

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 23.02.2023 10:09:46
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a54736d79e5f1c11eabbf73e947df4a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
» 12 _____ 2021 г.



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 18.03.01 Химическая технология,
направленность (профиль) «Химико-технологическое
производство»

Курс 2021

УДК 51

Составитель: Жилина К.В.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Е.В.Скрипкина*

Высшая математика: методические рекомендации к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» 18.03.01 Химическая технология, направленность (профиль) «Химико-технологическое производство» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: К.В.Жилина – Курск, 2021. – 23с.

Изложены методические рекомендации по выполнению практических заданий студентов. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и разбор заданий по дисциплине «Высшая математика».

Материал предназначен для студентов направления подготовки 18.03.01 Химическая технология, направленность (профиль) «Химико-технологическое производство»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. _____. Уч.-изд. л. _____. Тираж _____ экз. Заказ 1654. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель практических работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

1. Тема «Элементы линейной алгебры».

$$\text{Даны матрицы } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$F = (3 \quad -1 \quad -6).$$

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

Решение:

Матрица A имеет размер 2×3 , матрица B имеет размер 2×3 , матрица C имеет размер 3×2 , матрица D имеет размер 3×1 , матрица F имеет размер 1×3 .

$A+B$ может быть найдена, так как матрицы A и B имеют одинаковый размер:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для A и B .

$A \cdot B$ и $B \cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 2×3 и 2×3).

$A \cdot C$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×2), полученная матрица будет иметь размер 2×2 :

$$\begin{aligned} A \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$C \cdot A$ можно найти (размерности матриц 3×2 и 2×3), полученная матрица будет иметь размер 3×3 :

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 27 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot D$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 2×1 :

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (2+6+12 \quad 0-3+16) = (20 \quad 13).$$

$D \cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 2×3).

$A \cdot F$ нельзя найти (размерности матриц 2×3 и 1×3).

$F \cdot A$ нельзя найти (размерности матриц 1×3 и 2×3).

$B \cdot C$ можно найти (размерности матриц 2×3 и 3×2), полученная матрица будет иметь размер 2×2 :

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6-2 & 9-0+2 \\ 5-2+2 & 3-0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$C \cdot B$ можно найти (размерности матриц 3×2 и 2×3), полученная матрица будет иметь размер 3×3 :

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15+3 & -15-3 & 10-6 \\ 6+0 & -6+0 & 4-0 \\ -3+1 & 3-1 & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -18 & 4 \\ 6 & -6 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot D$ можно найти (размер матриц 2×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 2×1 :

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (6+9+8 \quad 2+3-8) = (23 \quad -3).$$

$D \cdot B$ нельзя найти (размер матриц 3×1 и 2×3).

$B \cdot F$ нельзя найти (размер матриц 2×3 и 1×3).

$F \cdot B$ нельзя найти (размер матриц 1×3 и 2×3).

$C \cdot D$ нельзя найти (размер матриц 3×2 и 3×1).

$D \cdot C$ нельзя найти (размерности матриц 3×1 и 3×2).

$C \cdot F$ нельзя найти (размер матриц 3×2 и 1×3).

$F \cdot C$ можно найти (размер матриц $1 \times \underline{3}$ и $\underline{3} \times 2$), полученная матрица будет иметь размер 1×2 :

$$F \cdot C = (3 \quad -1 \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) \quad 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1) = (19 \quad 3).$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, F = (3 \quad -1 \quad -6).$$

$D \cdot F$ можно найти (размер матриц $3 \times \underline{1}$ и $\underline{1} \times 3$), полученная матрица будет иметь размер 3×3 :

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad -1 \quad -6) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -9 & 3 & 18 \\ 12 & -4 & -24 \end{pmatrix}.$$

$F \cdot D$ можно найти (размер матриц 1×3 и 3×1), полученная матрица будет иметь размер 1×1 :

$$F \cdot D = (3 \quad -1 \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (6 + 3 - 24) = (-15).$$

