МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_14_» _12_________ 2021 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 18.03.01 Химическая технология, направленность (профиль) «Химико-технологическое производство»

Курск 2021

УДК 51

Составитель: Жилина К.В.

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Е.В.Скрипкина*

Высшая математика: методические рекомендации к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» 18.03.01 Химическая технология, направленность (профиль) «Химико-технологическое производство» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: К.В.Жилина – Курск, 2021. – 23с.

Изложены методические рекомендации по выполнению практических заданий студентов. Содержаться краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и разбор заданий по дисциплине «Высшая математика».

Материал предназначен для студентов направления подготовки 18.03.01 Химическая технология, направленность (профиль) «Химико-технологическое производство»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 1654 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель практических работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

1. Тема «Элементы линейной алгебры».

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

Решение:

Матрица A имеет размер 2x3, матрица B имеет размер 2x3, матрица C имеет размер 3x2, матрица D имеет размер 3x1, матрица F имеет размер 1x3.

$A+B$ может быть найдена, так как матрицы A и B имеют одинаковый размер:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для A и B.

$A\cdot B$ и $B\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 2x3 и 2x3).

$A\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2x$\underline{3}$ и $\underline{3}$x2), полученная матрица будет иметь размер 2x2:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 5+(-2)\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 5+1\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

$C\cdot A$ можно найти (размерности матриц 3x$\underline{2}$ и $\underline{2}$x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5\cdot1+3\cdot0 & 5\cdot(-2)+3\cdot1 & 5\cdot3+3\cdot4 \\ 2\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot(-2)+0\cdot1 & 2\cdot3+0\cdot4 \\ -1\cdot1+1\cdot0 & -1\cdot(-2)+1\cdot1 & -1\cdot3+1\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 27 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A\cdot D$ можно найти (размерности матриц 2х$\underline{3}$ и $\underline{3}$х1), полученная матрица будет иметь размер 2х1:

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+6+12 & 0-3+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 13 \end{pmatrix}.$$

$D\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 3х1 и 2х3).

$A\cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 2х3 и 1х3).

$F\cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 1х3 и 2х3).

$B\cdot C$ можно найти (размерности матриц 2х$\underline{3}$ и $\underline{3}$х2),

полученная матрица будет иметь размер 2х2:

$$B\cdot C=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-6-2 & 9-0+2 \\ 5-2+2 & 3-0-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$C\cdot B$ можно найти (размерности матриц 3х$\underline{2}$ и $\underline{2}$х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$C\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 15+3 & -15-3 & 10-6 \\ 6+0 & -6+0 & 4-0 \\ -3+1 & 3-1 & -2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & -18 & 4 \\ 6 & -6 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$B\cdot D$ можно найти (размер матриц 2х$\underline{3}$ и $\underline{3}$х1), полученная матрица будет иметь размер 2х1:

$$B\cdot D=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+9+8 & 2+3-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & -3 \end{pmatrix}.$$

$D\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 3х1 и 2х3).

$B\cdot F$ нельзя найти (размер матриц 2х3 и 1х3).

$F\cdot B$ нельзя найти (размер матриц 1х3 и 2х3).

$C \cdot D$ нельзя найти (размер матриц 3х2 и 3х1).

$D \cdot C$ нельзя найти (размерности матриц 3х1 и 3х2).

$C \cdot F$ нельзя найти (размер матриц 3х2 и 1х3).

$F \cdot C$ можно найти (размер матриц 1х$\underline{3}$ и $\underline{3}$х2), полученная матрица будет иметь размер 1х2:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$D \cdot F$ можно найти (размер матриц 3х$\underline{1}$ и $\underline{1}$х3), полученная матрица будет иметь размер 3х3:

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -9 & 3 & 18 \\ 12 & -4 & -24 \end{pmatrix}.$$

$F \cdot D$ можно найти (размер матриц 1х3 и 3х1), полученная матрица будет иметь размер 1х1:

$$F \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 3 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}.$$

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Метод Крамера

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы, а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1,2,...,n$.

