

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

16.01. 2017 г.

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
методические указания по выполнению практической и
самостоятельной работы
для студентов направления
15.03.06 Мехатроника и робототехника

Курск 2017

УДК 681.323

Составители: Яцун С.Ф., Лушников Б.В.

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент Юго-Западного государственного университета *П.А. Безмен*

Теория автоматического управления: методические указания по выполнению практической и самостоятельной работы для студентов направления 15.03.06 Мехатроника и робототехника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.Ф. Яцун, Б.В. Лушников. - Курск, 2017. 33 с.

Изложены теоретические предпосылки, задания и примеры решения задач по дисциплине «Теория автоматического управления».

Методические указания предназначены для студентов направления 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 30 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Практическое занятие №1

ПОРЯДОК СОСТАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ САУ

Введение

Для расчета различных систем автоматического управления их обычно разбивают на отдельные элементы, динамическими характеристиками которых являются дифференциальные уравнения не выше второго порядка. Причем различные по своей физической природе элементы могут описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, поэтому их относят к определенным классам, называемым *типовыми звеньями*.

Изображение системы в виде совокупности типовых звеньев с указанием связей между ними называется *структурной схемой*. Она может быть получена на основе как дифференциальных уравнений, так и передаточных функций. Данный способ и составляет суть *структурного метода*, т. е. метода представления систем автоматического управления различной физической природы.

Хотя структурный метод не предлагает новых способов расчета, он позволяет наглядно представить взаимосвязь элементов системы и оценить при наличии соответствующего опыта отдельные свойства переходных и статических процессов. Он настолько широко используется в практике проектирования, что, по существу, может считаться одним из «языков», на котором обсуждаются свойства систем автоматического управления.

1.1 Структурные схемы

Структурной схемой будем называть графическую модель системы, в которой каждому элементу ставится в соответствие его динамическая характеристика. Такая схема наглядно отражает состав системы и связи между отдельными ее составляющими.

При изображении структурной схемы будем придерживаться следующих обозначений ее элементов:

- блок с указанной внутри него динамической характеристикой элемента; входной и выходной сигналы блока обозначаются стрелками (рис. 1.1);



Рисунок 1.1. Изображение блоков на структурной схеме

- сумматор (рис. 1.2), выход которого равен сумме входных сигналов. Знак каждого сигнала может быть указан возле соответствующего входа (рис. 1.2, а) или внутри сумматора; при этом знак «-» относится к перпендикулярно входящему сигналу (рис. 1.2,б);

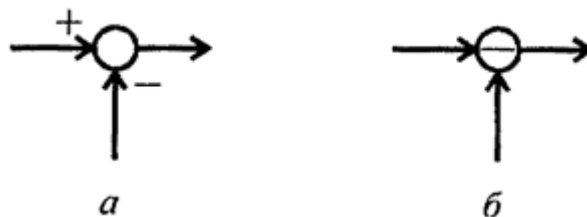


Рисунок 1.2 Условное изображение сумматора на структурной схеме

- интегратор на структурной схеме будем условно обозначать символом интегрирования (рис. 1.3, а) или в операторной форме (рис. 1.3, б);

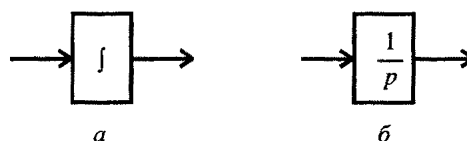


Рисунок 1.3 Условное изображение интегратора

Структурная схема может быть построена на основе как дифференциальных уравнений, так и передаточных функций.

Отметим, что переход от исходной передаточной функции или уравнения системы к ее структурной схеме может иметь несколько вариантов решения. Возможен и обратный переход, т. е. на основе структурной схемы можно

получить дифференциальное уравнение системы, причем эта задача имеет единственное решение.

Рассмотрим вначале структурные схемы, которые получены с использованием передаточных функций. При таком представлении внутри блока указываются передаточная функция звена, а также входной и выходной сигналы (см. рис. 1.2). С целью упрощения структуры системы применяются различные ее преобразования, приведем основные из них.

