{1, 6}$ . Результаты вычислений сводим в таблицу 3.

Так как все времена  $T_{Mk}(m, n)$ , вычисленные с помощью волнового алгоритма, равны, любую из выделенных последовательностей можно принять за оптимальную. Причем в качестве оптимальной последовательность работ  $P_{51}$ , матрица  $\bar{A}$  времен операций которой будет использоваться во всех дальнейших расчетах в качестве исходной в виде  $\bar{A} = \|a_{ij}\|$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $j = \overline{1, 5}$ .

Характеристики быстродействия синтезированной системы рассчитываем по методике, изложенной в п.3.2. Суммарное время прохождения всех работ через систему в многопрограммном режиме определено выше и равно  $T_M(4, 5) = 40$ . Для однопрограммного режима по (18),

Таблица 1

Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
1	2	3	4	5	6
$\left  \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 11 & 17 \end{array} \right\ $	$A_{12}^{\vee}(1,2) = 17$	$\left  \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 6 & 9 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 10 & 19 \end{array} \right\ $	$A_{12}^{\vee}(2,1) = 19$
$\left  \begin{array}{cc} 9 & 6 \\ 2 & 3 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 9 & 15 \\ 11 & 18 \end{array} \right\ $	$A_{23}^{\vee}(1,2) = 18$	$\left  \begin{array}{cc} 6 & 9 \\ 3 & 2 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 6 & 9 \\ 15 & 17 \end{array} \right\ $	$A_{23}^{\vee}(2,1) = 17$
$\left  \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 8 & 13 \end{array} \right\ $	$A_{34}^{\vee}(1,2) = 13$	$\left  \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 8 & 14 \end{array} \right\ $	$A_{34}^{\vee}(2,1) = 14$

Продолжение на следующей странице

Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 17 \\ 13 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(1,2) = 20$	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 19 \\ 13 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(2,1) = 21$
$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 11 & 18 \\ 17 & 23 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(1,2) = 23$	$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 15 \\ 9 & 17 \\ 11 & 23 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(2,1) = 23$
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 17 \\ 13 & 20 \\ 19 & 25 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(1,2) = 25$	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 19 \\ 13 & 21 \\ 18 & 27 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(2,1) = 27$
$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 11 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(1,3) = 14$	$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(3,1) = 19$
$\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 11 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(1,3) = 18$	$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(3,1) = 14$
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(1,3) = 10$	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(3,1) = 12$
$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 11 & 14 \\ 13 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(1,3) = 18$	$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 19 \\ 14 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(3,1) = 21$
$\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 11 & 16 \\ 17 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(1,3) = 19$	$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 7 & 14 \\ 9 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(3,1) = 20$
$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 11 & 14 \\ 13 & 18 \\ 19 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(1,3) = 21$	$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 9 \\ 4 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 19 \\ 14 & 21 \\ 16 & 27 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(3,1) = 27$
$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(1,4) = 14$	$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(4,1) = 19$
$\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(1,4) = 14$	$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(4,1) = 13$
$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(1,4) = 12$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(4,1) = 13$
$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 11 & 13 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(1,4) = 16$	$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 19 \\ 13 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(4,1) = 21$

Продолжение на следующей странице



Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
$\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 11 & 14 \\ 17 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(1,4) = 21$	$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 5 & 13 \\ 9 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(4,1) = 19$
$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 11 & 13 \\ 13 & 16 \\ 19 & 23 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(1,3) = 21$	$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 19 \\ 13 & 21 \\ 17 & 27 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(4,1) = 27$
$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 11 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(1,5) = 13$	$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(5,1) = 21$
$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(1,5) = 12$	$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(5,1) = 12$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 15 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(1,5) = 15$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(5,1) = 14$
$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 9 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 11 & 13 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(1,5) = 14$	$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 21 \\ 12 & 23 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(5,1) = 23$
$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \\ 17 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(1,5) = 24$	$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 12 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(5,1) = 18$
$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 9 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 11 & 13 \\ 13 & 14 \\ 19 & 26 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(1,5) = 26$	$\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 9 \\ 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 11 & 21 \\ 12 & 23 \\ 19 & 29 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(5,1) = 29$
$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(2,3) = 14$	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 17 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(3,2) = 17$
$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(2,3) = 18$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(3,2) = 12$
$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(2,3) = 10$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(3,2) = 12$
$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 14 \\ 13 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(2,3) = 18$	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 17 \\ 14 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(3,2) = 20$
$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 13 \\ 14 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(2,3) = 16$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 12 \\ 9 & 17 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(3,2) = 17$