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом

Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Метод Крамера

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы,

а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ име-

ет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Решить СЛУ методом Крамера:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1} , получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём A^{-1} .

$$1. \Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15.$$

$$2. A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10;$$

$$3. \begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. A^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вычислим } X: X = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.
5. Перенумерация неизвестных.

$$\text{Решить СЛУ методом Гаусса} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3стр - 6 · 1стр 3стр : 5 2стр ↔ 3стр

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3стр - 4 · 2стр 3стр : 3

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1стр - 3 · 3стр 1стр + 2 · 2стр
1стр + 2 · 3стр

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = 3. \end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра»

Даны точки $A(-1 - P_7; P_5 - 2)$ и $B(P_5 - 2; P_5 + 4)$. Найти:

а) точку $C(x_1; y_1)$ – середину отрезка AB ;

б) точку $D(x_2; y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\frac{P_9 + 1}{9 - P_9}$.

Решение:

Пусть $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_9 = 2$. Значит $A(-4; -1)$, $B(-1; 5)$.

а) $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 - 1}{2} = -2,5$;

$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$. Получили $C(-2,5; 2)$.

б) Если $\lambda = \frac{P_9 + 1}{9 - P_9} = \frac{3}{8}$, то $x_2 = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{-4 + \frac{3}{8} \cdot (-1)}{1 + \frac{3}{8}} = -\frac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8} \cdot 5}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{7}{11}. \text{ Получили } D\left(-\frac{35}{11}; \frac{7}{8}\right)$$

3. Тема «Аналитическая геометрия»

Даны точки $A(-1; -P_3; 2)$, $B(P_5; 2; 0)$ и $C(P_5; (P_3 + 2); P_3^2 + 3P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$.
Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение:

Пусть $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_8 = 5$.

Точки А, В, С образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overset{P}{i} & \overset{P}{j} & \overset{P}{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}.$$

Тогда $\overrightarrow{AB} = (1+1; 2+2; 0-2)$, $\overrightarrow{AC} = (4+1; 14+2; -1-2)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overset{P}{i} & \overset{P}{j} & \overset{P}{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\overset{P}{i} - 4\overset{P}{j} - 12\overset{P}{k}, \text{ следовательно точки А, В, С об-}$$

разуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать

по формуле: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, где

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{20^2 + (-4)^2 + 12^2} = 4\sqrt{35}.$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

4. Тема «Введение в математический анализ»

Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Решение:

Имеем дело с неопределенностью вида (1^∞) . Такую неопределенность можно раскрыть по нижеследующей схеме:

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = (1^\infty) = e^p,$$

где $p = \lim_{x \rightarrow a} (u(x) - 1) \cdot v(x)$ – вспомогательный предел.

$$\begin{aligned} \text{В нашей задаче } p &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(Мы воспользовались 1-м замечательным пределом $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$).

В итоге искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Определить, какого рода разрыв имеет функция в точке a

$$f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}, a=1.$$

Решение: Выделим целую часть $f(x) = \frac{2(x-1)+7}{x-1} = 2 + \frac{7}{x-1}$.

Если $x \rightarrow 1-0$, то $\frac{7}{x-1} \rightarrow -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2 + \frac{7}{x-1} \right) = -\infty$. Если $x \rightarrow 1+0$, то

$$\frac{7}{x-1} \rightarrow +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2 + \frac{7}{x-1} \right) = +\infty.$$

Таким образом, функция при $x \rightarrow 1$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода.

5. Тема «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Найдите производную функции $y = \ln^2(\arcsin 2x)$.

Решение: Действуем по цепному правилу: на каждом шаге дифференцируем текущую внешнюю функцию:

$$y' = 2 \ln(\arcsin 2x) \cdot (\ln(\arcsin 2x))' = 2 \ln(\arcsin 2x) \cdot \frac{1}{(\arcsin 2x)} \cdot (\arcsin 2x)' = \\ = \frac{2 \ln(\arcsin 2x)}{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{4 \ln(\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \arcsin 2x}.$$

Найти асимптоты линии $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4}$

Решение: Знаменатель дроби обращается в нуль в точках $y' = 0: x^2 - 4 = 0, x_1 = -2, x_2 = 2$. Проверим, будут ли вертикальные прямые $x = -2, x = 2$ асимптотами:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Таким образом, прямые $x = -2, x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

Найдем наклонные асимптоты:

$$y = kx + b,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 2}{x^2 - 4} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y = x$.

