МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра телекоммуникаций

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«16» июля 2013 г.

ИССДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Методические указания
по выполнению лабораторной работы № 3
по курсу «Общая теория связи»

Курск 2013

УДК 621.391 (075)

Составители: С.Г. Лукьянюк, И.Г. Бабанин, С.С. Хотынюк

Рецензент

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
профессор кафедры *А.М. Потапенко*

Исследование законов распределения случайных сигналов: методические указания по выполнению лабораторной работы № 3 по курсу «Общая теория связи» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.Г. Лукьянюк, И.Г. Бабанин, С.С. Хотынюк. Курск, 2013. 16 с.: ил. 6, табл. 1.

Содержат методические указания по выполнению лабораторной работы № 3 «Исследование законов распределения случайных сигналов» по курсу «Общая теория связи».

Методические указания соответствуют требованиям типовой программы, утверждённой УМО по направлению подготовки 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», и рабочей программы дисциплины «Общая теория связи».

Предназначены для студентов специальности 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» дневной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано печать . Формат 60x841/16.
Усл. печ. л. 0,8. Уч.-изд. л. 0,7 Тираж 100 экз. Заказ. 40 Бесплатно
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Оглавление

1 Цель работы

Ознакомление с методикой экспериментальных исследований плотностей вероятности случайных процессов. Установление количественных связей между характером случайного процесса, его числовыми характеристиками и графиками плотности вероятности.

2 Краткая характеристика исследуемых цепей и сигналов

Для проведения работы сменные блоки стенда не требуются, используются внутренние источники сигналов:

- гармонические сигналы с частотой 1 кГц в качестве сигнала со случайной начальной фазой;
- «белый» шум с выхода генератора шума;
- аддитивная смесь этих сигналов при различном соотношении сигнал/шум (a/σ).

Измерение плотности вероятности мгновенных значений сигналов производится с помощью ПК, работающего в режиме «ГИСТОРАММА». Записанная в память ПК реализация исследуемого сигнала воспроизводится на экране монитора, а затем подвергается статистическому анализу, в результате которого получаются графики плотности вероятности и вычисляются параметры случайного процесса (m и σ). Для контроля параметров входных сигналов используются встроенный вольтметр и осциллограф. Получение аддитивной смеси сигналов обеспечивается сумматором (Σ) стенда.

3 Домашнее задание

Изучите по конспекту лекций и литературе разделы о случайных сигналах и их характеристиках:

Лукьянюк, С. Г. Теория электрической связи. Сигналы, помехи и системы передачи: учебное пособие. / С. Г. Лукьянюк, А. М. Потапенко / Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2012. 235 с.

- Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Советское радио, 1977, с. 132 – 144;
- Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966, с. 63 – 72, 183 – 188;

- Баскаков И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 2005, с. 142÷163.

4 Основы теории

Случайными называются такие процессы $X(t)$, реализации которых в каждом опыте точно предсказать невозможно. В отличии от детерминированных для них нельзя заранее утверждать, что $X(t)$ в некоторый момент t будет иметь определённое значение; для непрерывного случайного процесса (СП) можно лишь говорить о некоторой вероятности того, что в этот момент значение $X(t)$ окажется в интервале между значениями x и $x + \Delta x$, т.е. если $X(t)$ есть случайная функция, то её значения при фиксированном значении аргумента представляют собой случайные величины $X(t_i) = X_i$.

Случайность процесса $X(t)$ проявляется в том, что вид наблюдаемой функции случайным образом меняется от одного наблюдения к другому. Однако получаемая в результате каждого отдельного опыта функция $x(t)$ не случайна. Её называют реализацией случайной функции. Совокупность всех возможных реализаций $\{x^{(r)}(t)\}$ и образует СП (или случайную функцию) $X(t) = \{x^{(r)}(t)\}$. Для непрерывного СП число реализаций образует несчётное множество.

На рисунке 1 показаны четыре реализации СП. Средние результаты, найденные по большому числу наблюдений СП, устойчивы, т. е. СП подчиняются определённым статистическим закономерностям.

