

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 03.05.2024 10:11:02

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eab673e943df4a489f4aa56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

«29» 12 2023 г.

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОГИХ КРИТЕРИЯХ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине Теория принятия решений
для студентов направления подготовки 09.03.01
Информатика и вычислительная техника

Курск 2023 г.

УДК 519.81

Составитель Е.Н. Иванова

Рецензент

Доцент кафедры программной инженерии,
кандидат технических наук

Т.Н. Конаныхина

Методы принятия решений при многих критериях в условиях определенности: методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Н. Иванова. – Курск, 2023. – 20 с.: ил. 2, табл. 12. – Библиограф.: с. 20.

Приведены методы анализа слабоструктуризованных проблем, предполагающих наличие объективной модели. Рассмотрены задачи, процедуры решения задач, а также методы оценки и сравнения многокритериальных альтернатив.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению Информатика и вычислительная техника.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника очной.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать

. Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л.

Уч.-изд.л.

. Тираж 20 экз.

Заказ

1384

. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель

Освоить методы решения задач, эффективность решения которых может быть оценена с помощью нескольких критериев.

2. Особенности задач принятия решений при многих критериях в условиях определенности

При проектировании сложных объектов их эффективность не может быть полностью оценена с помощью единственного показателя. В этом случае учитываются дополнительные критерии (показатели эффективности). Например, при проектировании ЭВМ учитывают: среднюю наработку на отказ, стоимость, быстродействие, массу, габариты. Чем больше критериев качества вводится в рассмотрение, тем более полную характеристику достоинств и недостатков проектируемого объекта можно получить. Задачи, в которых имеется не одна, а несколько критериев (целевых функций), получили название многокритериальных задач.

Задачи выбора решения при многих критериях в условиях определенности представляют собой задачи выбора из допустимых альтернатив по векторному количественному показателю $F(X) = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, включающему некоторое число частных критериев F_1, F_2, \dots, F_m .

Задача выбора характеризуется следующим логическим высказыванием:

$$\langle K_{\langle m \rangle}; P_{\text{СВ}}; \varphi(K_{\langle m \rangle}, P_{\text{СВ}}); X; F(X); X^* \in X \rangle \quad (1)$$

где $K_{\langle m \rangle}$ — векторный количественный показатель привлекательности или качества альтернатив, состоящий из частных показателей $K_i, i = \overline{1, m}$;

$P_{\text{СВ}}$ — система предпочтений лица, принимающего решения;

$\varphi(K_{\langle m \rangle}, P_{\text{СВ}})$ — решающее правило;

X — множество допустимых альтернатив;

X^* — лучшая альтернатива, выделенная из множества на X на основе применения критерия оптимальности $F(X)$.

Логическое высказывание (1) означает, что сначала с учетом системы предпочтений лица, принимающего решения, и частных показателей выбирается решающее правило, на основе которого формируется критерий оптимальности $F(X)$. Затем из множества допустимых альтернатив X применением критерия оптимальности выделяется одна лучшая альтернатива X^* .

В многокритериальных задачах принятия решений оптимальные варианты решения определить нельзя. Это обусловлено тем, что один вариант решения может превосходить другой по ряду частных показателей и уступать по остальным. При таких условиях сказать, какой вариант решения объективно лучше другого не представляется возможным.

При разработке методов решения многокритериальных задач решаются специфические проблемы.

Несравнимость решений. Основная сложность логического анализа многокритериальных задач состоит в том, что в них появляется эффект несравнимости вариантов (решений). Несравнимость решений является формой неопределенности, связанной со стремлением лица, принимающего решения достичь противоречивые цели и может быть названа ценностной неопределенностью.

Нормализация критериев. Так как частные критерии имеют различный физический смысл, т.е. измеряются в различных единицах, масштабы их не соизмеримы, поэтому невозможно сравнение качества полученных результатов по каждому критерию.

Выбор принципа оптимальности. Формально описать принцип оптимальности (критерий „правильности решения“) оказывается затруднительным. В целом все применяе-

мые принципы оптимальности прямо или косвенно отражают идеи устойчивости, выгоды и справедливости.