6. Тема « Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: 1) Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Таким образом, получили две точки, «подозрительные» на экстремум:

$P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$.

2) Вычислим вторые производные данной функции:

$$z''_{x^2} = 6x, \quad z''_{y^2} = 6y, \quad z''_{xy} = -3.$$

Найдем значения этих производных в точках $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$:

а) $P_1(0,0)$: $z''_{x^2}(0,0) = 0$, $z''_{y^2}(0,0) = 0$, $z''_{xy}(0,0) = -3$. Тогда $\Delta = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9$.

Таким образом, точка $P_1(0,0)$ не является экстремумом функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

б) $P_2(1,1)$: $z''_{x^2}(1,1) = 6$, $z''_{y^2}(1,1) = 6$, $z''_{xy}(1,1) = -3$. Тогда $\Delta = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27$.

Таким образом, точка $P_2(1,1)$ является экстремумом функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$, а именно минимумом функции, так как $z''_{x^2}(1,1) = 6 > 0$.

7. Тема «Неопределенный интеграл»

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = z^{12} \Rightarrow z = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12z^{11} dz \end{array} \right\} = \int \frac{z + z^4}{1 + z^3} 12z^{11} dz = 12 \int z^{12} dz = \\ &= \frac{12}{13} z^{13} + C = \frac{12}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C \end{aligned}$$

8. Тема «Определенный интеграл и его приложения».

Найдите длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 4$.

Решение:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, d\left(\frac{9}{4}x + 1\right) = \left[1 + \frac{9}{4}x = t\right] = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} \, dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \\
&= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)
\end{aligned}$$

9. Тема «Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Линейные уравнения 1-го и 2-го порядка».

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 3y' - 4y = (x+1)e^x.$$

Решение:

1) Составим и решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + 3y' - 4y = 0;$$

Составим характеристическое уравнение и решим его

$$k^2 + 3k - 4 = 0;$$

$$D = (3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25;$$

$$k = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = -4.$$

Тогда, $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

2) Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения в виде $\bar{y}(x) = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q(x)$ многочлен первой степени, а именно $Q(x) = Ax + B$ (коэффициенты A, B определяются методом неопределенных коэффициентов), $n=1$ (так как однородное характеристическое уравнение имеет один корень, равный $\alpha = 1$).

Итак, $\bar{y}(x) = (Ax + B) \cdot e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$.

Тогда,

$$\bar{y}'(x) = ((Ax^2 + Bx)e^x)' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$\begin{aligned}
\bar{y}''(x) &= ((2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x)' = (2A + 2Ax + B)e^x + (2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x = \\
&= (Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B))e^x
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B))e^x + 3(2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x - 4(Ax^2 + Bx)e^x = (x+1)e^x;$$

$$10Ax + (2A + 5B) = x + 1;$$

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ 2A + 5B = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = \frac{4}{25} \end{cases}.$$

Следовательно, $\bar{y} = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x$.

Общее решение исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right)e^x.$$

10. Тема «Числовые и функциональные ряды»

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$.

Решение задачи основано на использовании признака Даламбера. Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует

предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; при $L < 1$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; при $L = 1$ требуется дальнейшее исследование.

Общий член ряда $a_n = \frac{3^n}{2n+1}$, тогда $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{3 \cdot 3^n}{2n+3}$.

По признаку Даламбера: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n}{2n+3} : \frac{3^n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{(2n+3) \cdot 3^n} =$

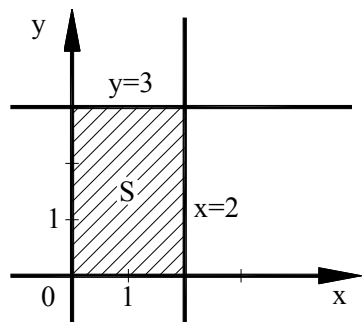
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+3}{2n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(6 + \frac{3}{n}\right)}{n \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{6+0}{2+0} = 3.$$

Так как $L > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$ расходится.

