

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 24.04.2024 12:05:32  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 20 » М. 2023г.



### ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ АВТОМАТОВ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

Методические указания к практической работе  
для студентов направления 09.03.01

Курск 2023

УДК 519.713.1

Составители: И.Е. Чернецкая

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

**Построение эквивалентных автоматов и их минимизация:**  
методические указания к практической работе/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.; И.Е.  
Чернецкая. – Курск, 2023. - 12 с.: - ил. 5 , табл. 11.– Библиогр.: с. 12

Содержат сведения по вопросам построения эквивалентных цифровых автоматов и минимизации полностью определенных автоматов методом Ауфенкампа и Хона. Представлены теоретические материалы и примеры реализации. Излагаются методические указания по подготовке и выполнению практической работы.

Методические указания соответствуют рабочей программе дисциплины «Теория автоматов».

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60\*84 1/16.  
Усл. печ. л. 0,7 . Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 50 экз. Заказ 281 Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Цель работы                                | 4  |
| 1 Теоретические основы                     | 4  |
| 2 Порядок выполнения практического занятия | 11 |
| 3 Содержание отчета                        | 11 |
| 4 Контрольные вопросы                      | 11 |
| Список литературы                          | 12 |

**Цель работы:** ознакомление с построением эквивалентных автоматов и минимизацией полностью определенных автоматов с помощью метода Ауфенкампа и Хона.

## 1 Теоретические основы

### Построение эквивалентных автоматов

Для любого автомата Мили можно построить эквивалентный ему автомат Мура и, наоборот, для любого автомата Мура можно построить эквивалентный ему автомат Мили.

Рассмотрим преобразование автомата Мили в автомат Мура. Пусть задан автомат Мили  $S = (A, Z, W, \delta, \lambda, a_1)$ , построим автомат Мура  $S' = (A', Z', W', \delta', \lambda', a_1')$ , у которого  $Z' = Z$ ;  $W' = W$ .

Для определения множества  $A'$  необходимо выполнить расщепление состояний автомата Мили исходя из следующего. Если автомат Мили при переходе в некоторое состояние  $a_s$  может выдавать в разные моменты времени один из  $k$  выходных сигналов из алфавита  $W$ , то такое состояние  $a_s$  должно быть расщеплено на  $k$  состояний. То есть число элементов в множестве  $A_s$  равно числу различных выходных сигналов на дугах автомата  $S$ , входящих в состояние  $a_s$ :  $A_s = \{(a_s, w_1), (a_s, w_2), (a_s, w_3), \dots, (a_s, w_k)\}$  (см. рисунок 1).

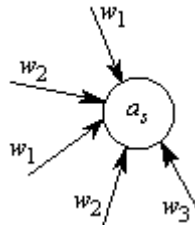


Рисунок 1 – Построение множества  $A_s$

Множество состояний автомата  $S'$  получим как объединение множеств  $A_s$

$$A' = \bigcup_{S=1}^M A_s, \text{ где } M - \text{число состояний в автомате Мили } S.$$

Такое расщепление состояний автомата Мили необходимо потому, что все состояния эквивалентного ему автомата Мура должны быть отмечены только одним выходным сигналом из алфавита  $W$ .

Функцию переходов  $\delta'$  и выходов  $\lambda'$  определим следующим образом. Если в автомате Мили  $S$  был переход  $\delta(a_m, z_f) = a_s$  и при этом выдавался выходной сигнал  $\lambda(a_m, z_f) = w_g$ , то в автомате Мура  $S'$  (см. рисунок 2) будет переход из множества состояний  $A_m$ , порождаемых  $a_m$ , в состояние  $(a_s, w_g)$  под действием того же входного сигнала  $z_f$ .

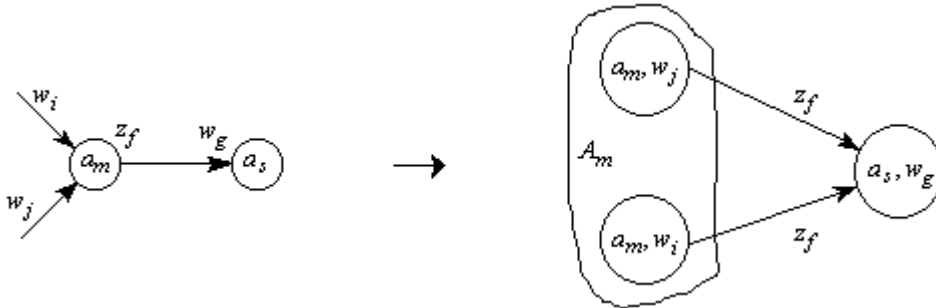


Рисунок 2 – Иллюстрация перехода от автомата Мили к автомату Мура

В качестве начального состояния автомата Мура  $a'_1$  можно взять любое из состояний множества  $A_1$ , порождаемого начальным состоянием  $a_1$ .