Продолжение на следующей странице

Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 14 \\ 13 & 18 \\ 18 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(2,3) = 20$	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 17 \\ 14 & 20 \\ 16 & 25 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(3,2) = 25$
$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(2,4) = 14$	$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(4,2) = 18$
$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(2,4) = 12$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 11 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(4,2) = 11$
$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(2,4) = 12$	$\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(4,2) = 12$
$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 14 \\ 13 & 17 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(2,4) = 17$	$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 18 \\ 13 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(4,2) = 21$
$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \\ 14 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(2,4) = 18$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 11 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(4,2) = 16$
$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 14 \\ 13 & 17 \\ 18 & 22 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(2,4) = 22$	$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 18 \\ 13 & 21 \\ 17 & 26 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(4,2) = 26$
$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 10 & 15 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(2,5) = 15$	$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(5,2) = 20$
$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(2,5) = 10$	$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(5,2) = 10$
$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 15 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(2,5) = 15$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(5,2) = 13$
$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 10 & 15 \\ 13 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(2,5) = 16$	$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 20 \\ 12 & 23 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(5,2) = 23$
$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \\ 14 & 21 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(2,5) = 21$	$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 10 \\ 9 & 15 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(5,2) = 15$
$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ 10 & 15 \\ 13 & 16 \\ 18 & 25 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(2,5) = 25$	$\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 11 & 20 \\ 12 & 23 \\ 19 & 28 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(5,2) = 28$

Продолжение на следующей странице

Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 17 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(3,4) = 17$	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(4,3) = 18$
$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(3,4) = 10$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(4,3) = 9$
$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(3,4) = 11$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(4,3) = 9$
$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 17 \\ 14 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(3,4) = 20$	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 18 \\ 13 & 22 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(4,3) = 22$
$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \\ 9 & 14 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(3,4) = 14$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(4,3) = 11$
$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 17 \\ 14 & 20 \\ 16 & 24 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(3,4) = 24$	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 15 \\ 10 & 18 \\ 13 & 22 \\ 17 & 24 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(4,3) = 24$
$\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 10 & 18 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(3,5) = 18$	$\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(5,3) = 20$
$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(3,5) = 8$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(5,3) = 8$
$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(3,5) = 13$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$	$A_{34}^{\vee}(5,3) = 10$
$\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 10 & 18 \\ 14 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(3,5) = 19$	$\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 3 \\ 13 & 4 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 11 & 20 \\ 12 & 24 \end{vmatrix}$	$A_{13}^{\vee}(5,3) = 24$
$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(3,5) = 16$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$	$A_{24}^{\vee}(5,3) = 11$
$\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 10 & 18 \\ 14 & 19 \\ 16 & 26 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(3,5) = 26$	$\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 17 \\ 11 & 20 \\ 12 & 24 \\ 19 & 26 \end{vmatrix}$	$A_{14}^{\vee}(5,2) = 26$
$\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 8 & 18 \\ 10 & 19 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(4,5) = 19$	$\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 10 & 18 \\ 11 & 20 \end{vmatrix}$	$A_{12}^{\vee}(5,4) = 20$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(4,5) = 12$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}^{\vee}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$	$A_{23}^{\vee}(5,4) = 6$