11. Тема «Кратные интегралы»

Вычислить двойной интеграл $\iint_D (5x - 4y) dx dy$, где область D –

прямоугольник, ограниченный осями координат и прямыми $x=2$, $y=3$.



Область D изображена на рисунке. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D (5x - 4y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^3 (5x - 4y) dy = \\ &= \int_0^2 \left(5xy \Big|_0^3 - 2y^2 \Big|_0^3 \right) dx = \int_0^2 (15x - 18) dx = \\ &= \frac{15x^2}{2} \Big|_0^2 - 18x \Big|_0^2 = 30 - 36 = -6. \end{aligned}$$

12. Тема «Основные понятия теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей».

Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, перекладывают наудачу два шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найдите вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

Решение: Гипотезы B_1 , B_2 , B_3 – соответственно: переложили 2 белых шара, 1 белый и 1 черный, 2 черных шара. Вероятности гипотез: $p(B_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, $p(B_2) = \frac{6}{10}$, $p(B_3) = \frac{1}{10}$.

Пусть A – событие, вероятность которого нужно найти. Условные вероятности:

$$p(A/B_1) = \frac{6}{10}, \quad p(A/B_2) = \frac{5}{10}, \quad p(A/B_3) = \frac{4}{10}.$$

Используем формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A/B_1) \cdot p(B_1) + p(A/B_2) \cdot p(B_2) + p(A/B_3) \cdot p(B_3) = \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{52}{100} = 0,52. \end{aligned}$$

13. Тема «Повторные испытания».

Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0,8$. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах стрелок поразит мишень 70 раз?

Решение:

По условию $n = 100$, $m = 70$, $p = 0,8$ и $q = 1 - p = 0,2$.

Поскольку m и n достаточно велики, а p и q не малы, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа. Найдем сначала

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = (70 - 80) \cdot \frac{1}{4} = -2,5.$$

В силу четности функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5)$. По таблице значений $\varphi(x)$ (см. приложение 1 [1]) находим $\varphi(2,5) = 0,01753$.

Следовательно, $P_{100}(70) \approx \frac{1}{4} \cdot 0,01753 = 0,00438$.

14. Тема «Случайные величины».

Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^3, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение: Находим плотность распределения вероятностей. Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{3}{8}x^2, & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины

$$M[X] = \int_0^2 x \cdot \left(\frac{3}{8}x^2\right) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{3}{32} \cdot 16 = \frac{3}{2}.$$

Дисперсию случайной величины

$$\begin{aligned} D[X] &= \int_0^2 x^2 \cdot \left(\frac{3}{8}x^2\right) dx - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx - \frac{9}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 - \frac{9}{4} = \\ &= \frac{3}{40} \cdot 32 - \frac{9}{4} = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

15. Тема «Элементы математической статистики. Статистические оценки параметров распределения».

Задан вариационный ряд выборки

x_i	80	95	100	115	140	155	160
n_i	4	6	10	40	20	12	8

а) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение, начальные и центральные моменты 3-го и 4-го порядков, асимметрию и эксцесс;

б) построить на графике эмпирическую функцию распределения;

Решение: а) Первоначальные варианты – сравнительно большие числа, поэтому целесообразно перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$, а именно вычесть из всех вариантов одно и то же число $C = 115$, равное выборочной средней или близкое к ней. В итоге получим распределение условных вариантов (дисперсия при этом не изменится).