Решить СЛУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём A^{-1}.

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15$.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3$; $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30$; $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5$; $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10$;

3. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим X: $X = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.
5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 4 & -5 & -7\\ 6 & -7 & 8 & 16\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 4 & -5 & -7\\ 0 & 5 & -10 & -20\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 4 & -5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & -4\end{pmatrix}$$

$3стр - 6\cdot 1стр$ $\qquad$ $3стр : 5$ $\qquad$ $2стр \leftrightarrow 3стр$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 4 & -5 & -7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 3 & 9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$3стр - 4\cdot 2стр$ $\qquad$ $3стр : 3$

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$1стр - 3\cdot 3стр$ $\qquad$ $1стр + 2\cdot 2стр$

$1стр + 2\cdot 3стр$

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases} x_1 = 1;\\ x_2 = 2;\\ x_3 = 3.\end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра»

Даны точки $A(-1-P_7; P_5-2)$ и $B(P_5-2; P_5+4)$. Найти:

а) точку $C(x_1; y_1)$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_2; y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\dfrac{P_9+1}{9-P_9}$.

Решение:

Пусть $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_9 = 2$. Значит $A(-4;-1)$, $B(-1;5)$.

а) $x_1 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-4-1}{2} = -2{,}5$;

$y_1 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$. Получили $C(-2{,}5;2)$.

б) Если $\lambda = \dfrac{P_9+1}{9-P_9} = \dfrac{3}{8}$, то $x_2 = \dfrac{x_A + \lambda\cdot x_B}{1+\lambda} = \dfrac{-4+\frac{3}{8}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{8}} = -\dfrac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8}\cdot 5}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{7}{11}$$. Получили $D\left(-\frac{35}{11}; \frac{7}{8}\right)$

3. Тема «Аналитическая геометрия»

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2); P_3^{\,2}+3P_3+4; P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение:

Пусть $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_8 = 5$.

Точки A, B, C образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}.$$

$\vec i \qquad \vec j \qquad \vec k$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (1+1;2+2;0-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4+1;14+2;-1-2)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec i - 4\vec j - 12\vec k$$, следовательно точки A, B, C образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{20^2+(-4)^2+12^2} = 4\sqrt{35}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

4. Тема «Введение в математический анализ»

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решение:

Имеем дело с неопределенностью вида (1^{∞}). Такую неопределенность можно раскрыть по нижеследующей схеме:

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\right)^{v(x)}=(1^{\infty})=e^{p},$$

где $p=\lim\limits_{x\to a}\left(u(x)-1\right)\cdot v(x)$ − вспомогательный предел.

В нашей задаче $p=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

(Мы воспользовались 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$).

В итоге искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Определить, какого рода разрыв имеет функция в точке *a*

$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$, a=1.

Решение: Выделим целую часть $f(x)=\dfrac{2(x-1)+7}{x-1}=2+\dfrac{7}{x-1}$.

Если $x\to 1-0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=-\infty$. Если $x\to 1+0$, то $\dfrac{7}{x-1}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2+\dfrac{7}{x-1}\right)=+\infty$.

Таким образом, функция при $x\to 1$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода.

5. Тема «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Найдите производную функции $y = \ln^2(\arcsin 2x)$.

Решение: Действуем по цепному правилу: на каждом шаге дифференцируем текущую внешнюю функцию:

$$y' = 2\ln(\arcsin 2x)\cdot(\ln(\arcsin 2x))' = 2\ln(\arcsin 2x)\cdot\frac{1}{(\arcsin 2x)}\cdot(\arcsin 2x)' =$$

$$= \frac{2\ln(\arcsin 2x)}{\arcsin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)' = \frac{4\ln(\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x}.$$

Найти асимптоты линии $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-4}$

Решение: Знаменатель дроби обращается в нуль в точках $y' = 0: x^2 - 4 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 2$. Проверим, будут ли вертикальные прямые $x = -2,\ x = 2$ асимптотами:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to -2+0}\frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty,\ \lim_{x\to 2-0}\frac{x^3+2}{x^2-4} = -\infty,\ \lim_{x\to 2+0}\frac{x^3+2}{x^2-4} = +\infty.$$

Таким образом, прямые $x = -2,\ x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

Найдем наклонные асимптоты:

$y = kx + b,$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{4}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^2-4} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2-x^3+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y = x$.