Учёт приоритета критериев. Обычно из физического смысла задачи следует, что локальные критерии имеют различную важность при решении задачи, т.е. один локальный критерий имеет какой-то приоритет над другим локальным критерием. Это следует учитывать при выборе принципа оптимальности и определении области возможных решений, отдавая предпочтение более важным критериям.

3. Методы многокритериальной оптимизации

Все методы многокритериального выбора условно делятся на две группы: эвристические и аксиоматические методы.

Наличие хорошо обоснованных методов обоснования решений по скалярному показателю с объективными моделями обусловило стремление свести задачу выбора по векторному критерию к задаче однокритериального выбора. В результате сформировалась группа эвристических методов. В этих методах лицо, принимающее решение, выбирает вид свертки векторного показателя привлекательности альтернатив в некоторый обобщенный скалярный показатель, который затем оптимизируется с помощью методов однокритериальной оптимизации.

Применение эвристических методов породило проблему выбора вида свертки.

В связи с наличием недостатков у эвристических методов была разработана вторая группа — аксиоматические методы, которые сложнее эвристических, но позволяют решать задачи многокритериального выбора более обоснованно и наглядно. В методах этой группы способ формирования решающего правила оптимизации основывается на предварительном выдвижении и проверке справедливости ряда аксиом.

Установление справедливости аксиом позволяет определить для ряда методов этой группы вид и параметры функции критерия оптимальности, которая используется в решающем правиле при выборе лучших альтернатив.

По способу реализации как эвристические, так и аксиоматические методы подразделяются на одно- и многошаговые методы. При использовании одношаговых методов решение находится за один шаг на основе однократно сформированного решающего правила оптимизации. В многошаговых (как правило, аксиоматических) процедурах реализуется принцип использования составного решающего правила оптимизации, предусматривающего последовательное применение все более совершенных частных решающих правил к множествам альтернатив, уменьшаемым по мощности на каждом шаге.

3.1. Метод аналитической иерархии

Для применения этого метода необходимо определить: цель, состав критериев — $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_m$; перечень альтернатив — $X_1, X_2, \dots, X_s, \dots, X_d$. Предполагается, что все перечисленные альтернативы влияют на каждый из приведенных критериев. Анализируемая проблема представляется в виде иерархической структуры: на первом уровне размещается цель, на втором уровне — состав критериев; на третьем уровне — множество альтернатив (рис. 1). Идея метода состоит в том, что эксперт должен выполнить попарное сравнение альтернатив и критериев. При попарном сравнении альтернатив эксперт должен ответить на вопрос: какая из альтернатив наиболее предпочтительна, имеет большее воздействие либо более вероятна. Для количественного выражения предпочтений экспертов применяется следующая шкала: равная важность альтернатив — 1; умеренное превосходство — 3; существенное превосходство — 5; значительное

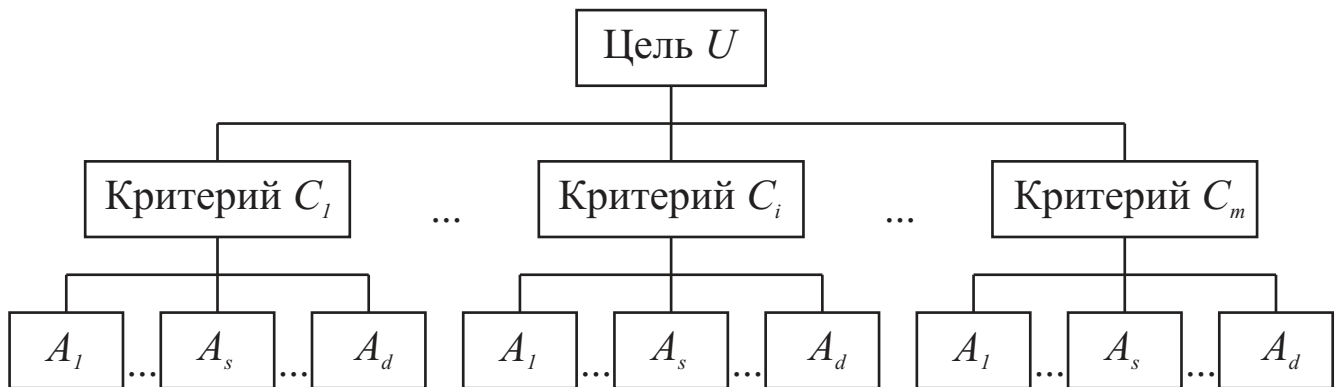


Рисунок 1 – Иерархическое представление задачи

превосходство — 7; очень большое превосходство — 9.