С целью упрощения расчетов, вычисления будем вести в табличном виде

x_i	80	95	100	115	140	155	160	Σ
n_i	4	6	10	40	20	12	8	100
u_i	-35	-20	-15	0	25	40	45	

$n_i u_i$	-140	-120	-150	0	500	480	360	930
$n_i u_i^2$	4900	2400	2250	0	12500	19200	16200	57450
$n_i (u_i + 1)^2$	4624	2166	1960	40	13520	20172	16928	59410

Последняя строка служит для контроля вычислений

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 57450 + 2 \cdot 930 + 100 = 59410.$$

Найдем выборочную среднюю

$$\bar{x}_B = C + \frac{\sum n_i u_i}{n} = 115 + \frac{930}{100} = 124,3.$$

Найдем выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$D_B = (\sum n_i u_i^2) / n - [(\sum n_i u_i) / n]^2 = \frac{57450}{100} - \left(\frac{930}{100}\right)^2 =$$

$$= 574,5 - 86,49 = 488,01$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{488,01} = 22,09.$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию условных вариантов и исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - [\sum n_i u_i]^2 / n}{n - 1} = \frac{57450 - 8649}{99} \approx 492,94$$

$$S_u = \sqrt{S^2} = \sqrt{492,94} \approx 22,2.$$

Так как первоначальные варианты были уменьшены на одно и то же постоянное число $C = 115$, то дисперсия не изменилась, т.е. искомая дисперсия равна дисперсии условных вариантов $S_x^2 = S_u^2$.

При вычислении моментов удобнее первоначальные варианты свести к равностоящим. Для этого весь интервал, в котором они заключены (от 80 до 160), делим на 5 равных интервалов: 80 – 96; 96 – 112, 112 – 128, 128 – 144, 144 – 160. Середины частотных интервалов образуют равностоящие варианты: 88, 104, 120, 136, 152. За частоту каждой равностоящей варианты принимают сумму частот, попавших в соответствующий частотный интервал. Составим расчетную таблицу.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$	$n_i (u_i + 1)^4$
88	10	-2	-20	40	10	-80	160	10
104	10	-1	-10	10	0	-10	10	0
120	40	0	0	0	40	0	0	40
136	20	1	20	20	80	20	20	320
152	20	2	40	80	180	160	320	1620
Σ	100		30	150	310	90	510	1990

Третий столбец содержит условные варианты, вычисленные по формуле $u_i = (x_i - c)/h$, где за C выбирается варианта, расположенная в середине вариационного ряда, а h – разность между любыми двумя соседними вариантами. В нашем случае $u_i = (x_i - 120)/16$.

Последний столбец служит для контроля вычислений

$$\begin{aligned} \sum n_i (u_i + 1)^4 &= \sum n_i u_i^4 + 4 \sum n_i u_i^3 + 6 \sum n_i u_i^2 + 4 \sum n_i u_i + n = \\ &= 510 + 4 \cdot 90 + 6 \cdot 150 + 4 \cdot 30 + 100 = 510 + 360 + 900 + 120 + 100 = 1990. \end{aligned}$$

Найдем условные (начальные моменты)

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{30}{100} = 0,3; & M_2 &= \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{150}{100} = 1,5; \\ M_3 &= \frac{\sum n_i u_i^3}{n} = \frac{90}{100} = 0,9; & M_4 &= \frac{\sum n_i u_i^4}{n} = \frac{510}{100} = 5,1. \end{aligned}$$

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков

$$\begin{aligned} m_3 &= (M_3 - 3M_2M_1 + 2(M_1)^3) \cdot h^3 = \\ &= (0,9 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3^3) \cdot 16^3 = -1622,016. \\ m_4 &= (M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2(M_1)^2 - 3(M_1)^4) \cdot h^4 = \\ &= (5,1 - 4 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 6 \cdot 1,5 \cdot (0,3)^2 - 3 \cdot (0,3^4)) \cdot 16^4 = 314946,36. \end{aligned}$$

Выборочная дисперсия по условным моментам равна

$$D = (M_2 - (M_1)^2) h^2 = (1,5 - 0,09) \cdot 256 = 360,96$$

Таким образом, асимметрия и эксцесс будут равны

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{-1622,016}{\sqrt{360,96^3}} \approx -0,2365$$

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{314946,36}{\sqrt{360,96^4}} - 3 \approx -0,5828.$$

б) Найдем эмпирическую функцию $F^*(x)$ по данному распределению выборки. Наименьшая варианта данного вариационного ряда 80, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \leq 80$.