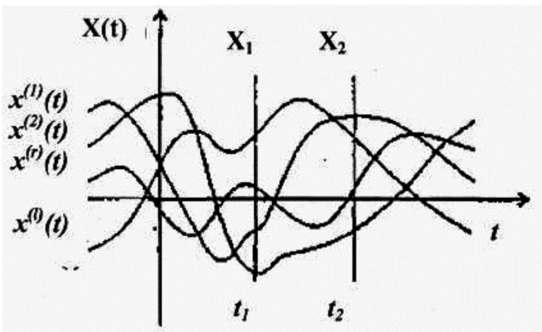

Рисунок 1 – Задание СП через совокупность его реализаций

Если на графике множества реализаций случайной функции $X(t)$ выбрать момент (сечение) t_1, то множество $\{x^{(r)}(t_1)\}$ значений реализаций в этот момент образует случайную величину X. Значения этой случайной величины заранее неизвестны. Но можно установить некоторые закономерности, по которым можно судить о том, что в данном сечении случайная величина с вероятностью p будет принимать значение в определённых пределах $[x,\ x+\Delta x]$.

Для непрерывных процессов $X(t)$ распределение вероятностей в заданном сечении t_1 характеризуется одномерной плотностью вероятностей (ПВ):

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{|\Delta x|} \ge 0,$$

выражающей отношение вероятности того, что случайная величина $X(t)$ примет значения в интервале $x \le X \le x + \Delta x$, к величине интервала Δx. На рисунке 2, б изображён типовой график одномерной ПВ.

Другой важной характеристикой случайных величин X является интегральная функция распределения (ИФР) $F(x)$, определяемая как вероятность того, что случайная величина X не превзойдёт некоторого значения x:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} w(x)dx.$$

График ИФР $F(x)$ приведён на рисунке 2, а.

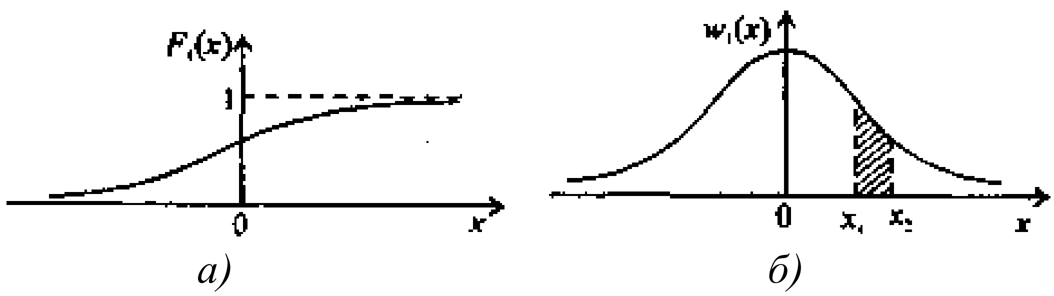

Рисунок 2 – Типовой график одномерной ИФР (a) и ПВ ($б$)

В прикладных задачах часто предполагают, что ИФР являются дифференцируемыми функциями и определяют $w(x)$ как производную от ИФР:

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Основные сведения об этих законах и их свойствах приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Основные свойства ИФР и ПВ случайной величины

Название и обозначение	Функция распределения $F(x)$	Плотность вероятности $w(x)$
Определение	$F(x) = P(X \le x)$	$w(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\lvert \Delta x \rvert}$
Физическая размерность	безразмерная	размерность $1/X$
Взаимосвязь	$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} w(y)dy$	$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
Особенности функции	$F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$ (неубывающая)	$w(x) \ge 0$ (неотрицательная)
Расчет вероятности $P(x_1 \le X \le x_2)$	$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	$P(x_1 \le X \le x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} w(x)dx$
Свойство нормировки	$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$

На практике часто ограничиваются рассмотрением более простых характеристик СП, называемых числовыми характеристиками или моментами. В общем случае можно использовать моменты k-го порядка:

- начальные:

$$m_k(t) = M_k[X(t)] = \overline{X^k(t)} = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k w(x,t)dx \text{ - для непрерывного СП,} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{\,k} P(x_i, t) \text{ - для дискретного СП;} \end{cases}$$

- центральные:

$$\mu_k\left[X(t)\right]=\overline{\overset{\circ}{X}{}^k(t)}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x-\overline{X(t)}\right]^k w(x,t)dx \text{ - для непрерывного СП,}\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i-\overline{X(t)}\right]^k P(x_i,t) \text{ - для дискретного СП,}\end{cases}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-\overline{X(t)}$ – центрированное значение СП. Черта сверху означает усреднение по множеству реализаций. Моменты полностью определяются одномерным распределением и в общем случае произвольного СП являются детерминированными функциями времени.