1.2 Структурные преобразования

1.2.1. Последовательное соединение звеньев

Рассмотрим последовательное соединение типовых звеньев с передаточными функциями $W_i(p)$, $i = \overline{1, m}$, и найдем выражение для общей передаточной функции, связывающей между собой входной и выходной сигналы системы (рис. 1.4).



Рисунок 1.4. Последовательное соединение m звеньев

Правило: передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций всех звеньев, т. е.

$$W(p) = \frac{y}{u} = \prod_{i=1}^m W_i(p). \quad (1.1)$$

В этом нетрудно убедиться, если выходную переменную системы представить в виде произведения передаточной функции звена; и соответствующего входного сигнала

$$y = W_m(p)x_{m-1} = W_m(p)W_{m-1}(p)x_{m-2} = W_m(p) \cdot \dots \cdot W_1(p)u.$$

Отношение выходного сигнала системы y к ее входному сигналу u представляет собой общую передаточную функцию (1.1) соединения.

1.2.2. Параллельное соединение звеньев

Правило: передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \sum_{i=1}^m W_i(p). \quad (1.2)$$

Параллельное соединение звеньев показано на рис. 1.5. Выходной сигнал системы представляет собой сумму выходных сигналов отдельных звеньев

$$y = y_1 + \dots + y_m = W_1(p)u + \dots + W_m(p)u,$$

следовательно,

общая передаточная функция параллельного соединения имеет вид (1.2).

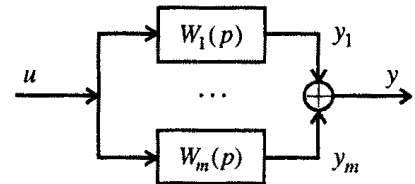


Рис. 1.5. Иллюстрация параллельного соединения звеньев

1.2.3. Обратная связь

Такое соединение звеньев показано на рис. 1.6, причем знак «-» внутри сумматора означает отрицательную обратную связь.

Для определения общей передаточной функции запишем выражение для выходной переменной системы

$$y = W_1(p)[u - z] = W_1(p)[u - W_2(p)y]$$

После несложных преобразований получим

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (1.3)$$

Правило: передаточная функция системы с *отрицательной* обратной связью равна дроби, в числителе которой стоит передаточная функция прямого

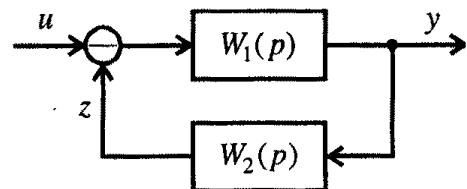


Рис. 1.6. Структурная схема системы с обратной связью

канала $W_1(p)$, а знаменатель представляет собой сумму единицы и произведения передаточных функций прямого и обратного каналов системы.

В случае *положительной* обратной связи формула (1.4) принимает вид

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (1.4)$$

На практике обычно встречаются системы с отрицательной обратной связью, для которых передаточная функция находится по соотношению (1.3).

1.2.4. Правило переноса

В некоторых случаях для получения общей передаточной функции системы с помощью структурных преобразований удобнее было бы перенести точку приложения сигнала через звено ближе к выходу или входу. При таком преобразовании структурной схемы следует придерживаться *правила*: передаточная функция системы должна оставаться неизменной.

Рассмотрим ситуацию, когда точка приложения сигнала переносится через звено ближе к выходу. Исходная структура системы показана на рис. 1.7. Определим для нее результирующую передаточную функцию

$$W(p) = W_2(p)[W_1(p) + W_3(p)]. \quad (1.5)$$

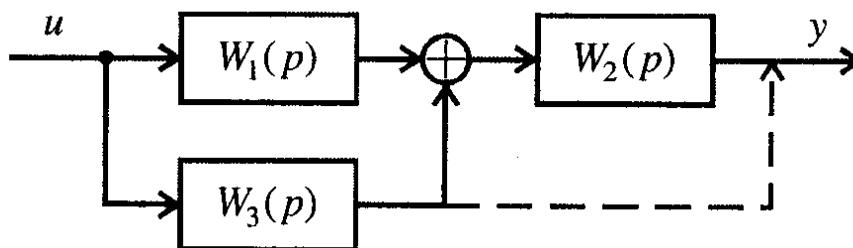


Рисунок 1.7. Структурная схема исходной системы

Перенесем точку приложения сигнала через звено с передаточной функцией $W_2(p)$, добавив в этот канал некоторую передаточную функцию $W_4(p)$. Получим структурную схему преобразованной системы (рис. 1.8).