Количественные результаты предпочтений альтернатив представляются в таблице (табл. 1).

Таблица 1 – Количественные предпочтения альтернатив

Альтернативы	Альтернативы						Собственный вектор	Вес
	X_1	X_2	...	X_r	...	X_d		
X_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1r}	...	x_{1d}	λ_1	v_1
X_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2r}	...	x_{2d}	λ_2	v_2
...
X_s	x_{s1}	x_{s2}	...	x_{sr}	...	x_{sd}	λ_s	v_s
...
X_d	x_{d1}	x_{d2}	...	x_{dr}	...	x_{dd}	λ_d	v_d

Определение элементов таблицы производится в соответствии со следующим правилом: если альтернатива X_s превосходит альтернативу X_r , то элемент $x_{sr} = \{3; 5; 7; 9\}$, а в случае равнозначности альтернатив X_s и X_r , $x_{sr} = 1$. Элемент x_{rs} равен обратному значению x_{sr} , т.е. $x_{rs} = 1/x_{sr}$. Для вычисления элемента собственного вектора λ_s необходимо определить произведение элементов s -й строки, а затем найти корень d -й степени, т.е. $\lambda_s = \sqrt[d]{x_{s1} \cdot x_{s2} \cdot \dots \cdot x_{sd}}$. Вес v_s — это нормированное значение λ_s , т.е. $v_s = \lambda_s / \sum_{s=1}^d \lambda_s$; $\sum_{s=1}^d v_s = 1$.

Аналогичная таблица формируется для количественных предпочтений критериев (табл. 2).

Таблица 2 – Количественные предпочтения критериев

Критерии	Критерии						Собственный вектор	Вес
	C_1	C_2	...	C_j	...	C_m		
C_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1m}	α_1	w_1
C_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2m}	α_2	w_2
...
C_i	c_{j1}	c_{j2}	...	c_{ij}	...	c_{im}	α_s	w_i
...
C_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mr}	...	c_{mm}	α_m	w_m

Окончательно, алгоритм метода аналитической иерархии включает выполнение следующих этапов.

Этап 1.

Формируется таблица количественных предпочтений критериев, и определяются значения нормированного веса критериев w_i , $i = \overline{1, m}$.

Этап 2.

Для каждого C_i -го критерия конструируется таблица количественных предпочтений альтернатив: количество таблиц предпочтений критериев равно числу критериев. В результате обработки данных таблицы для C_i -го критерия находится величина нормируемого веса X_s -й альтернативы по C_i -му критерию — w_i , $i = \overline{1, m}$. Значения w_i указываются в последнем столбце каждой из таблиц.

Этап 3.

Вычисляется интегральный показатель E_s для каждой из альтернатив X_s , $s = \overline{1, d}$:
$$E_s = \sum_{i=1}^d w_i v_s.$$

Этап 4.

В качестве оптимальной выбирается альтернатива X_k ,

для которой $E_k = \max_s E_s$.

3.2. Метод ELECTRE (ранжирование многокритериальных альтернатив)

Исходными данными для применения метода являются:
 перечень критериев — $C_1, C_2, \dots, C_i, C_m$;
 множество альтернатив $X = \{X_1; X_2; \dots; X_i; \dots; X_d\}$;
 значения критериальных оценок для каждой из альтернатив — $x_{is}, i = \overline{1, m}, s = \overline{1, d}$.

Необходимо упорядочить альтернативы по степени их перспективности. Решение задачи состоит в попарном сравнении альтернатив и исключении доминируемых. Альтернатива X_s называется доминирующей по отношению к альтернативе X_r , если по всем критериям оценки альтернативы X_s не хуже, чем оценки альтернативы X_r , а хотя бы по одному критерию оценка альтернативы X_s лучше, чем оценка альтернативы X_r . Альтернатива X_r определяется как доминируемая. Альтернативы являются эффективными, если каждая из них превосходит любую другую по какому-либо из критериев. Эффективные альтернативы не сравнимы между собой на основе критериальных оценок, и лучшая из них может быть выбрана только с учетом дополнительной информации, отражающей предпочтения лица, принимающего решения.