Продолжение на следующей странице

Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Дизъюнктивный ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Присоединенная матрица $\bar{A}_{sr}^*(ij)$	Значение ЛО $A_{sr}^{\vee}(ij)$
$\left  \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 7 & 14 \end{array} \right\ $	$A_{34}^{\vee}(4,5) = 14$	$\left  \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 8 & 12 \end{array} \right\ $	$A_{34}^{\vee}(5,4) = 12$
$\left  \begin{array}{cc} 8 & 10 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 8 & 18 \\ 10 & 19 \\ 13 & 20 \end{array} \right\ $	$A_{13}^{\vee}(4,5) = 20$	$\left  \begin{array}{cc} 10 & 8 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 10 & 18 \\ 11 & 20 \\ 12 & 23 \end{array} \right\ $	$A_{13}^{\vee}(5,4) = 23$
$\left  \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 9 & 16 \end{array} \right\ $	$A_{24}^{\vee}(4,5) = 16$	$\left  \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 9 & 13 \end{array} \right\ $	$A_{24}^{\vee}(5,4) = 13$
$\left  \begin{array}{cc} 8 & 10 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 8 & 18 \\ 10 & 19 \\ 13 & 20 \\ 17 & 27 \end{array} \right\ $	$A_{14}^{\vee}(4,5) = 22$	$\left  \begin{array}{cc} 10 & 8 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{array} \right ^{\vee}$	$\left\  \begin{array}{cc} 10 & 18 \\ 11 & 20 \\ 12 & 23 \\ 19 & 27 \end{array} \right\ $	$A_{14}^{\vee}(5,4) = 27$

Таблица 2

Система неравенств	Неравенства	Пара работ (i, j)									
		(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(4,5)
№1	$A_{12}^{\vee}(i, j) \sim A_{12}^{\vee}(j, i)$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<
№2	$A_{13}^{\vee}(i, j) \sim A_{13}^{\vee}(j, i)$	<	<	<	<	<	<	<	<	<	<
	$A_{23}^{\vee}(i, j) \sim A_{23}^{\vee}(j, i)$	>	>	>	=	>	>	=	>	=	=
№3	$A_{14}^{\vee}(i, j) \sim A_{14}^{\vee}(j, i)$	<	<	<	<	<	<	<	=	=	=
	$A_{24}^{\vee}(i, j) \sim A_{24}^{\vee}(j, i)$	=	<	>	>	<	>	>	>	>	>
	$A_{34}^{\vee}(i, j) \sim A_{34}^{\vee}(j, i)$	<	<	<	>	<	=	>	>	>	>

Таблица 3

Последовательность работ $P_{5k}$ $A_{sr}^{\vee}(ij)$	Матрица $\bar{A}$ для $P_{5k}$	Присоединенная матрица $\bar{A}^*$ для $P_{5k}$	$T_{Mk}(m, n) = A^{\vee}$
1	2	3	4
$P_{51}$	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 8 & 10 & 7 \\ 9 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 2 \end{array} \right\ $	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 14 & 24 & 31 \\ 11 & 17 & 19 & 25 & 34 \\ 13 & 20 & 23 & 26 & 38 \\ 19 & 25 & 29 & 36 & 40 \end{array} \right\ $	$T_{M1}(4,5) = 40$
$P_{52}$	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 10 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{array} \right\ $	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 16 & 24 & 31 \\ 11 & 17 & 18 & 25 & 34 \\ 13 & 20 & 21 & 26 & 38 \\ 19 & 25 & 32 & 36 & 40 \end{array} \right\ $	$T_{M2}(4,5) = 40$
$P_{53}$	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 7 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 4 \end{array} \right\ $	$\left\  \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 13 & 23 & 31 \\ 11 & 17 & 20 & 24 & 33 \\ 13 & 20 & 24 & 25 & 36 \\ 19 & 25 & 27 & 34 & 40 \end{array} \right\ $	$T_{M3}(4,5) = 40$

$P_{54}$	2 4 10 7 8 9 6 1 3 2 2 3 1 4 3 6 5 7 2 4	2 6 16 23 31 11 17 18 26 33 13 20 21 30 36 19 25 32 34 40	$T_{M4}(4, 5) = 40$
$P_{55}$	2 4 7 8 10 9 6 3 2 1 2 3 4 3 1 6 5 2 4 7	2 6 13 21 31 11 17 20 23 32 13 20 24 27 33 19 25 27 31 40	$T_{M5}(4, 5) = 40$
$P_{56}$	2 4 8 7 10 9 6 2 3 1 2 3 3 4 1 6 5 4 2 7	2 6 14 21 31 11 17 19 24 32 13 20 23 28 33 19 25 29 31 40	$T_{M6}(4, 5) = 40$