*Пример 1.1.* Преобразовать автомат Мили, изображенный на рисунке 3, в автомат Мура.

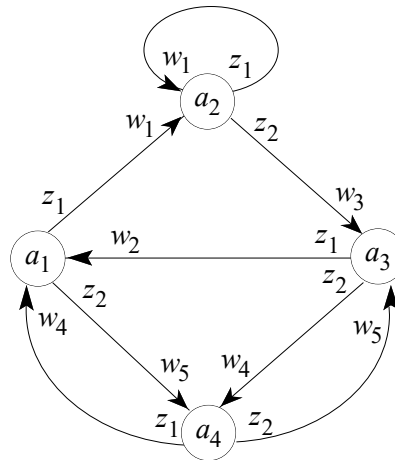


Рисунок 3 – Граф автомата Мили

*Решение.* Для автомата Мура  $Z' = Z = \{z_1, z_2\}$ ;  $W' = W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ . Построим множество  $A'$  для чего найдем множества пар порождаемых каждым состоянием автомата Мили  $S$ . Каждую пару обозначим символами  $b_1, b_2, \dots$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(a_1, w_2), (a_1, w_4)\} = \{b_1, b_2\}; & A_2 &= \{(a_2, w_1)\} = \{b_3\}; \\
 A_3 &= \{(a_3, w_3), (a_3, w_5)\} = \{b_4, b_5\}; & A_4 &= \{(a_4, w_4), (a_4, w_5)\} = \{b_6, b_7\}. \\
 A' &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}.
 \end{aligned}$$

Для определения функции  $\lambda'$  с каждым состоянием вида  $(a_s, w_g)$ , представляющим собой пару, отождествим выходной сигнал, являющийся вторым элементом этой пары:

$$\begin{aligned} \lambda'(b_1) &= w_2; & \lambda'(b_2) &= \lambda'(b_6) = w_4; & \lambda'(b_3) &= w_1; \\ \lambda'(b_4) &= w_3; & \lambda'(b_5) &= \lambda'(b_7) = w_5. \end{aligned}$$

Поясним построение функции  $\delta'$ .

Так как в автомате Мили  $S$  есть переход из состояния  $a_1$  под действием сигнала  $z_1$ , в состояние  $a_2$  с выдачей  $w_1$ , то из множества состояний  $A_1 = \{b_1, b_2\}$ , порождаемых  $a_1$  в автомате  $S'$  должен быть переход в состояние  $(a_2, w_1) = b_3$  под действием сигнала  $z_1$ . Аналогично из состояний множества  $A_1 = \{b_1, b_2\}$  должен быть переход в состояние  $(a_4, w_5) = b_7$  под действием сигнала  $z_2$  и т.д. В качестве начального состояния можно выбрать одно из состояний, порождаемых  $a_1$ , например,  $b_1$ . На рисунке 4 приведен граф автомата Мура  $S'$ , эквивалентного автомату Мили  $S$ , а в таблице 1 – отмеченная таблица переходов автомата  $S'$ .

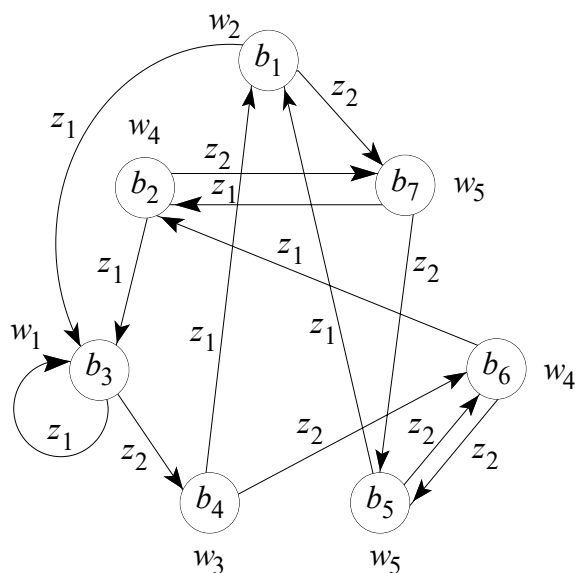


Таблица 1  
Отмеченная таблица переходов  $S'$

|       | $w_2$ | $w_4$ | $w_1$ | $w_3$ | $w_5$ | $w_4$ | $w_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ |
| $z_1$ | $b_3$ | $b_3$ | $b_3$ | $b_1$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_2$ |
| $z_2$ | $b_7$ | $b_7$ | $b_4$ | $b_6$ | $b_6$ | $b_5$ | $b_5$ |