6. Тема « Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: 1) Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Таким образом, получили две точки, «подозрительные» на экстремум:
$P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$.

2) Вычислим вторые производные данной функции:
$z''_{x^2} = 6x$, $z''_{y^2} = 6y$, $z''_{xy} = -3$.

Найдем значения этих производных в точках $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$:

а) $P_1(0,0)$: $z''_{x^2}(0,0) = 0$, $z''_{y^2}(0,0) = 0$, $z''_{xy}(0,0) = -3$. Тогда $\Delta = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9$.

Таким образом, точка $P_1(0,0)$ не является экстремумом функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

б) $P_2(1,1)$: $z''_{x^2}(1,1) = 6$, $z''_{y^2}(1,1) = 6$, $z''_{xy}(1,1) = -3$. Тогда $\Delta = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27$.

Таким образом, точка $P_2(1,1)$ является экстремумом функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$, а именно минимумом функции, так как $z''_{x^2}(1,1) = 6 > 0$.

7. Тема « Неопределенный интеграл»

$$\int \frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = z^{12} \Rightarrow z = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12 z^{11} dz \end{array} \right\} = \int \frac{z + z^4}{1 + z^3} 12 z^{11} dz = 12 \int z^{12} dz =$$

$$= \frac{12}{13} z^{13} + C = \frac{12}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C$$

8. Тема «Определенный интеграл и его приложения».

Найдите длину дуги кривой $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$.

Решение:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx =$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}\mathrm{x}}\,\mathrm{d}\left(\frac{9}{4}\mathrm{x}+1\right)=\left[1+\frac{9}{4}\mathrm{x}=\mathrm{t}\right]=\frac{4}{9}\int_1^{10}\sqrt{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{t}^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{10}=$$

$$=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

9. Тема «Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Линейные уравнения 1 -го и 2-го порядка».

Решить дифференциальное уравнение

$$y''+3y'-4y=(x+1)e^x.$$

Решение:

1) Составим и решим соответствующее однородное уравнение:

$y''+3y'-4y=0$;

Составим характеристическое уравнение и решим его

$k^2+3k-4=0$;

$D=(3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25$;

$k=\dfrac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\dfrac{-3\pm5}{2}$; $k_1=1$; $k_2=-4$.

Тогда, $Y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$.

2) Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения в виде $\bar{y}(x)=Q(x)\cdot e^{\alpha x}x^n$, где $Q(x)$ многочлен первой степени, а именно $Q(x)=Ax+B$ (коэффициенты A, B определяются методом неопределенных коэффициентов), $n=1$ (так как однородное характеристическое уравнение имеет один корень, равный $\alpha=1$).

Итак, $\bar{y}(x)=(Ax+B)\cdot e^x x=(Ax^2+Bx)e^x$.

Тогда,

$\bar{y}'(x)=((Ax^2+Bx)e^x)'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x=(2Ax+B+Ax^2+Bx)e^x$;

$\bar{y}''(x)=((2Ax+B+Ax^2+Bx)e^x)'=(2A+2Ax+B)e^x+(2Ax+B+Ax^2+Bx)e^x=$

$=(Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B))e^x$

Таким образом,

$(Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B))e^x+3(2Ax+B+Ax^2+Bx)e^x-4(Ax^2+Bx)e^x=(x+1)e^x$;

$10Ax+(2A+5B)=x+1$;

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ 2A + 5B = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{10} \\ B = \dfrac{4}{25} \end{cases}.$$

Следовательно, $\bar{y} = (\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x)e^x$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения прмет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + (\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x)e^x.$$

10. Тема «Числовые и функциональные ряды»

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2n+1}$.

Решение задачи основано на использовании признака Даламбера. Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то при $L > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; при $L < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; при $L = 1$ требуется дальнейшее исследование.