Математическим ожиданием СП (МО) называется начальный момент первого порядка, определяющий среднее значение СП:

$$m_1(t)=M\left[X(t)\right]=\overline{X(t)}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xw(x,t)dx \text{ - для непрерывного СП,}\\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i P(x_i,t) \text{ - для дискретного СП.}\end{cases}$$

Центральный момент второго порядка называется дисперсией:

$$\sigma^2(t)=D[X(t)]=\overline{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2}=\overline{\overset{\circ}{X}{}^2(t)}=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[x-\overline{X(t)}\right]^2 w(x,t)dx \text{ - непр. СП,}\\ \sum\limits_{i=1}^{m}\left[x_i-\overline{X(t)}\right]^2 P(x_i,t) \text{ - дискр. СП,}\end{cases}$$

$$\sigma^2(t)=D[X(t)]=m_2(t)-m_1^2(t)=\overline{X^2(t)}-\overline{X}^2(t).$$

Величину $\sigma=\sqrt{D(X)}$ называют стандартным или среднеквадратическим отклонением. Дисперсия характеризует разброс мгновенных значений СП относительно его среднего значения. Дисперсия имеет наглядный смысл мощности флюктуационной составляющей эргодического процесса. МО и дисперсия являются важными характеристиками СП.

Одномерной плотностью вероятности случайного процесса является величина, пропорциональная относительному времени пребывания его реализации на уровне между x и $x+\Delta x$. Это свойство

ПВ положено в основу принципа её измерения, поясняемого рисунком 3. Длительность прямоугольных импульсов постоянной амплитуды пропорциональна времени пребывания реализации СП в интервале между x_0 и $x_0 + \Delta x$. Показания прибора, измеряющего среднее значение тока, создаваемого последовательностью видеоимпульсов, пропорциональны плотности вероятности $w(x_0)$. Для измерения математического ожидания СП можно использовать любой достаточно инерционный стрелочный прибор.

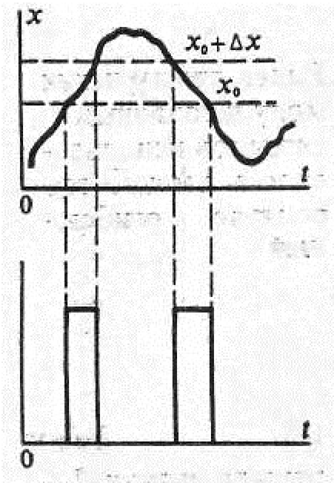

Рисунок 3 – Принцип измерения плотности вероятности

Прибор, измеряющий дисперсию СП, должен иметь на входе конденсатор, отделяющий постоянную составляющую. Дальнейшие этапы процесса измерения – возведение в квадрат и усреднение по времени – выполняются инерционным квадратичным вольтметром.

4.1 Плотности вероятности гармонических колебаний и нормального шума

Плотность вероятности гармонического колебания со случайной начальной фазой.

Гармоническое колебание $s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, имеющее одинаковую амплитуду A_0 и частоту ω_0, но случайные начальные фазы φ, представлено на рисунке 4.

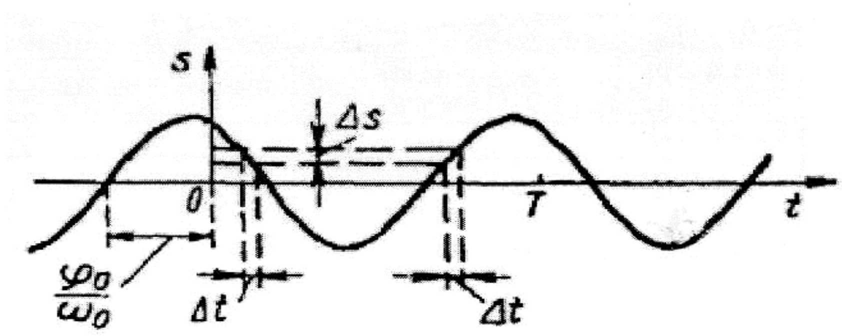

Рисунок 4 – Гармоническое колебание с равномерно распределённой фазой

Начальные фазы могут принимать значения только в интервале (- π, + π). Обозначив Ψ = $\omega_0 t$ + φ, получим:

$$s = A_0 \sin \psi.$$

Произвольно выбранному значению s соответствуют два значения Ψ из интервала ($\cos\omega_0 t - \pi$, $\cos\omega_0 t + \pi$), которые обозначим через Ψ_1 и Ψ_2. Тогда:

$$w_1(s) = \begin{cases} \dfrac{w_1(\psi_1 - \omega_0 t) + w_1(\psi_2 - \omega_0 t)}{\sqrt{A_0^2 - s^2}} & -A_0 \le s \le A_0, \\ 0 & s < -A_0, \quad s > A_0, \end{cases} \tag{1}$$

так как $|\partial\psi/\partial s| = (A_0^2 - s^2)^{-1/2}$.

Эта формула показывает, что в общем случае плотность вероятности $w_1(s)$ зависит от времени и рассматриваемый ансамбль является нестационарным. Наибольший практический интерес представляет случай, когда ансамбль является стационарным. Это имеет место лишь тогда, когда плотность вероятности $w_1(\Psi - \omega_0 t)$ является прямоугольной:

$$w_1(\psi - \omega_0 t) = \begin{cases} 1/2\pi & \omega_0 t - \pi_0 \le \psi \le \omega_0 t + \pi_0, \\ 0 & \psi < \omega_0 t - \pi_0, \quad \psi > \omega_0 t + \pi_0, \end{cases}$$

В данном случае (1) переходит в следующее выражение:

$$w_1(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A_0^2 - s^2}} & \text{при } |s| \le A_m, \\ 0 & \text{при } |s| > A_m. \end{cases} \tag{2}$$

Так как $\Psi = \omega_0 t + \varphi$, то (1) эквивалентно условию:

$$w_1(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi, & -\pi \le \quad \le \pi, \\ 0 & < -\pi, \quad > \pi \end{cases} .$$

Таким образом, если случайная начальная фаза распределена равномерно на интервале (- π, + π), то ансамбль гармонических колебаний является стационарным с одномерной плотностью вероятности (2). Эта плотность вероятности изображена на рисунке 5.

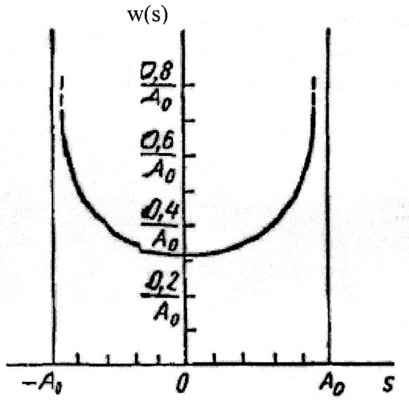

Рисунок 5 – Плотность вероятности гармонического колебания с равномерно распределённой фазой

Формуле (2) можно дать другое физическое толкование, если рассматривать вероятность стационарного процесса как относительное время пребывания процесса в соответствующем интервале. Действительно, пусть имеется гармоническое колебание с фиксированной фазой φ_0:

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{3}$$

Каждому фиксированному значению s из интервала (- A_0, + A_0) соответствуют два значения аргумента t на периоде $T = 2\pi/\omega_0$ (рис. 5). Если понимать под вероятностью $w_1(s)\Delta s$ относительное время пребывания гармонического колебания в интервале (s, s - Δs), то можем написать:

$$w_1(s)\Delta s = 2\Delta t/T, \tag{4}$$

где согласно (3) $\Delta s = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \quad_0)\Delta t = \omega_0 \Delta t \sqrt{A_0^2 - s^2}$ или $\Delta t = \Delta s \big/ \omega_0 \sqrt{A_0^2 - s^2}$.

После подстановки значений T и Δt выражение (4) приводится к формуле (2). Такая интерпретация поясняет поведение плотности вероятности $w_1(s)$ (рисунок 5). В окрестности точек $t_i = (\frac{\pi}{2} + i\pi - \varphi_0)/\omega_0$, i = 0; 1, где $s(t_i) \approx \pm A_m$, производная (скорость) мала $s(t_i) \approx 0$, время пребывания синусоиды в заданном интервале велико, и поэтому плотность вероятности стремится к бесконечности. Наоборот, в окрестности точек $t_j = (j\pi - \varphi_0)/\omega_0$, j = 0; 1, производная (скорость) велика $s(t_j) \approx \pm\ \omega_0 A_m$, время пребывания синусоиды в заданном интервале мало, и плотность вероятности имеет наименьшее значение.