Рисунок 4 – Эквивалентный автомат Мура

Рассмотрим теперь переход от произвольного автомата Мура к эквивалентному ему автомату Мили. Этот переход при графическом способе задания иллюстрируется рисунком 5: выходной сигнал ( $w_g$ ), записанный рядом с вершиной ( $a_s$ ), переносится на все дуги, входящие в эту вершину.

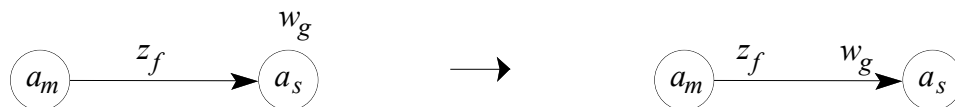


Рисунок 5 – Иллюстрация перехода от автомата Мура к автомату Мили

При табличном методе задания выполняется преобразование отмеченной таблицы переходов исходного автомата Мура. При этом в совмещенную

таблицу переходов автомата Мили вместе с состояниями записываются отмечающие их выходные сигналы. Затем выполняется минимизация числа состояний автомата Мили методом Ауфенкампа и Хона.

## **Минимизация полностью определенных автоматов**

### **Метод Ауфенкампа и Хона**

Основная идея этого метода состоит в разбиении всех состояний исходного абстрактного автомата на попарно непересекающиеся классы эквивалентных состояний и замена каждого класса эквивалентности одним состоянием. Получающийся в результате минимизации автомат имеет столько же состояний, на сколько классов эквивалентности разбиваются состояния исходного автомата.

Состояния  $a_m$  и  $a_s$  являются эквивалентными ( $a_m \sim a_s$ ), если  $\lambda(a_m, \xi) = \lambda(a_s, \xi)$  для всевозможных входных слов  $\xi$ . Состояния  $a_m$  и  $a_s$   $k$ -эквивалентны ( $a_m \sim^k a_s$ ), если  $\lambda(a_m, \xi) = \lambda(a_s, \xi)$  для всевозможных слов длины  $k$ .

### **Минимизация автомата Мили**

Алгоритм минимизации автомата Мили  $S = \{A, Z, W, \delta, \lambda, a_1\}$  состоит из следующих шагов :

1. Находим последовательные разбиения  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}$  множества  $A$  на классы одно-, двух-,  $K$ -,  $K+1$ - эквивалентных состояний до тех пор, пока в каком-то ( $K+1$ ) шаге не окажется, что  $\pi_k = \pi_{k+1}$ .

Одноэквивалентными будут состояния с одинаковыми столбцами в таблице выходов. Состояния будут двухэквивалентными, если они одноэквивалентны и под действием одинаковых входных сигналов попадают в одинаковые одноэквивалентные классы.

2. В каждом классе эквивалентности разбиения  $\pi$  выбирается по одному состоянию, в результате чего получаем множество  $A'$  состояний минимального автомата  $S' = \{A', Z, W, \delta', \lambda', a'_1\}$  эквивалентного автомату  $S$ .

3. Для определения функции переходов  $\delta'$  и функции выходов  $\lambda'$  автомата  $S'$  в таблице переходов и выходов вычёркиваются столбцы, соответствующие не вошедшим в  $A'$  состояниям. В оставшихся столбцах не вошедшие в множество  $A$  состояния заменяются на эквивалентные.

4. В качестве начального состояния  $a'_1$  выбирается состояние, эквивалентное состоянию  $a_1$ . В частности, удобно за  $a'_1$  принимать само состояние  $a_1$ .

*Пример 1.2.* Минимизировать полностью определённый автомат Мили  $S_1$ , заданный таблицами переходов и выходов (см. таблицы 2 и 3).