Общий член ряда $a_n = \dfrac{3^n}{2n+1}$, тогда $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2(n+1)+1} = \dfrac{3 \cdot 3^n}{2n+3}$.

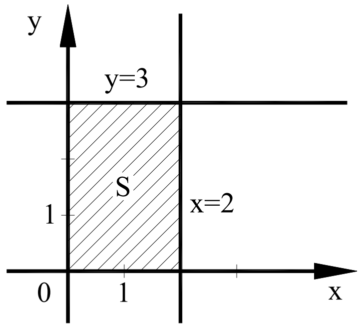
По признаку Даламбера: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot 3^n}{2n+3} : \dfrac{3^n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot 3^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n+3}{2n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \left(6 + \frac{3}{n}\right)}{n \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{6+0}{2+0} = 3.$$

Так как $L > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2n+1}$ расходится.

11. Тема «Кратные интегралы»

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}(5x-4y)dxdy$, где область D – прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми x=2, y=3.



Область D изображена на рисунке. Тогда

$$\iint\limits_{D}(5x-4y)dxdy=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{3}(5x-4y)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}\left(5xy\Big|_{0}^{3}-2y^{2}\Big|_{0}^{3}\right)dx=\int\limits_{0}^{2}(15x-18)dx=$$

$$=\frac{15x^{2}}{2}\Bigg|_{0}^{2}-18x\Big|_{0}^{2}=30-36=-6.$$

12. Тема «Основные понятия теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей».

Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, перекладывают наудачу два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найдите вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

Решение: Гипотезы B_1, B_2, B_3 – соответственно: переложили 2 белых шара, 1 белый и 1 черный, 2 черных шара. Вероятности гипотез: $p(B_1)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$, $p(B_2)=\dfrac{6}{10}$, $p(B_3)=\dfrac{1}{10}$.

Пусть A – событие, вероятность которого нужно найти. Условные вероятности:

$$p(A/B_1)=\frac{6}{10},\qquad p(A/B_2)=\frac{5}{10},\qquad p(A/B_3)=\frac{4}{10}.$$

Используем формулу полной вероятности:

$$p(A)=p(A/B_1)\cdot p(B_1)+p(A/B_2)\cdot p(B_2)+p(A/B_3)\cdot p(B_3)=$$

$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{52}{100}=0{,}52.$$

13. Тема «Повторные испытания».

Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0{,}8$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень 70 раз?

Решение:

По условию $n = 10$, $m = 70$, $p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2$. Поскольку m и n достаточно велики, а p и q не малы, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Найдем сначала

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = (70 - 80) \cdot \frac{1}{4} = -2{,}5.$$

В силу четности функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5)$. По таблице значений $\varphi(x)$ (см. приложение 1 [1]) находим $\varphi(2{,}5) = 0{,}01753$.

Следовательно, $P_{100}(70) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}01753 = 0{,}00438.$

14. Тема «Случайные величины».

Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{1}{8}x^3, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение: Находим плотность распределения вероятностей. Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0 \\ \frac{3}{8}x^2, & \text{при } 0 < x \le 2 \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины

$$M[X]=\int_0^2 x\cdot\left(\frac{3}{8}x^2\right)dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2=\frac{3}{32}\cdot 16=\frac{3}{2}.$$

Дисперсию случайной величины

$$D[X]=\int_0^2 x^2\cdot\left(\frac{3}{8}x^2\right)dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\int_0^2 x^4dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2-\frac{9}{4}=$$

$$=\frac{3}{40}\cdot 32-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}.$$

15. Тема «Элементы математической статистики. Статистические оценки параметров распределения».

Задан вариационный ряд выборки

x_i	80	95	100	115	140	155	160
n_i	4	6	10	40	20	12	8

а) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение, начальные и центральные моменты 3-го и 4-го порядков, асимметрию и эксцесс;

б) построить на графике эмпирическую функцию распределения;

Решение: а) Первоначальные варианты – сравнительно большие числа, поэтому целесообразно перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$, а именно вычесть из всех вариант одно и то же число $C = 115$, равное выборочной средней или близкое к ней. В итоге получим распределение условных вариант (дисперсия при этом не изменится).