Реализация метода включает выполнение следующих этапов.

Этап 1.

Для каждого критерия эксперт устанавливает его важность $w_i, i = \overline{1, m}$. Значение важности — это целое положительное число.

Этап 2.

Формируется таблица для индексов согласия (табл.3), строки и столбцы которой соответствуют множеству альтернатив. Индекс согласия $z_{X_s X_r}$, определяет степень согласия

перспективности X_s -й альтернативы по отношению к X_r -й альтернативе:

$$z_{X_s X_r} = \sum_{i \in I^+, I^=} w_i / \sum_{i=1}^m w_i,$$

где I^+ — множество критериев, по которым альтернатива X_s предпочтительнее альтернативы X_r , т.е. $x_{is} > x_{ir}$, $i \in I^+$;

$I^=$ — множество критериев, по которым альтернативы X_s и X_r равнозначны, т.е. $x_{is} = x_{ir}$, $i \in I^=$.

Этап 3.

Таблица 3 – Индексы согласия

Альтернативы	Альтернативы					
	X_1	X_2	...	X_r	...	X_d
X_1	*	z_{12}	...	z_{1r}	...	z_{1d}
X_2	z_{21}	*	...	z_{2r}	...	z_{2d}
...
X_s	z_{s1}	z_{s2}	...	z_{sr}	...	z_{sd}
...
X_d	z_{d1}	z_{d2}	...	z_{dr}	...	*

Конструируется таблица индексов несогласия (табл. 4), строки и столбцы которой соответствуют множеству альтернатив. Индекс несогласия $u_{X_s X_r}$ определяет степень отрицания гипотезы о перспективности альтернативы X_s по отношению к альтернативе X_r . Для вычисления $u_{X_s X_r}$ необходимо определить множество I^- критериев, по которым альтернатива X_r превосходит альтернативу X_s и для каждого элемента этого множества найти текущий индекс несогласия:

$$\bar{u}_{X_s X_r(i)} = \frac{|x_{ir} - x_{is}|}{L_i}, \quad i \in I^-,$$

где L_i — длина шкалы для i -го критерия, включенного в множество I^- .

Окончательно индекс несогласия: $u_{X_s X_r} = \max_i \bar{u}_{X_s X_r(i)}$.

Этап 4.

Таблица 4 – Индексы несогласия

Альтернативы	Альтернативы					
	X_1	X_2	...	X_r	...	X_d
X_1	*	u_{12}	...	u_{1r}	...	u_{1d}
X_2	u_{21}	*	...	u_{2r}	...	u_{2d}
...
X_s	u_{s1}	u_{s2}	...	u_{sr}	...	u_{sd}
...
X_d	u_{d1}	u_{d2}	...	u_{dr}	...	*

Устанавливаются предельные значения для индекса согласия $z(1) = \max z_{ij}$ и индекса несогласия $u(1) = \min u_{ij}$.

Этап 5.

Для каждой пары альтернатив X_s и X_r производится сравнение индекса согласия z_{sr} и индекса несогласия u_{sr} с предельными значениями $z(1)$ и $u(1)$. Если $z_{sr} \geq z(1)$ и $u_{sr} \leq u(1)$, то альтернатива X_s доминирует над альтернативой X_r при условии, что одно из неравенств выполняется как строгое и осуществляется переход на шаг 6. В противном случае альтернативы X_s и X_r объявляются несравнимыми, либо эквивалентными и выполняется переход на этап 7.

Этап 6.

Доминируемая альтернатива X_r удаляется из числа конкурирующих. Оставшиеся альтернативы образуют первое ядро недоминируемых альтернатив.

Этап 7.

Производится ослабление требований к предпочтению альтернатив, т.е. уменьшается предельное значение индекса согласия до величины $z(2)$ и увеличивается предельное значение для индекса несогласия до величины $u(2)$. Переход на шаг 5 для выполнения следующей итерации ранжиро-

вания альтернатив. Результат — второе ядро недоминируемых альтернатив. Количество итераций определяется лицом, принимающим решения, в первое ядро входят наилучшие альтернативы, а последовательность ядер соответствует их упорядочению по предпочтению.