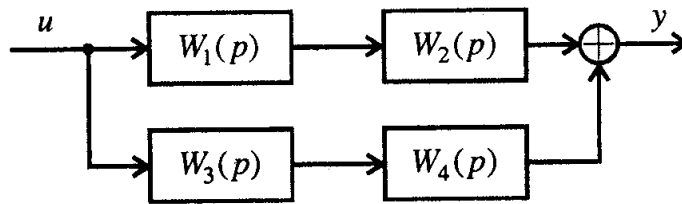


Рисунок 1.8. Структурная схема преобразованной системы

Для нее передаточная функция имеет вид

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) + W_3(p)W_4(p). \quad (1.6)$$

Поскольку при преобразовании структуры системы ее передаточная функция не должна измениться, приравняв правые части выражений (1.5) и (1.6), определим искомую передаточную функцию $W_4(p)$:

$$W_4(p) = W_2(p). \quad (1.7)$$

Таким образом, при переносе точки приложения сигнала ближе к выходу системы в канал следует добавить передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

Аналогичное *правило* можно сформулировать для переноса точки приложения сигнала ближе к входу системы: в соответствующий канал следует добавить обратную передаточную функцию звена, через которое переносится сигнал.

Пример 1.1

Определить общую передаточную функцию системы, структурная схема которой приведена на рис. 1.9.

Предварительно определим передаточные функции типовых соединений звеньев: передаточная функция параллельного соединения звеньев:

$$\bar{W}_1(p) = W_1(p) + W_2(p),$$

а передаточная функция последовательно соединенных звеньев

$$\bar{W}_2(p) = \bar{W}_1(p)W_3(p).$$

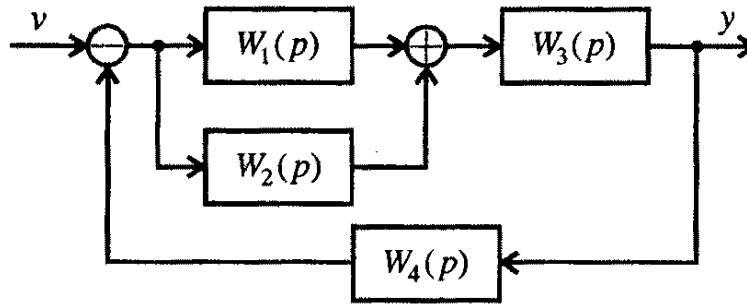


Рисунок 1.9. Структурная схема системы

С учетом введенных обозначений структуру системы можно привести к виду, изображенному на рис. 1.10.

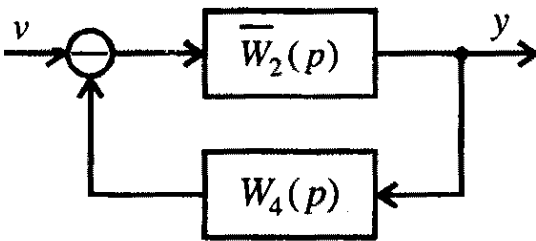


Рис. 1.10. Структурная схема эквивалентной системы

Используя структурные преобразования, запишем общую передаточную функцию системы

Подставляя вместо $\bar{W}_1(p)$ и $\bar{W}_2(p)$ их значения, получим окончательно

$$W(p) = \frac{[W_1(p) + W_2(p)]W_3(p)}{1 + [W_1(p) + W_2(p)]W_3(p)W_4(p)}$$

Пример 1.2

Определить передаточную функцию системы автоматического сопровождения цели радиолокационной станции, структурная схема которой представлена на рис. 1.11.