4.2 Плотность вероятности суммы двух независимых СП

Для гармонического колебания $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с равномерно распределенной начальной фазой и нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением:

$$\zeta(t) = s(t) + \xi(t),$$

имеем:

$$w_2(s,\xi) = w_1(s) w_1(\xi) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi(A_0^2 - s^2)}} e^{-\xi^2/2\sigma^2}, \qquad |s| \le A.$$

Одномерная плотность вероятности СП $\zeta(t)$ определяется выражением:

$$w_1(\varsigma) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A_0}^{A_0} \frac{1}{\sqrt{A_0^2 - s^2}} \exp\left[-\frac{(\varsigma - s)^2}{2\sigma^2}\right] ds.$$

Введя новую переменную согласно равенству $s = A_0 \cos \Psi$, $(ds = -A_0 \sin \psi d\psi = -\sqrt{A_0^2 - s^2} d\psi)$, получим:

$$w_1(\varsigma) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\pi} \exp\left[-\frac{(\varsigma - A_0 \cos\psi)^2}{2\sigma^2}\right] d\psi.$$

Введя нормированную случайную переменную $\overset{\circ}{\varsigma} = \varsigma/\sigma$ и обозначив через $\alpha = A_0/\sigma$ величину, характеризующую отношение сигнал/шум по напряжению, получим окончательную формулу:

$$w(\overset{\circ}{\varsigma}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(\overset{\circ}{\varsigma} - a\cos\psi)^2 \right] d\psi.$$

Графики этой плотности вероятности для нескольких значений параметра a приведены на рисунке 6.

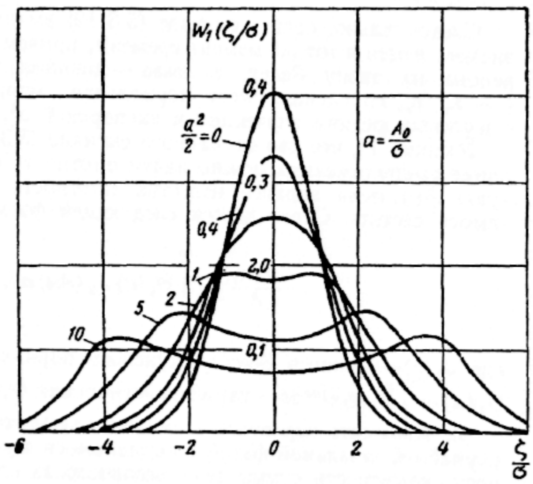

Рисунок 6 – Плотность вероятности суммы нормального шума и гармонического сигнала со случайной начальной фазой.

5 Лабораторное задание

5.1 Получите с помощью ПК реализации сигналов, графики плотности вероятности, по которым определите параметры (m и σ).

5.2 Установите связь между характером реализации процесса, формой графика плотности вероятности и его параметрами.

6 Методические указания

6.1 Гармонический сигнал со случайной начальной фазой

6.1.1 Проведите калибровку осциллографа. Для этого соедините вход вольтметра, работающего в режиме измерения переменного напряжения, с гнездом «1 кГц» в блоке ИСТОЧНИКИ СИГ-

НАЛОВ. Ручкой регулятора выхода генератора установите напряжение 0,707 В. Напомним, что измерительные приборы показывают действующее значение гармонического сигнала: $U_m = \sqrt{2}\,U =$ $= 0{,}707\sqrt{2} = 1{,}0$ В.

Не меняя регулировки выходного напряжения, замените вольтметр осциллографом. Отрегулируйте масштаб усиления осциллографа так, чтобы размах сигнала по вертикали составлял 2 клетки, т. е. амплитуда $a = 1$ клетке. На этом калибровка закончена и в дальнейшем её менять не следует. Итак, одна клетка на экране осциллографа теперь соответствует 1,0 В.