4. Пример использования методов многокритериальной оптимизации

Задача.

Рассмотрим проблему выбора научного руководителя студентом университета. Глобальный показатель „качества“, характеризующий правильность выбора, соответствует общей удовлетворенностью работой в конкретной научной группе. Этот показатель является расплывчатым и неопределенным, поэтому используются соответствующие критерии-заместители и задача трансформируется к некоторой многокритериальной задаче. Будем рассматривать следующие частные критерии оптимальности, характеризующие в совокупности исходный глобальный показатель:

1. Перспективность проводимых в группе исследований с позиций последующего трудоустройства (C_1).
2. Личный интерес студента к проводимым исследованиям (C_2).
3. Возможность получения дополнительной заработной платы в процессе обучения (C_3).
4. Профессионализм, характер и человеческие качества лично научного руководителя (C_4).
5. Состав научной группы и отношения в коллективе (C_5).

Предполагается, что все введенные частные показатели необходимо максимизировать, т.е. большему значению каждого показателя будет соответствовать более желаемое состояние для студента.

Имеется три потенциальных научных руководителя (альтернативы), обозначенных: $X_1 = A$, $X_2 = B$, $X_3 = C$.

Решение.

4.1. Использование метода аналитической иерархии

Этап 1. Формирование таблицы количественных предпочтений критериев.

На основе метода экспертных оценок получим значения оценок критериев C_i , $i = \overline{1, 5}$. Результаты заносим в таблицу 5.

Определяем значения компонентов собственного вектора

Таблица 5 – Количественные предпочтения критериев

Критерии	Критерии					Собственный вектор	Вес
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5		
C_1	1	1	3	1	1	1,246	0,213
C_2	1	1	5	1	1	1,380	0,236
C_3	1/3	1/5	1	1/7	1/7	0,267	0,045
C_4	1	1	7	1	1	1,476	0,253
C_5	1	1	7	1	1	1,476	0,253
	Σ					5,845	1

$\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5)$, результаты заносим в таблицу 5.

$$\alpha_1 = \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 1,246, \quad \alpha_4 = \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1} = 1,476,$$

$$\alpha_2 = \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1} = 1,380, \quad \alpha_5 = \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1} = 1,476$$

$$\alpha_3 = \sqrt[5]{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}} = 0,267,$$

и значения нормированного веса критериев $w =$

$(w_1; w_2; w_3; w_4; w_5)$, результаты заносим в таблицу 5.

$$w_1 = 1,246/5,845 = 0,213; \quad w_4 = 1,476/5,845 = 0,253;$$

$$w_2 = 1,380/5,845 = 0,236; \quad w_5 = 1,476/5,845 = 0,253.$$

$$w_3 = 0,267/5,845 = 0,045;$$

Этап 2. Формирование таблиц количественных предпочтений альтернатив.

Для каждого критерия сформируем таблицу количественных предпочтений альтернатив, используя метод экспертных оценок (таблицы 6 – 10). Определяем значения компонентов собственного вектора для таблицы 6: $\lambda = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$, результаты заносим в таблицу 6:

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{7}} = 0,754; \lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{9}} = 0,333; \lambda_3 = \sqrt[3]{7 \cdot 9 \cdot 1} = 3,979$$

и значения нормированного веса критериев $v = (v_1; v_2; v_3)$, результаты заносим в таблицу 6:

$$v_1 = 0,754/5,066 = 0,149; v_2 = 0,333/5,066 = 0,066; v_3 = 3,979/5,066 = 0,785.$$

Аналогичные вычисления выполняем для таблиц 7 – 10.