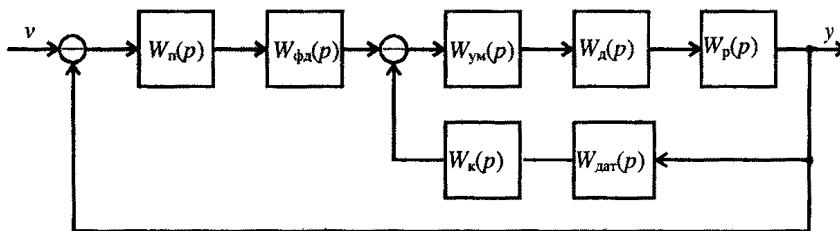


Рисунок 1.11. Структурная схема системы автоматического сопровождения цели

Здесь $W_n(p)$ - передаточная функция приемника системы; $W_{\phi\delta}(p)$ - передаточная функция фазового детектора; $W_{y.m}(p)$ - передаточная функция усилителя мощности; $W_d(p)$ - передаточная функция двигателя; $W_p(p)$ - передаточная функция редуктора; $W_{дат}(P)$ - передаточная функция датчика частоты вращения антенны; $W_k(p)$ - передаточная функция корректирующего устройства.

Используя правила структурных преобразований, запишем

$$W_1(p) = W_{y.m}(p)W_d(p)W_p(p),$$

передаточную функцию

$$W_2(p) = W_{дат}(p)W_k(p)$$

и

$$W_3(p) = W_n(p)W_{\phi.d}(p).$$

Определим передаточную функцию внутреннего контура

$$W_4(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}$$

и прямого канала системы

$$W_5(p) = W_3(p)W_4(p).$$

Определим полную передаточную функцию системы

$$W(p) = \frac{y}{v} = \frac{W_5(p)}{1 + W_5(p)}.$$

Подставляя вместо промежуточных передаточных функций, исходные значения, получим окончательно

$$W(p) = \frac{y}{v} = \frac{W_n(p)W_{\phi.d}(p)W_{y.m}(p)W_d(p)W_p(p)}{1 + W_{y.m}(p)W_d(p)W_p(p)W_{дат}(p)W_k(p) + W_n(p)W_{\phi.d}(p)},$$

1.3. Структурные схемы, соответствующие дифференциальным уравнениям

Второй способ составления структурной схемы основан на использовании дифференциальных уравнений. Рассмотрим его сначала для объекта, поведение которого описывают векторное матричные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ y = Cx, & y \in R^m, \quad n \geq m. \end{cases} \quad (1.8)$$

Проинтегрируем уравнение состояния в (1.8) по времени и определим переменные состояния и выхода в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t (Ax + Bu) d\tau, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) являются основными для составления схемы.

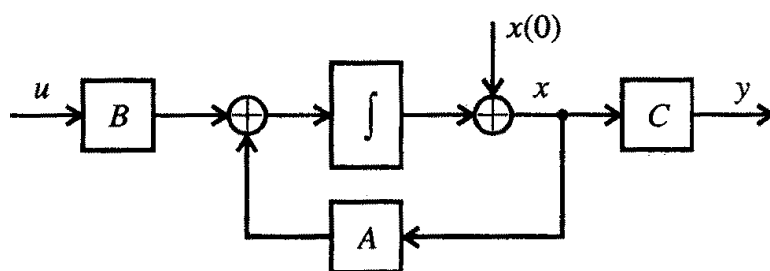


Рисунок 1.12. Структурная схема, соответствующая уравнениям состояния объекта

Структурную схему, соответствующую уравнениям (1.9), удобнее изображать, начиная с выходных переменных y , причем входные и выходные переменные объекта желательно располагать на одной горизонтальной прямой (рис. 1.12).

Для одноканального объекта структурную схему можно составить по уравнению, разрешив его относительно старшей производной

$$y^{(n)} = -a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu. \quad (1.10)$$

Проинтегрировав (1.10) n раз, получим

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = y^{(n-1)}(0) + \int_0^t y^{(n)}(t) dt, \\ \dots \\ \dot{y}(t) = \dot{y}(0) + \int_0^t \ddot{y}(t) dt, \\ y(t) = y(0) + \int_0^t (-a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu) dt. \end{cases} \quad (1.11)$$

Системе уравнений (1.11) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 1.13.