Значение $x < 95$, а именно $x_1 = 80$, наблюдалось 4 раза, следовательно, $F^*(x) = 4/100 = 0,04$ при $80 < x \leq 95$.

Значение $x < 100$, а именно $x_1 = 80$ и $x_2 = 95$, наблюдались $4 + 6 = 10$ раз, следовательно, $F^*(x) = 10/100 = 0,1$ при $95 < x \leq 100$.

Значение $x < 115$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$ и $x_3 = 100$, наблюдались $4 + 6 + 10 = 20$ раз, следовательно, $F^*(x) = 20/100 = 0,2$ при $100 < x \leq 115$.

Значение $x < 140$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$ и $x_4 = 115$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 = 60$ раз, следовательно, $F^*(x) = 60/100 = 0,6$ при $115 < x \leq 140$.

Значение $x < 155$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$, $x_4 = 115$ и $x_5 = 140$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 + 20 = 80$ раз, следовательно, $F^*(x) = 80/100 = 0,8$ при $140 < x \leq 155$.

Значение $x < 160$, а именно $x_1 = 80$, $x_2 = 95$, $x_3 = 100$, $x_4 = 115$, $x_5 = 140$ и $x_6 = 155$ наблюдались $4 + 6 + 10 + 40 + 20 + 12 = 92$ раз, следовательно, $F^*(x) = 92/100 = 0,92$ при $155 < x \leq 160$.

Так как $x = 160$ наибольшая варианта, то, согласно свойств эмпирической функции распределения, получим $F^*(x) = 1$ при $x > 160$. Отсюда, искомая функция распределения примет вид

$$F^*(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 80 \\ 0,04 & \text{при } 80 < x \leq 95 \\ 0,1 & \text{при } 95 < x \leq 100 \\ 0,2 & \text{при } 100 < x \leq 115 \\ 0,6 & \text{при } 115 < x \leq 140 \\ 0,8 & \text{при } 140 < x \leq 155 \\ 0,92 & \text{при } 155 < x \leq 160 \\ 1 & \text{при } x > 160 \end{cases}$$