Таблица 6 – Количественные предпочтения альтернатив по критерию C_1

Альтернативы	Альтернативы			Собственный вектор	Вес
	A	B	C		
A	1	3	1/7	0,754	0,149
B	1/3	1	1/9	0,333	0,066
C	7	9	1	3,979	0,785
	Σ			5,066	1

Таблица 7 – Количественные предпочтения альтернатив по критерию C_2

Альтернативы	Альтернативы			Собственный вектор	Вес
	A	B	C		
A	1	1/7	1/5	0,306	0,075
B	7	1	3	2,579	0,634
C	5	1/3	1	1,186	0,291
	Σ			4,071	1

Таблица 8 – Количественные предпочтения альтернатив по критерию C_3

Альтернативы	Альтернативы			Собственный вектор	Вес
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		
<i>A</i>	1	1/5	1	0,585	0,143
<i>B</i>	5	1	5	2,924	0,714
<i>C</i>	1	1/5	1	0,585	0,143
	Σ			4,094	1

Таблица 9 – Количественные предпочтения альтернатив по критерию C_4

Альтернативы	Альтернативы			Собственный вектор	Вес
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		
<i>A</i>	1	7	9	3,979	0,785
<i>B</i>	1/7	1	3	0,754	0,149
<i>C</i>	1/9	1/3	1	0,333	0,066
	Σ			5,066	1

Таблица 10 – Количественные предпочтения альтернатив по критерию C_5

Альтернативы	Альтернативы			Собственный вектор	Вес
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		
<i>A</i>	1	9	5	3,557	0,722
<i>B</i>	1/9	1	1/7	0,251	0,051
<i>C</i>	1/5	7	1	1,119	0,227
	Σ			4,927	1

Для наглядности решения представим задачу в виде иерархической структуры (рис. 2) с указанием весов альтернатив и критериев.

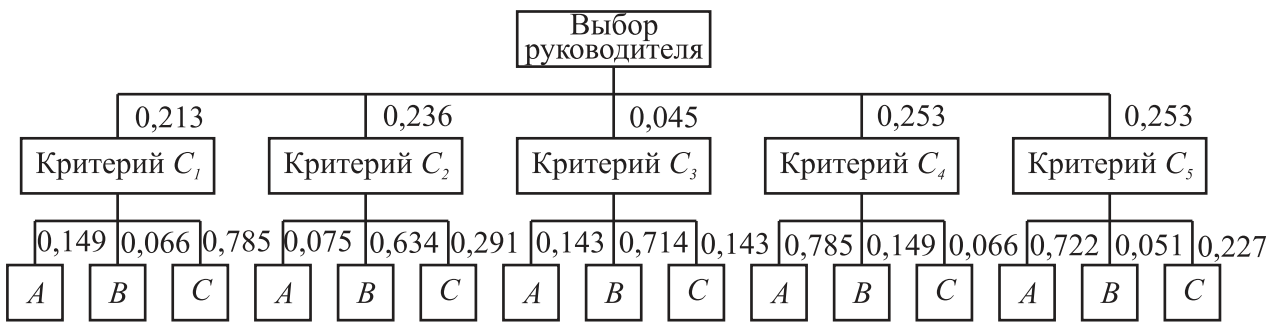


Рисунок 2 – Иерархическое представление задачи о выборе руководителя

Этап 3.

Вычисляем интегральный показатель для каждой альтернативы:

$$E_A = 0,213 \cdot 0,149 + 0,236 \cdot 0,075 + 0,045 \cdot 0,143 + 0,253 \cdot 0,785 + 0,253 \cdot 0,722 = 0,437;$$

$$E_B = 0,213 \cdot 0,066 + 0,236 \cdot 0,634 + 0,045 \cdot 0,714 + 0,253 \cdot 0,149 + 0,253 \cdot 0,051 = 0,246;$$

$$E_C = 0,213 \cdot 0,785 + 0,236 \cdot 0,291 + 0,045 \cdot 0,143 + 0,253 \cdot 0,066 + 0,253 \cdot 0,227 = 0,316.$$

Этап 4. Выбор оптимальной альтернативы

В качестве оптимальной выбирается альтернатива, для которой $E_k = \max_{s=1,3} E_s$:

$E_k = \max(0,437; 0,246; 0,316) = 0,437$, следовательно, наиболее перспективным с позиции метода аналитической иерархии признается выбор руководителя А.

4.2. Использование метода ELECTRE

Этап 1. Установление важности критериев.

Для каждого критерия C_i устанавливается его важность w_i , $i = \overline{1,5}$: $w_1 = 2$; $w_2 = 3$; $w_3 = 1$; $w_4 = 5$; $w_5 = 4$.