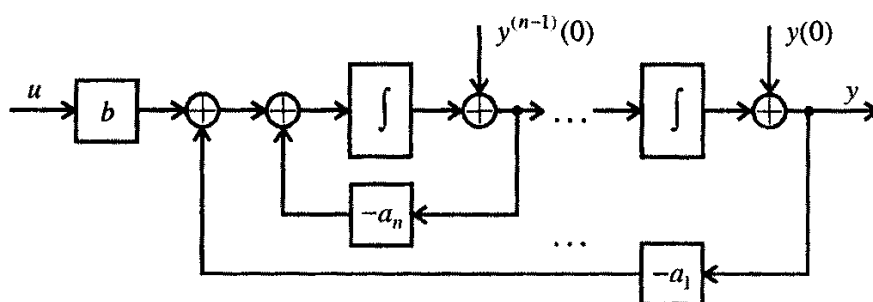


Рисунок 1.13. Структурная схема, соответствующая уравнению (1.11)

Как видим, одноканальный объект управления, поведение которого описывает уравнение (1.11), структурно всегда можно представить в виде цепочки из n последовательно соединенных интеграторов с обратными связями.

Пример 1.3

Изобразить структурную схему объекта, модель которого задана следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 5x_2 + 2u, \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Предварительно проинтегрируем уравнения состояния

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t (-x_1 + 2x_2) dt,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t (-3x_1 - 5x_2 + 2u) dt,$$

$$y = x_1 + x_2.$$

В соответствии с интегральными уравнениями на рис. 1.14 изобразим структурную схему системы.

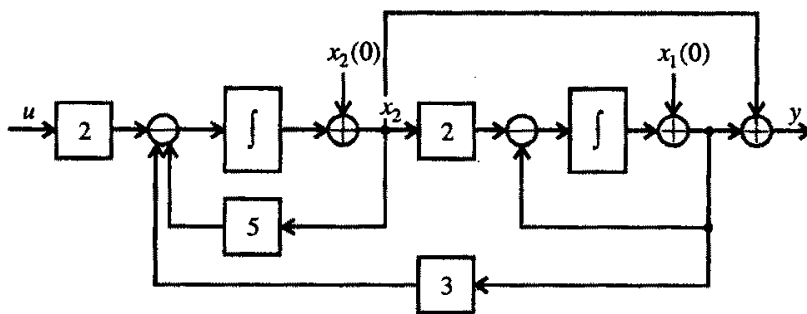


Рисунок 1.14. Иллюстрация составления структурной схемы по уравнениям состояния

1.4 Задания для самостоятельной работы

<p>1.1 Известно описание объекта САУ в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $0.5\ddot{y} + 3\dot{y} + 5y = 1.2u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
<p>1.2 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $3.5\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 3u + 5\dot{u}.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
<p>1.3 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $6\ddot{y} + 4\dot{y} + 2.7y = 5u + u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
<p>1.4 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $7\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y + 3y = 3.5u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
<p>1.5 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной</p>

<p>переменных</p> $2\ddot{u} + 6\ddot{u} + 5\dot{u} + 2.5u = 6i + 3u.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.6 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $7\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.7 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $3\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 6i + 2i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.8 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $3\ddot{y} + 6\dot{y} + 2y + 8y = 3.8i + 4i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.9 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $2.6\ddot{y} + 7\dot{y} + 2y + 8y = 3i + 5i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.10 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $2\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = 7i + 8i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.11 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $0.3\ddot{y} + 2.6\dot{y} + 5y + 7y = 0.5i + 2i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.12 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p> $3\ddot{y} + 7.6\dot{y} + 5.3y + y = 4i.$ <ol style="list-style-type: none"> 1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.
<p>1.13 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных</p>

$5\ddot{u} + 7\ddot{u} + 4.8y = 1.8\ddot{u} + 3u.$ <p>) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.14 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $5\ddot{u} + 3\ddot{u} + 9\ddot{u} + 2.5y = 4u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.15 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $0.3\ddot{u} + 0.45\ddot{u} + 0.65\ddot{u} + 2y = 0.04\ddot{u} + 2u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.16 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $7\ddot{u} + 6\ddot{u} + 9\ddot{u} + 2y = 8u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.17 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $7\ddot{u} + 3.6\ddot{u} + 2.5\ddot{u} + 4y = 8\ddot{u} + 2u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.18 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $4\ddot{u} + 2.8\ddot{u} + 4y = 3\ddot{u} + 5u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.19 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $3\ddot{u} + 8\ddot{u} + 7y = 4\ddot{u} + 2u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>
1.20 Известно описание объекта в виде дифференциального уравнения относительно входной и выходной переменных $5\ddot{u} + 7\ddot{u} + 3.6\ddot{u} + 2.4y = u.$ <p>1) Построить структурную схему САУ; 2) Определить передаточную функцию САУ; 3) Записать модель в переменных состояния и определить матрицы объекта А,В,С.</p>