(6) вычисляем  $T_0(4, 5) = 89$ . Абсолютное значение экономии суммарного времени согласно (22) равно  $T_1(4, 5) = 49$ . Относительное значение экономии по (23)  $R_T = 2,225$ . Скорости функционирования системы, определяемые (24) и (25), равны соответственно  $v_0 = 0,056$  и  $v_M = 0,125$ .

Проведем анализ быстродействия системы в зависимости от изменения времени. Используя отношения (7) и (9), получим аналитические зависимости:

$$T_0(4, 5) = f_1(c) = 89 + 20c;$$

$$T_M(4, 5) = f_2(c) = 40 + 8c;$$

$$T_I(4, 5) = f_3(c) = 49 + 12c;$$

$$P_T = f_4(c) = \frac{89 + 20c}{40 + 8c} = 2 + \frac{9 + 4c}{40 + 8c}, \lim_{c \rightarrow \infty} P_T = 2,5$$

$$v_0 = f_5(c) = \frac{5}{89 + 20c};$$

$$v_M = f_6(c) = \frac{5}{40 + 8c}.$$

Графики зависимостей приведены на рисунках 2, 3 и 4.

Характеристики загрузки системы рассчитываем согласно методики п.3.2. Среднюю загрузку  $R_{k,0}$  и  $R_{k,M}$  блока  $k$  определяем по формулам (24) и (27):

$$R_{1,0} = 0,348; \quad R_{2,0} = 0,236 \quad R_{3,0} = 0,146 \quad R_{4,0} = 0,270;$$

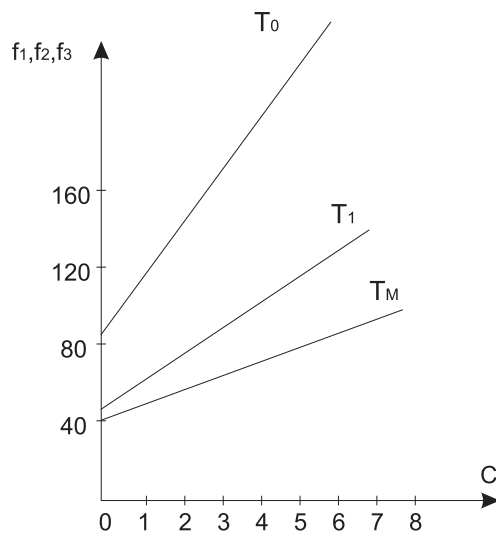


Рисунок 2 – Характеристики быстродействия синтезируемой системы

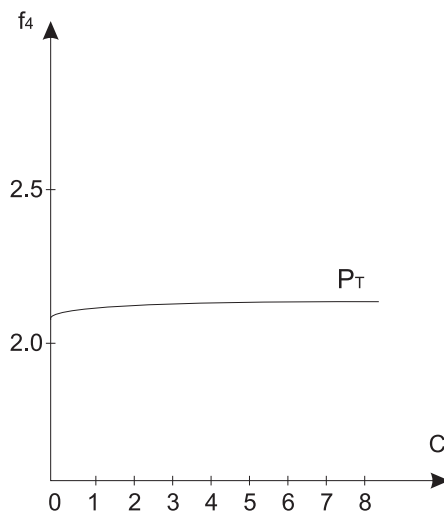


Рисунок 3 – Экономия суммарного времени благодаря многопрограммности

$$R_{1,M} = 0,775; \quad R_{2,M} = 0,525 \quad R_{3,M} = 0,325$$

$$R_{4,M} = 0,600;$$

Мгновенную загрузку  $r_{1,0}(t)$  блока  $k$  в момент времени  $t$  для однопрограммного режима определяем по выражению (28):

$$r_{1,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \{[0, 2], [19, 23], [37, 45], [54, 64], [73, 80]\} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