С целью упрощения расчетов, вычисления будем вести в табличном виде

x_i	80	95	100	115	140	155	160	Σ
n_i	4	6	10	40	20	12	8	100
u_i	–35	–20	–15	0	25	40	45	

$n_i u_i$	−140	−120	−150	0	500	480	360	930
$n_i u_i^2$	4900	2400	2250	0	12500	19200	16200	57450
$n_i (u_i+1)^2$	4624	2166	1960	40	13520	20172	16928	59410

Последняя строка служит для контроля вычислений

$$\sum n_i (u_i+1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 57450 + 2\cdot 930 + 100 = 59410.$$

Найдем выборочную среднюю

$$\overline{x}_в = C + \frac{\sum n_i u_i}{n} = 115 + \frac{930}{100} = 124{,}3.$$

Найдем выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$D_в = (\sum n_i u_i^2)/n - [(\sum n_i u_i)/n]^2 = \frac{57450}{100} - \left(\frac{930}{100}\right)^2 =$$

$$= 574{,}5 - 86{,}49 = 488{,}01$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{488{,}01} = 22{,}09.$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию условных вариант и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - [\sum n_i u_i]^2/n}{n-1} = \frac{57450 - 8649}{99} \approx 492{,}94$$

$$S_u = \sqrt{S^2} = \sqrt{492{,}94} \approx 22{,}2.$$

Так как первоначальные варианты были уменьшены на одно и то же постоянное число $C = 115$, то дисперсия не изменилась, т.е. искомая дисперсия равна дисперсии условных вариант $S_x^2 = S_u^2$.

При вычислении моментов удобнее первоначальные варианты свести к равностоящим. Для этого весь интервал, в котором они заключены (от 80 до 160), делим на 5 равных интервалов: $80-96$; $96-112$, $112-128$, $128-144$, $144-160$. Середины частотных интервалов образуют равностоящие варианты: 88, 104, 120, 136, 152. За частоту каждой равностоящей варианты принимают сумму частот, попавших в соответствующий частотный интервал. Составим расчетную таблицу.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
88	10	–2	–20	40	10	–80	160	10
104	10	–1	–10	10	0	–10	10	0
120	40	0	0	0	40	0	0	40
136	20	1	20	20	80	20	20	320
152	20	2	40	80	180	160	320	1620
Σ	100		30	150	310	90	510	1990

Третий столбец содержит условные варианты, вычисленные по формуле $u_i = (x_i - c)/h$, где за C выбирается варианта, расположенная в середине вариационного ряда, а h – разность между любыми двумя соседними вариантами. В нашем случае $u_i = (x_i - 120)/16$.

Последний столбец служит для контроля вычислений

$$\sum n_i(u_i+1)^4 = \sum n_i u_i^4 + 4\sum n_i u_i^3 + 6\sum n_i u_i^2 + 4\sum n_i u_i + n =$$
$$= 510 + 4\cdot 90 + 6\cdot 150 + 4\cdot 30 + 100 = 510 + 360 + 900 + 120 + 100 = 1990.$$

Найдем условные (начальные моменты)

$$M_1 = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{30}{100} = 0{,}3; \qquad M_2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{150}{100} = 1{,}5;$$
$$M_3 = \frac{\sum n_i u_i^3}{n} = \frac{90}{100} = 0{,}9; \qquad M_1 = \frac{\sum n_i u_i^4}{n} = \frac{510}{100} = 5{,}1.$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков

$$m_3 = (M_3 - 3M_2M_1 + 2(M_1)^3)\cdot h^3 =$$
$$= (0{,}9 - 3\cdot 1{,}5\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}3^3)\cdot 16^3 = -1622{,}016.$$
$$m_4 = (M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2(M_1)^2 - 3(M_1)^4)\cdot h^4 =$$
$$= (5{,}1 - 4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}3 + 6\cdot 1{,}5\cdot (0{,}3)^2 - 3\cdot (0{,}3^4)\cdot 16^4 = 314946{,}36.$$