Контрольные вопросы

1. Что такое структурная схема САУ?
2. Что такое передаточная функция?
3. Чему равна эквивалентная передаточная функция последовательного соединения трех известных передаточных функций?
4. Как определить передаточную функцию замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью при заданной передаточной функцией разомкнутой системы?
5. Каков общий порядок построения структурной схемы системы управления, заданной с помощью дифференциального уравнения?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1978.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е. Л.* Теория автоматического регулирования. - М.: Наука, 1974.
3. *Востриков А.С.* Теория автоматического регулирования: Учебное пособие для вузов / А.С. Востриков, Г.А. Французова. – 2-е изд.. –М.:Высш.шк., 2006.- 365 с.
4. *Ерофеев А. А.* Теория автоматического управления. - СПб.: Политехника, 1998.
5. *Иващенко Н.Н.* Автоматическое регулирование. - М.: Машиностроение, 1978.
6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. -М.: Высш. шк., 1986.
7. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Высш. шк., 1989.
8. *Коновалов Г.Ф.* Радиоавтоматика. - М.: Высш. шк., 1990.
9. *Филипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.

2. Практическое занятие №2

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ САУ

2.1. Пропорциональное (усилительное) звено

Пропорциональным называется звено, поведение которого описывает алгебраическое уравнение

$$y = ku, \quad (2.1)$$

где k - коэффициент усиления. Строго говоря, это звено не является динамическим, но относится к типовым.

Примерами таких звеньев могут служить безынерционные усилители, механические редукторы, многие датчики сигналов и т. д. Передаточная функция звена следующая:

$$W(p) = \frac{y}{u} = k.$$

Переходная характеристика (реакция звена на скачкообразное входное воздействие $1(t)$) имеет вид

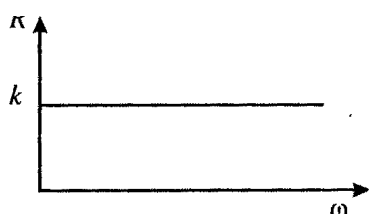
$$h(t) = k1(t).$$

Импульсная переходная функция пропорционального звена определяется выражением

$$g(t) = k\delta(t).$$

Модальные характеристики (собственные значения и собственные векторы) для него отсутствуют.

Заменив в передаточной функции p на $j\omega$, получим выражения для частотных характеристик. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой точку на комплексной плоскости в соответствии с формулой



соответствии с формулой

$$W(j\omega) = k.$$

Рис. 2.1. Вещественная частотная характеристика

Вещественная частотная характеристика определяется соотношением (рис. 2.1)

$$R(\omega) = k,$$

а мнимая частотная характеристика отсутствует ($I(\omega) = 0$).

Амплитудная частотная характеристика может быть построена по соотношению

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = R(\omega) = k \quad (2.2)$$

и имеет тот же вид, что и ВЧХ. Выражение для ФЧХ следующее:

$$\varphi(\omega) = \arctg[I(\omega) / R(\omega)] = 0 \quad (2.3)$$

Таким образом, при прохождении через пропорциональное звено амплитуда периодического входного сигнала изменяется в k раз, а фазовый сдвиг отсутствует.

Амплитудно-фазовая характеристика звена имеет вид точки на комплексной плоскости (рис. 3.2).