6.1.2 Зафиксируйте реализацию (осциллограмму) исследуемого сигнала. В случаях, когда исследуется непериодический сигнал, сделать это по осциллографу затруднительно. В этом случае исследуемый сигнал следует подать на гнездо «А» входа ПК на стенде, а затем вызвать программу «ОСЦИЛЛОГРАФ», которая позволяет «остановить» картинку и при необходимости изменить ее масштаб.

6.1.3 Соедините вход «А» ПК (он расположен в правой части стенда, внизу) с гнездом генератора «1 кГц». При этом уровень сигнала не менять; $U_m = 1{,}0$ В.

Перевести ПК в режим «ГИСТОГРАММА».

6.1.4 В отчёте зафиксируйте:

- график плотности вероятности;
- m и σ (или σ^2);
- реализацию (осциллограмму п.6.1.2);
- условия эксперимента.

6.1.5 Пользуясь вольтметром или осциллографом, уменьшите сигнал с выхода генератора «1 кГц» в 2 раза, т. е. установите $U_m = 0{,}5$ В (или $U = 0{,}35$ В).

6.1.6 Повторите п. 6.1.4.

6.2 «Белый» шум.

6.2.1 Соедините гнездо ГШ со входом осциллографа, установите напряжение шума таким, чтобы максимальная ширина шумовой «дорожки» на экране не превышала 6 клеток. Согласно «правилу трёх сигм» нормального закона это означает, что $6\sigma = 6$ клеток, или $\sigma = 1$ клетке, т. е. в соответствии с калибровкой, $\sigma = 1{,}0$ В.

Соедините вход ПК («А») с гнездом выхода ГШ.

6.2.2 Повторите п. 6.1.4.

6.2.3 Контролируя напряжение шума по экрану осциллографа, уменьшите (ручкой выхода ГШ) напряжение шума в 2 раза. При этом σ будет соответствовать половине клетки, т.е. 0,5 В.

6.2.4 Повторите п. 6.1.4.

6.3 Аддитивная смесь гармонического сигнала и «белого» шума.

6.3.1 Подключите осциллограф к выходу сумматора. Подайте на один из входов гармонический сигнал (второй вход свободен). Отрегулируйте (если нарушена предыдущая регулировка) a = 0,5 клетки ручкой выхода генератора «1 кГц». Затем, отключив сигнал от входа сумматора, на второй его вход подайте шум. Ширина шумовой «дорожки» на экране осциллографа должна быть 3 клетки. При необходимости отрегулируйте выходное напряжение ГШ. Восстановите схему, подключив источник «1 кГц» ко входу сумматора. Таким образом, выставлено соотношение сигнал/шум $a/\sigma = 1$.

6.3.2 Повторите п. 6.1.4.

6.3.3 Отключив шум, увеличьте сигнал в 2 раза (размах сигнала на экране осциллографа должен быть 2 клетки), а напряжение шума сохраните прежним. Восстановите схему, подключив источник шума к сумматору. Теперь $a/\sigma = 2$.

6.3.4 Повторите п. 6.1.4.

6.3.5 Установите отношение $a/\sigma = 3$.

6.3.6 Повторите п. 6.1.4.

7 Отчёт

Отчёт по форме и содержанию должен соответствовать требованиям, изложенным в разделе 3 (Оформление отчётов) Общих положений.

Отчёт должен содержать:

1) структурную схему соединений лабораторной установки для выполнения исследований;
2) графики реализаций сигналов;
3) результаты измерений $w(x)$, m и σ;
4) обобщённые выводы по результатам исследований.

8 Контрольные вопросы

1) Нарисуйте график плотности вероятности любого сигнала. Объясните, что отложено по осям, размерности. Объясните смысл понятия «плотность вероятности».

2) Как практически определить плотность вероятности?

3) Что такое нормальный случайный процесс? Его аналитическая запись.

4) Изобразите график $w(x)$ для нормального закона и его изменения при увеличении или уменьшении σ и m.

5) Как по графику $w(x)$ нормального закона найти математическое ожидание и дисперсию?

6) Как определить вероятность попадания в заданный интервал Δx по:

- графику плотности вероятности;
- графику функции распределения.

7) Объясните физический смысл понятий математическое ожидание и дисперсия применительно к сигналам связи?

8) В чём состоит различие стационарных и нестационарных процессов?

9) Дайте определение эргодического случайного процесса?

10) Что такое случайный процесс и его реализация?