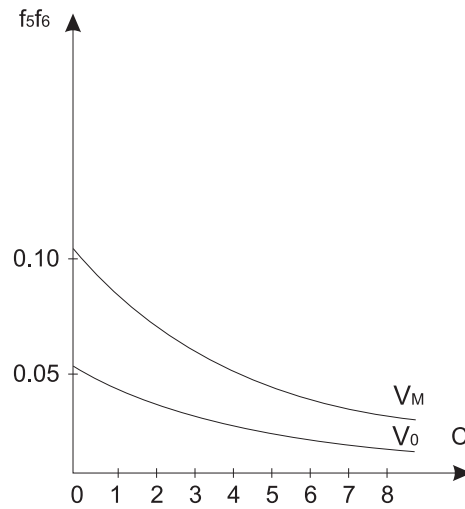


Рисунок 4 – Скорость функционирования системы в однопрограммном и многопрограммном режимах

$$r_{2,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \{[2, 11], [23, 29], [45, 47], [64, 65], [80, 83]\} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$r_{3,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \{[11, 13], [29, 32], [47, 50], [65, 66], [83, 87]\} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$r_{4,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \{[13, 19], [32, 37], [50, 54], [66, 73], [87, 89]\} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Для определения мгновенной загрузки  $r_{k,m}(t)$  блока  $k$  в момент времени  $t$  в случае многопрограммного режима предварительно вычисляем матрицы  $\bar{T}_H$  и  $\bar{T}_B$ :

$$\bar{T}_B = \|t_{ij}^B\| = \bar{A}^* = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 14 & 24 & 31 \\ 11 & 17 & 19 & 25 & 34 \\ 13 & 20 & 23 & 26 & 38 \\ 19 & 25 & 29 & 36 & 40 \end{vmatrix}$$

$$\bar{T}_H = \|t_{ij}^H\| = \bar{A}^* - \bar{A} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 & 14 & 24 \\ 2 & 11 & 17 & 24 & 31 \\ 11 & 17 & 20 & 25 & 34 \\ 13 & 20 & 25 & 29 & 38 \end{vmatrix}$$

Тогда значения  $r_{1,M}(t)$ ,  $k = \overline{1,4}$  определяется по формуле (29):

$$r_{1,M}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \{[0, 2], [2, 6], [6, 14], [14, 24], [24, 31]\} = \\ = \{[0, 31]\} \\ 0, \text{ если } t \in \{(31, 40)\} \end{cases}$$

$$r_{2,M}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \{[2, 11], [11, 17], [17, 19], [24, 25], \\ [31, 34]\} = \{[2, 19], [24, 25], [31, 34]\} \\ 0, \text{ если } t \in \{[0, 2), (19, 24), (25, 31), (34, 40)\} \end{cases}$$

$$r_{3,M}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \{[11, 13], [17, 20], [20, 23], [25, 26], \\ [34, 38]\} = \{[11, 13], [17, 23], [25, 26], [34, 38]\} \\ 0, \text{ если } t \in \{[0, 11), (13, 17), (23, 25), (26, 34), (38, 40)\} \end{cases}$$

$$r_{4,M}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \{[13, 19], [20, 25], [25, 29], [29, 36], \\ [38, 40]\} = \{[13, 19], [20, 36], [38, 40]\} \\ 0, \text{ если } t \in \{[0, 13), (19, 20), (36, 38)\} \end{cases}$$

Среднюю загрузку для системы в целом определяем согласно (30) и (31):

$$R_0 = 0,250; R_M = 0,556.$$

Можно доказать, что мгновенная загрузка системы в целом для однопрограммного режима, определяемая формулой (32), равна соответствующей средней загрузке:  $r_0(t) = R_0 = 0,250$ .