Таблица 2

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $z_1$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $z_2$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_1$ | $a_2$ |

Таблица 3

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ |
| $z_1$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_1$ |
| $z_2$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_2$ | $w_1$ | $w_1$ |

*Решение.* 1. По таблице выходов (см. таблицу 3) находим разбиение  $\pi_1$  на классы одноэквивалентных состояний, объединяя в одноэквивалентные классы одинаковые столбцы в таблице выходов:

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\} = \{\{a_1, a_2, a_5, a_6\}, \{a_3, a_4\}\}.$$

Для сокращения числа скобок будем использовать надчёркивания, а элементы множества под чертой разделять точками.

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\} = \{\overline{1.2.5.6}, \overline{3.4}\}.$$

Строим таблицу  $\pi_1$  (см. таблицу 4), заменяя состояния в таблице переходов исходного автомата (см. таблицу 2) соответствующими классами одноэквивалентности.

Таблица 4

Разбиение  $\pi_1$  состояний автомата  $S$

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $B_1$ |       |       |       | $B_2$ |       |
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $z_1$ | $B_2$ | $B_2$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_2$ |
| $z_2$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_1$ | $B_1$ |

По таблице 4 получим разбиение  $\pi_2$  на классы 2-эквивалентных состояний (см. таблицу 5):

$$\pi_2 = \{C_1, C_2, C_3\} = \{\overline{1.2}, \overline{5.6}, \overline{3.4}\}.$$

Таблица 5

Разбиение  $\pi_2$  состояний автомата  $S$

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $C_1$ |       | $C_2$ |       | $C_3$ |       |
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $z_1$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_3$ |
| $z_2$ | $C_2$ | $C_2$ | $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_2$ |



Разбиение  $\pi_3$  получаем аналогично (см. таблицу 5):

$$\pi_3 = \{D_1, D_2, D_3\} = \{\overline{1.2}, \overline{5.6}, \overline{3.4}\},$$

оно полностью совпадает с  $\pi_2$ . Процедура завершена. Разбиение  $\pi_3 = \pi_2 = \pi$  есть разбиение множества состояний автомата Мили  $S_1$  на классы эквивалентных между собой состояний.

2. Из каждого класса эквивалентности произвольно выбираем по одному состоянию:  $A' = \{a_1, a_3, a_6\}$ .

3. Строим таблицы переходов и выходов минимального автомата  $S'_1$  (см. таблицы 6 и 7).

Таблица 6

|       |           |       |           |       |       |           |
|-------|-----------|-------|-----------|-------|-------|-----------|
|       | $a_1$     | $a_2$ | $a_3$     | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$     |
| $z_1$ | $a_3$     | $a_4$ | $a_3$     | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$     |
| $z_2$ | $a_5 a_6$ | $a_6$ | $a_5 a_6$ | $a_6$ | $a_1$ | $a_2 a_1$ |

→

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_3$ | $a_6$ |
| $z_1$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_6$ |
| $z_2$ | $a_6$ | $a_6$ | $a_1$ |

Таблица 7

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_3$ | $a_6$ |
| $z_1$ | $w_1$ | $w_1$ | $w_1$ |
| $z_2$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_1$ |

### Минимизация автомата Мура

При минимизации полностью определённых автоматов Мура вводится понятие 0-эквивалентности состояний и разбиение множества состояний на 0-эквивалентные классы. 0-эквивалентными являются одинаково отмеченные состояния. Если два состояния автомата Мура 0-эквивалентны и под действием одинаковых входных сигналов попадают в 0-эквивалентные состояния, то они называются 1-эквивалентными. Все дальнейшие классы эквивалентности для автомата Мура определяются аналогично рассмотренному выше для автомата Мили.

*Пример 1.3.* Минимизировать полностью определённый автомат Мура  $S_2$ , заданный отмеченной таблицей переходов (см. таблицу 8)

Таблица 8

|       |          |          |       |          |       |          |       |          |       |          |          |          |
|-------|----------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|----------|----------|
|       | $w_1$    | $w_1$    | $w_3$ | $w_3$    | $w_3$ | $w_2$    | $w_3$ | $w_1$    | $w_2$ | $w_2$    | $w_2$    | $w_2$    |
|       | $a_1$    | $a_2$    | $a_3$ | $a_4$    | $a_5$ | $a_6$    | $a_7$ | $a_8$    | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $z_1$ | $a_{10}$ | $a_{12}$ | $a_5$ | $a_7$    | $a_3$ | $a_7$    | $a_3$ | $a_{10}$ | $a_7$ | $a_1$    | $a_5$    | $a_2$    |
| $z_2$ | $a_5$    | $a_7$    | $a_6$ | $a_{11}$ | $a_9$ | $a_{11}$ | $a_6$ | $a_4$    | $a_6$ | $a_8$    | $a_9$    | $a_8$    |