Этап 2. Формирование таблицы индексов согласия.

Сравниваем альтернативы А и В. Определяем множества I^+ , $I^=$, I^- : $I^+ = \{C_1; C_4; C_5\}$; $I^= = \{ \}$; $I^- = \{C_2; C_3\}$.

Сравниваем альтернативы А и С:

$$I^+ = \{C_4; C_5\}; I^- = \{C_3\}; I^\Gamma = \{C_1; C_2\}.$$

Сравниваем альтернативы B и A :

$$I^+ = \{C_2; C_3\}; I^- = \{ \}; I^\Gamma = \{C_1; C_4; C_5\}.$$

Сравниваем альтернативы B и C :

$$I^+ = \{C_2; C_3; C_4\}; I^- = \{ \}; I^\Gamma = \{C_1; C_5\}.$$

Сравниваем альтернативы C и A :

$$I^+ = \{C_1; C_2\}; I^- = \{C_3\}; I^\Gamma = \{C_4; C_5\}.$$

Сравниваем альтернативы C и B :

$$I^+ = \{C_1; C_5\}; I^- = \{ \}; I^\Gamma = \{C_2; C_3; C_4\}.$$

Вычисляем индексы согласия для каждой пары альтернатив:

$$z_{AB} = \frac{w_1 + w_4 + w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{2 + 5 + 4}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,73;$$

$$z_{AC} = \frac{w_4 + w_5 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{5 + 4 + 1}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,67;$$

$$z_{BA} = \frac{w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{3 + 1}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,27;$$

$$z_{BC} = \frac{w_2 + w_3 + w_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{3 + 1 + 5}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,6;$$

$$z_{CA} = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{2 + 3 + 1}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,4;$$

$$z_{CB} = \frac{w_1 + w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{2 + 4}{5 + 4 + 1 + 3 + 2} = 0,4.$$

Заносим результаты в таблицу индексов согласия (табл. 11).

Этап 3. Формирование таблицы индексов несогласия.

Таблица 11 – Индексы согласия

Альтернативы	Альтернативы		
	A	B	C
A	*	0,73	0,67
B	0,27	*	0,6
C	0,4	0,4	*

Сравниваем альтернативы A и B :

$$\bar{u}_{AB(C_2)} = \frac{|7 - 1/7|}{9} = 0,76; \quad \bar{u}_{AB(C_3)} = \frac{|5 - 1/5|}{9} = 0,53;$$

$$u_{AB} = \max\{\bar{u}_{AB(C_2)}; \bar{u}_{AB(C_3)}\} = \max\{0,76; 0,53\} = 0,76.$$

Сравниваем альтернативы *A* и *C*:

$$\bar{u}_{AC(C_1)} = \frac{|7 - 1/7|}{9} = 0,76; \quad \bar{u}_{AC(C_2)} = \frac{|5 - 1/5|}{9} = 0,53;$$

$$u_{AC} = \max\{\bar{u}_{AC(C_1)}; \bar{u}_{AC(C_2)}\} = \max\{0,76; 0,53\} = 0,76.$$

Сравниваем альтернативы *B* и *A*:

$$\bar{u}_{BA(C_1)} = \frac{|3 - 1/3|}{9} = 0,29; \quad \bar{u}_{BA(C_4)} = \frac{|7 - 1/7|}{9} = 0,76;$$

$$\bar{u}_{BA(C_5)} = \frac{|9 - 1/9|}{9} = 0,99;$$

$$u_{BA} = \max\{\bar{u}_{BA(C_1)}; \bar{u}_{BA(C_4)}; \bar{u}_{BA(C_5)}\} = \max\{0,29; 0,76; 0,99\} = 0,99.$$

Сравниваем альтернативы *B* и *C*:

$$\bar{u}_{BC(C_1)} = \frac{|9 - 1/9|}{9} = 0,99; \quad \bar{u}_{BC(C_5)} = \frac{|7 - 1/7|}{9} = 0,76;$$

$$u_{BC} = \max\{\bar{u}_{BC(C_1)}; \bar{u}_{BC(C_5)}\} = \max\{0,99; 0,76\} = 0,99.$$