Мгновенную загрузку системы в целом для многопрограммного режима, рассчитываем согласно (33). Для удобства расчета по вычисленным значениям  $r_{k,m}(t)$  строится Гантт-карта многопрограммного режима, изображенная на рис. 5. Гантт-карта однопрограммного режима показана на рис. 6. Тогда получаем

$$r_M(t) = \begin{cases} 1,00, & 17 \leq t \leq 19; \\ 0,75, & 11 \leq t < 17, \quad 20 < t < 23, \quad 24 < t < 26; \\ 0,50, & 2 \leq t < 11, \quad 19 < t < 20, \quad 23 < t < 24, \quad 26 < t < 36; \\ 0,25, & 0 \leq t < 2, \quad 36 < t \leq 40. \end{cases}$$



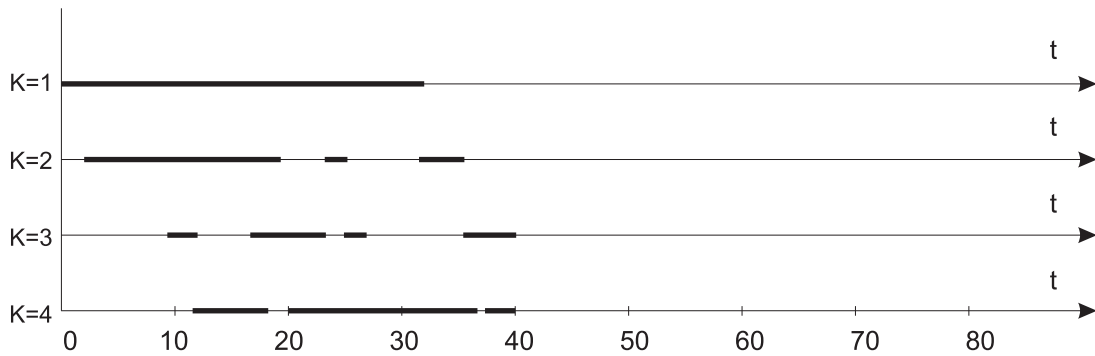


Рисунок 5 – Гантт-карта многопрограммного режима

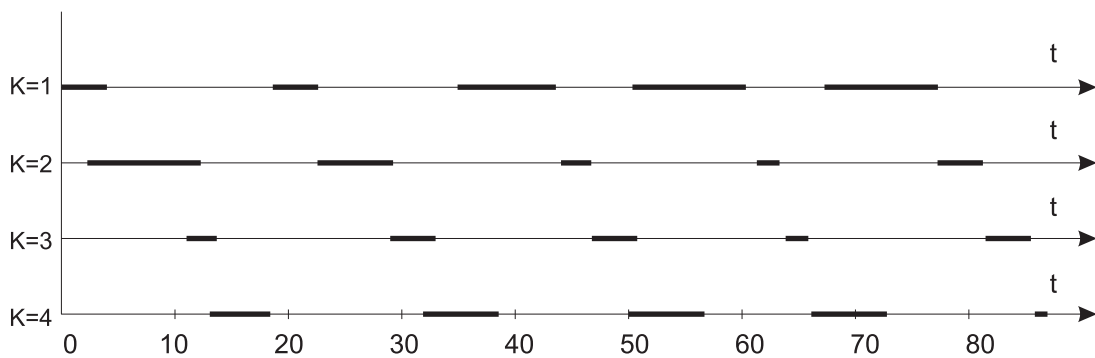


Рисунок 6 – Гантт-карта однопрограммного режима

## 8. Содержание отчета

1. Формулировка задания.
2. Определение возможных значений начального состояния системы.
3. Результаты детерминированного анализа: определение возможных переходов, вычисление условий перехода в устойчивое состояние.
4. Результаты вероятностного анализа.

## 9. Литература

1. Карпенко, А.С. Развитие многозначной логики [Текст] / А.С. Карпенко. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 448 с.
2. Поляков, В.И., Скорубский, В.И. Использование многозначной логики при проектировании функциональных схем [Текст] // Известия вузов. Приборостроение. СПб.: Издательство СПбГУ ИТМО. 2014. Т.57. №4. С. 57 – 60.