График функции распределения показан на рис.1

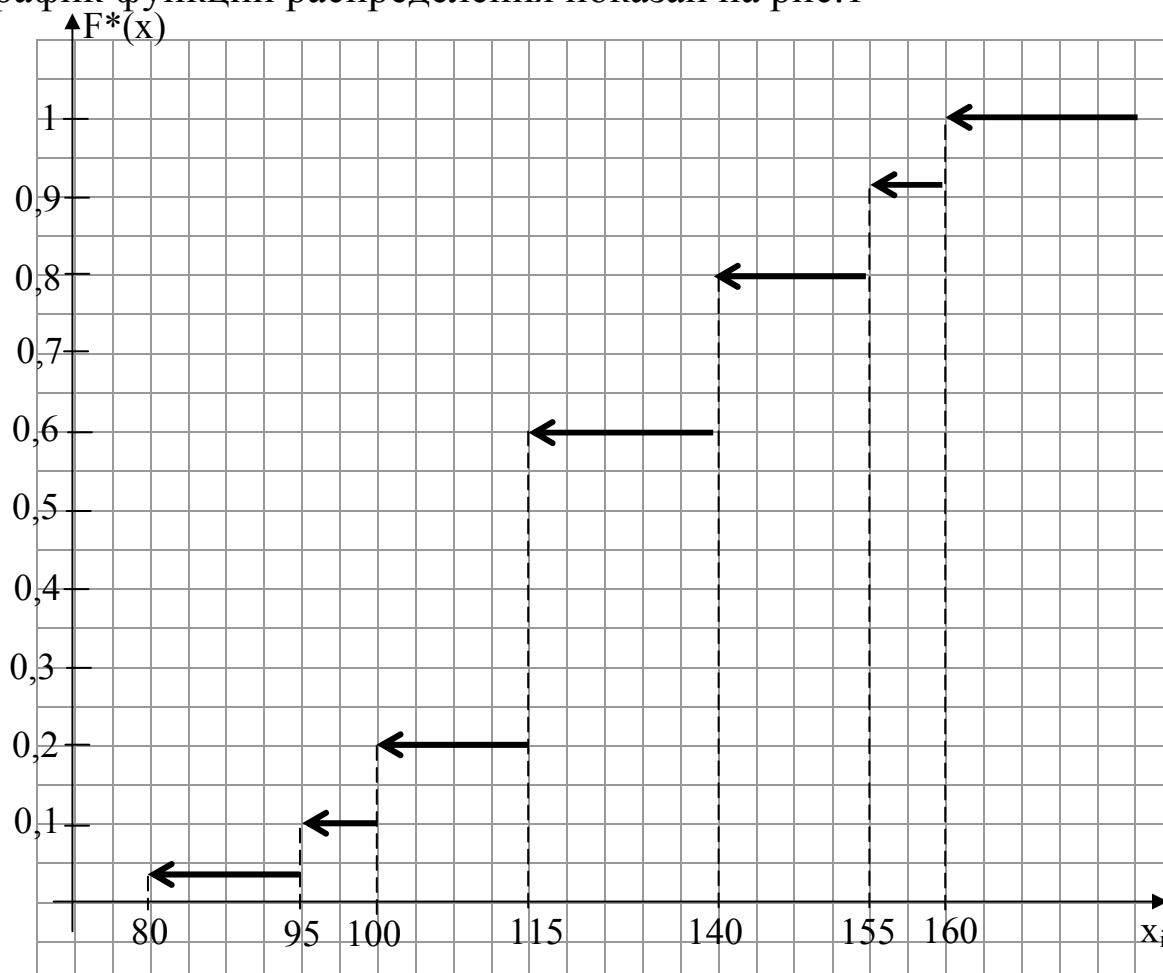


Рис.1

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. Высшая математика : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2011. - 608 с. - Текст : непосредственный.
2. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.1 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. - 288 с. - Текст : непосредственный
3. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.2 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. – 432 с. - Текст : непосредственный
4. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие. Ч.3 / под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. – 5-е изд., испр. - М. : Физматлит. 2009. – 544 с. - Текст : непосредственный
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - М. : Юрайт, 2012. - 479 с. : ил. - (Бакалавр). - Текст : непосредственный
6. Гусак, А.А. Высшая математика : учебник. Т. 1/А.А. Гусак – 7-е изд. – Минск : Тетра Системс, 2009. – 544 с. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=572287> (дата обращения 01.09.2021). - Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
7. Магазинников, Л.И. Высшая математика: дифференциальное исчисление : учебное пособие/ Л.И. Магазинников, А.Л. Магазинников - Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481033> (дата обращения 02.09.2021) . - Режим доступа: по подписке. - Текст : электронный
8. Кутузов, А. С. Математический анализ: дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : [16+] / А. С. Кутузов. – 2-е изд. стер. – Москва ; Берлин :Директ-Медиа, 2017 – 127 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=462166> (дата обра-

щения: 05.07.2021). – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.

9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - Текст : непосредственный.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие. Т.2 / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2007. – 544 с. - Текст : непосредственный.
11. Ильин В.А. Линейная алгебра : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974> (дата обращения 01.09.2021) . - Режим доступа: по подписке. - Текст : электронный.
12. Ильин В.А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - Изд. 7-е, стер. - М. : Физматлит, 2009. - 224 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). - Текст : непосредственный.
13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2011. - 404 с. - (Основы наук). - Б. ц. - Текст : непосредственный.
14. Волков Е.А. Численные методы : учебное пособие / Е. А. Волков. - 4-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2007. - 256 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Текст : непосредственный.
15. Кочетков Е.С. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: учебное пособие / Е. С. Кочетков, С. О. Смерчинская. - М. : Форум, 2005. - 480 с. : ил. - (Высшее образование). - Текст : непосредственный.