Сравниваем альтернативы *C* и *A*:

$$\bar{u}_{CA(C_4)} = \frac{|9 - 1/9|}{9} = 0,99; \quad \bar{u}_{CA(C_5)} = \frac{|5 - 1/5|}{9} = 0,53;$$

$$u_{CA} = \max\{\bar{u}_{CA(C_4)}; \bar{u}_{CA(C_5)}\} = \max\{0,99; 0,53\} = 0,99.$$

Сравниваем альтернативы *C* и *B*:

$$\bar{u}_{CB(C_2)} = \frac{|3 - 1/3|}{9} = 0,29; \quad \bar{u}_{CB(C_3)} = \frac{|5 - 1/5|}{9} = 0,53;$$

$$\bar{u}_{CB(C_4)} = \frac{|3 - 1/3|}{9} = 0,29;$$

$$u_{CB} = \max\{\bar{u}_{CB(C_2)}; \bar{u}_{CB(C_3)}; \bar{u}_{CB(C_4)}\} = \max\{0,29; 0,53; 0,29\} = 0,53.$$

Заносим результаты в таблицу индексов несогласия (табл. 12).

Этап 4.

Устанавливаем предельные значения для индекса согласия $z(1) = 0,73$ и индекса несогласия $u(1) = 0,53$.

Этап 5. Сравнение индексов согласия и несогласия.

Таблица 12 – Индексы несогласия

Альтернативы	Альтернативы		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>A</i>	*	0,76	0,76
<i>B</i>	0,99	*	0,99
<i>C</i>	0,99	0,53	*

Для каждой пары альтернатив сравниваем значения индексов согласия и несогласия с предельными значениями:

$$z_{AB} = z(1) \quad u_{AB} > u(1) \quad z_{BC} < z(1) \quad u_{BC} > u(1)$$

$$z_{AC} < z(1) \quad u_{AC} > u(1) \quad z_{CA} < z(1) \quad u_{CA} > u(1)$$

$$z_{BA} < z(1) \quad u_{BA} > u(1) \quad z_{CB} < z(1) \quad u_{CB} = u(1)$$

Этап 6.

Ослабляем требования к предпочтению альтернатив: $z(2) = 0,67$ и $u(2) = 0,76$. Вновь для каждой пары альтернатив сравниваем значения индексов согласия и несогласия с предельными значениями:

$$z_{AB} > z(2) \quad u_{AB} = u(2) \quad z_{BC} < z(2) \quad u_{BC} > u(2)$$

$$z_{AC} = z(2) \quad u_{AC} = u(2) \quad z_{CA} < z(2) \quad u_{CA} > u(2)$$

$$z_{BA} < z(2) \quad u_{BA} > u(2) \quad z_{CB} < z(2) \quad u_{CB} < u(2)$$

Альтернатива *A* доминирует над альтернативами *B* и *C* и образует первое ядро недоминируемых альтернатив. Следовательно, альтернатива *A* оказывается наилучшей.

5. Контрольные вопросы

1. Как определяется задача принятия решения по многим критериям?
2. Какие проблемы характерны для многокритериальных задач принятия решения?
3. Какие методы многокритериальной оптимизации вы знаете?
4. Что является исходными данными для метода аналитической иерархии?

5. Как представить проблему с помощью иерархической структуры?
6. Как количественно определить степень важности критерия (альтернативы)?
7. Этапы метода аналитической иерархии.
8. Что является исходными данными для метода ELECTRE?
9. Физический смысл индекса согласия, индекса несогласия?
10. Как определяется доминирующая альтернатива?
11. Что является критерием оптимальности в методе аналитической иерархии?

6. Литература

1. Горбунов, В.М. Теория принятия решений [Текст]: учебное пособие / В.М. Горбунов. — Томск: Национальный исследовательский томский политехнический университет, 2010. — 67 с.
2. Петровский, А.Б. Теория принятия решений [Текст]: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.Б. Петровский. — М.: Издательский центр „Академия“, 2009. — 400 с. — (Университетский учебник. Сер. „Прикладная математика и информатика“).
3. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах [Текст]: учебник. — М.: Логос, 2000. — 296 с.