*Решение.* 1. По таблице 8 находим разбиение  $\pi_0$  на классы 0-эквивалентных состояний, отыскивая одинаково отмеченные состояния

$$\pi_0 = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\overline{1.2.8}, \overline{6.9.10.11.12}, \overline{3.4.5.7}\}.$$

Строим таблицу  $\pi_0$  (см. таблицу 9), заменяя состояния в таблице переходов 8 соответствующими классами 0-эквивалентности.

Таблица 9

Разбиение  $\pi_0$  состояний автомата  $S_2$ 

|       | $A_1$ |       |       | $A_2$ |       |          |          |          | $A_3$ |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_8$ | $a_6$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_7$ |
| $z_1$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_3$ | $A_1$    | $A_3$    | $A_1$    | $A_3$ | $A_3$ | $A_3$ | $A_3$ |
| $z_2$ | $A_3$ | $A_3$ | $A_3$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_1$    | $A_2$    | $A_1$    | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ | $A_2$ |

По таблицу 9 получим разбиение  $\pi_1$  на классы 1-эквивалентных состояний (см. таблицу 10):

$$\pi_1 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \{\overline{1.2.8}, \overline{6.9.11}, \overline{10.12}, \overline{3.4.5.7}\}.$$

Таблица 10

Разбиение  $\pi_1$  состояний автомата  $S_2$ 

|       | $B_1$ |       |       | $B_2$ |       |          | $B_3$    |          | $B_4$ |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|
|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_8$ | $a_6$ | $a_9$ | $a_{11}$ | $a_{10}$ | $a_{12}$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_7$ |
| $z_1$ | $B_3$ | $B_3$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_4$ | $B_4$    | $B_1$    | $B_1$    | $B_4$ | $B_4$ | $B_4$ | $B_4$ |
| $z_2$ | $B_4$ | $B_4$ | $B_4$ | $B_2$ | $B_2$ | $B_2$    | $B_1$    | $B_1$    | $B_2$ | $B_2$ | $B_2$ | $B_2$ |

Из таблицы 10 видно, что  $\pi_2 = \pi_1 = \pi$ . То есть поиск классов эквивалентности завершён.

2. Из каждого класса эквивалентности произвольно выбираем по одному элементу:  $A' = \{a_1, a_6, a_{10}, a_3\}$ .

3. Строим отмеченную таблицу переходов минимального автомата  $S_2$  (см. таблицу 11).

Таблица 11

|       |          |       |       |          |
|-------|----------|-------|-------|----------|
|       | $w_1$    | $w_3$ | $w_2$ | $w_2$    |
|       | $a_3$    | $a_1$ | $a_6$ | $a_{10}$ |
| $z_1$ | $a_{10}$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_1$    |
| $z_2$ | $a_3$    | $a_6$ | $a_6$ | $a_1$    |

## 2 Порядок выполнения практического занятия

1. Осуществить переход от произвольного автомата Мура к эквивалентному ему автомату Мили. Получить задание и у преподавателя.
2. Осуществить переход от произвольного автомата Мили к эквивалентному ему автомату Мура. Получить задание и у преподавателя.
3. Выполнить минимизацию числа состояний полностью определенного автомата методом Ауфенкампа и Хона.

## 3 Содержание отчета

Титульный лист.

Цель работы.

Выполнение полученного у преподавателя задания.

Заключение.

## 4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение цифрового автомата.
2. В чем отличие структурного цифрового автомата от абстрактного?
3. Сформулируйте основное различие в функционировании автоматов Мили и Мура.
4. Опишите способы задания цифровых автоматов.
5. Опишите поведение С-автомата.
6. Сформулируйте основные этапы преобразования автомата Мили и получения эквивалентного ему автомата Мура.
7. Какие события называются эквивалентными?  $k$ -эквивалентными?
8. Основные этапы минимизации полностью определенных автоматов методом Ауфенкампа и Хона.

## Список литературы

1. Акинина, Ю. С. Теория автоматов : учебное пособие / Ю. С. Акинина, С. В. Тюрин. — 2-е изд. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2023. — 156 с. — ISBN 978-5-4497-1877-8. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/127573.html>