Выборочная дисперсия по условным моментам равна

$$D = (M_2 - (M_1)^2)h^2 = (1{,}5 - 0{,}09)\cdot 256 = 360{,}96$$

Таким образом, асимметрия и эксцесс будут равны

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{-1622{,}016}{\sqrt{360{,}96^3}} \approx -0{,}2365$$

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{314946{,}36}{\sqrt{360{,}96^4}} - 3 \approx -0{,}5828.$$

б) Найдем эмпирическую функцию $F^*(x)$ по данному распределению выборки. Наименьшая варианта данного вариационного ряда 80, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 80$.

Значение $x < 95$, а именно $x_1 = 80$, наблюдалось 4 раза, следовательно, $F^*(x) = 4/100 = 0{,}04$ при $80 < x \le 95$.

Значение $x < 100$, а именно $x_1 = 80$ и $x_2 = 95$, наблюдались $4 + 6 = 10$ раз, следовательно, $F^*(x) = 10/100 = 0{,}1$ при $95 < x \le 100$.

Значение $x < 115$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$ и $x_3 = 100$, наблюдались $4 + 6 + 10 = 20$ раз, следовательно, $F^*(x) = 20/100 = 0{,}2$ при $100 < x \le 115$.

Значение $x < 140$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$ и $x_4 = 115$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 = 60$ раз, следовательно, $F^*(x) = 60/100 = 0{,}6$ при $115 < x \le 140$.

Значение $x < 155$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$, $x_4 = 115$ и $x_5 = 140$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 + 20 = 80$ раз, следовательно, $F^*(x) = 80/100 = 0{,}8$ при $140 < x \le 155$.

Значение $x < 160$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$, $x_4 = 115$, $x_5 = 140$ и $x_6 = 155$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 + 20 + 12 = 92$ раз, следовательно, $F^*(x) = 92/100 = 0{,}92$ при $155 < x \le 160$.

Так как $x = 160$ наибольшая варианта, то, согласно свойств эмпирической функции распределения, получим $F^*(x) = 1$ при $x > 160$. Отсюда, искомая функция распределения примет вид

$$F^*(X) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 80 \\ 0{,}04 & \text{при} \quad 80 < x \le 95 \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 95 < x \le 100 \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 100 < x \le 115 \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 115 < x \le 140 \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 140 < x \le 155 \\ 0{,}92 & \text{при} \quad 155 < x \le 160 \\ 1 & \text{при} \quad x > 160 \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис.1

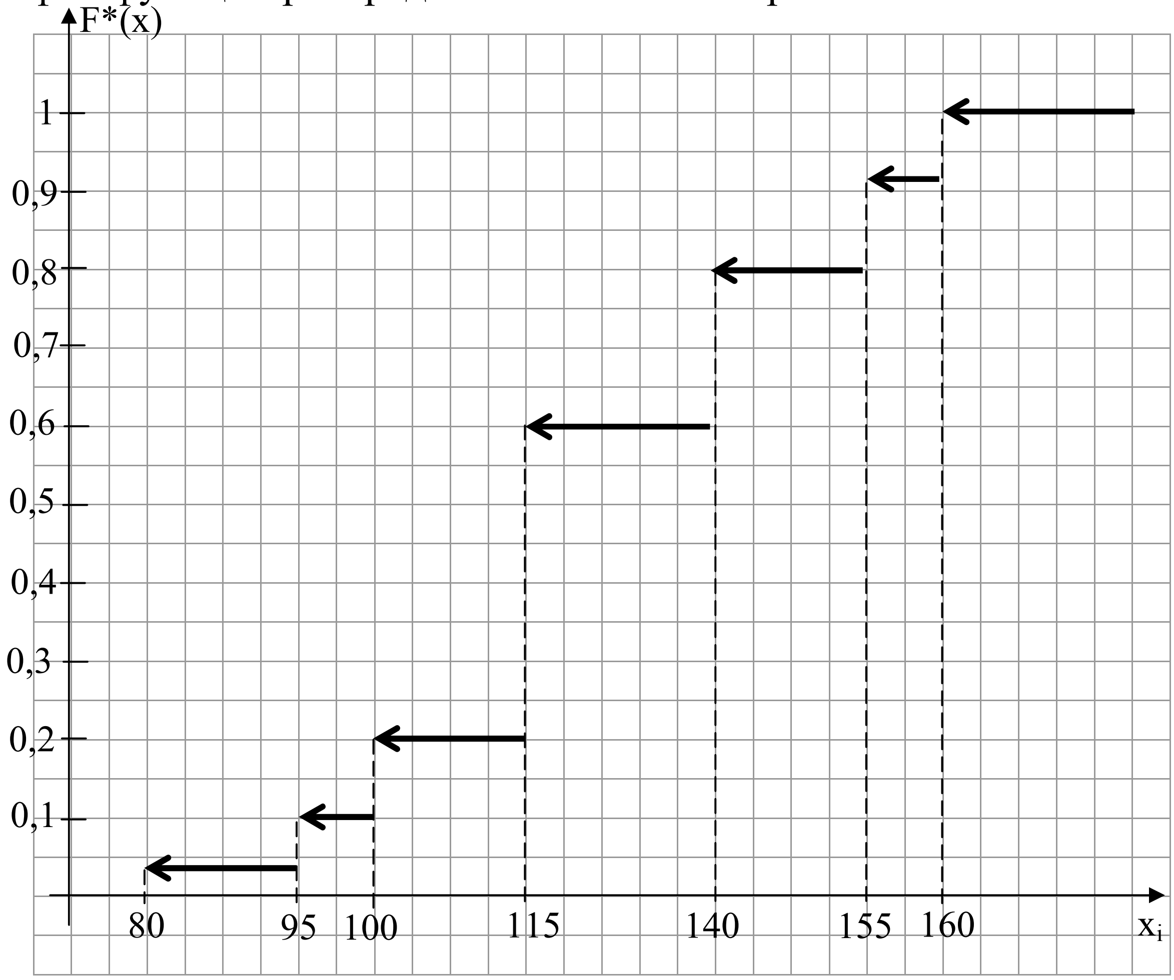


Рис.1

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. Высшая математика : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2011. - 608 с. - Текст : непосредственный.
2. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.1 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. - 288 с. - Текст : непосредственный
3. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.2 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. – 432 с. - Текст : непосредственный
4. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.3 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. – 544 с. - Текст : непосредственный
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2012. - 479 с. : ил. - (Бакалавр). - Текст : непосредственный
6. Гусак, А.А. Высшая математика : учебник. Т. 1/А.А. Гусак – 7-е изд. – Минск : Тетра Системс, 2009. – 544 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=572287 (дата обращения 01.09.2021). - Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
7. Магазинников, Л.И. Высшая математика: дифференциальное исчисление : учебное пособие/ Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников - Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481033 (дата обращения 02.09.2021) . - Режим доступа: по подписке. - Текст : электронный
8. Кутузов, А. С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : [16+] / А. С. Кутузов. – 2-е изд. стер. – Москва ; Берлин :Директ-Медиа, 2017 – 127 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166 (дата обра-

щения: 05.07.2021). – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.

9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - Текст : непосредственный.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т.2 / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2007. – 544 с. - Текст : непосредственный.
11. Ильин В.А. Линейная алгебра : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974 (дата обращения 01.09.2021) . - Режим доступа: по подписке. - Текст : электронный.
12. Ильин В.А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - Изд. 7-е, стер. - М. : Физматлит, 2009. - 224 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). - Текст : непосредственный.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2011. - 404 с. - (Основы наук). - Б. ц. - Текст : непосредственный.
14. Волков Е.А. Численные методы : учебное пособие / Е. А. Волков. - 4-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2007. - 256 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Текст : непосредственный.
15. Кочетков Е.С. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: учебное пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - М. : Форум, 2005. - 480 с. : ил. - (Высшее образование). - Текст : непосредственный.