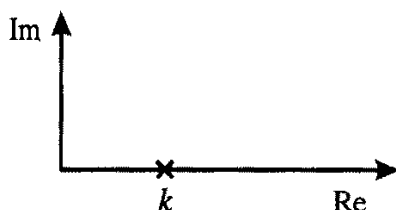


Рис. 2.2. Амплитудно-фазовая характеристика звена

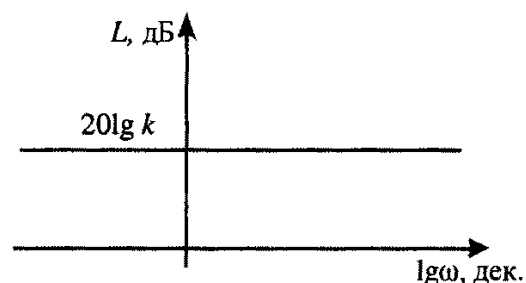


Рис. 2.3. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пропорционального звена

Логарифмическая АЧХ звена представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k. \quad (2.4)$$

Как следует из выражений (2.2, 2.3) и рис. 2.3, пропорциональное звено пропускает входные сигналы без искажений.

2.2 Дифференцирующее звено

Дифференцирующим называется звено, которое описывается дифференциальным уравнением

$$y = ki\dot{x} \quad (2.6)$$

Его передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{y}{x} = kp.$$

Примером дифференцирующего звена часто может служить тахогенератор постоянного тока. Переходная характеристика дифференцирующего звена определяется выражением

$$h(t) = k\delta(t)$$

и имеет вид δ -функции (рис. 2.4).

Импульсная переходная функция (рис. 2.5) представляет собой «дуплет» δ -функций

$$g(t) = k\delta'(t).$$

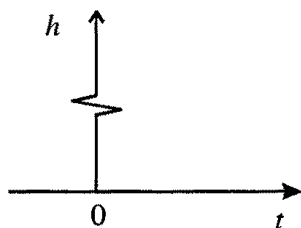


Рис. 2.4. Переходная характеристика звена

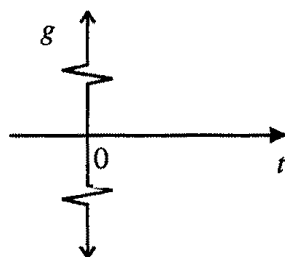


Рис. 2.5. Импульсная переходная характеристика

Рассмотрим теперь частотные характеристики звена. Амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = jk\omega$$

совпадает с положительной мнимой полуосью комплексной плоскости; вещественная частотная характеристика равна нулю. $R(\omega) = 0$; мнимая частотная характеристика соответствует выражению

$$I(\omega) = k\omega,$$

т. е. представляет собой линейно нарастающую функцию. С ней совпадает амплитудная частотная характеристика, которая имеет вид

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = I(\omega) = k\omega,$$

Фазовую частотную характеристику можно определить по отношению

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = 90^\circ,$$

Следовательно, на всех частотах имеется постоянный фазовый сдвиг.

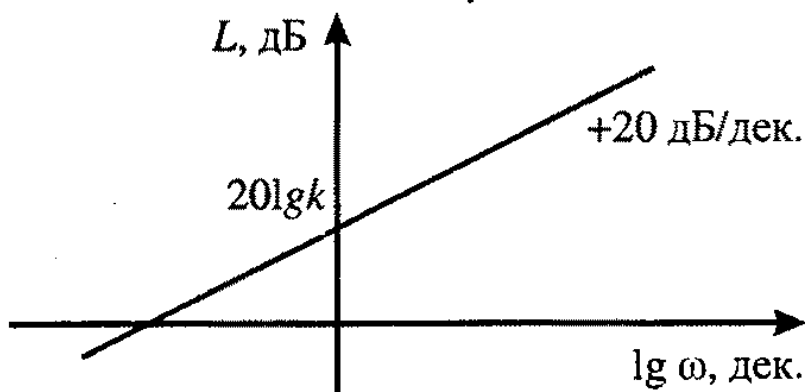


Рис. 2.6. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика дифференцирующего звена

Логарифмическая частотная характеристика следующая:

$$L(\omega) = 20 \lg k \omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega \quad (2.8)$$

Как видно из графика рис. 2.6, дифференцирующее звено усиливает высокочастотные сигналы.

2.3. Интегрирующее звено

Интегрирующим называется звено, поведение которого описывает уравнение

$$y = k \int_0^{\infty} u(\tau) d\tau + y(0). \quad (2.9)$$

Примером интегрирующего звена является операционный усилитель в режиме интегрирования.

Основной динамической характеристикой звена является его дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = ki \quad (2.10)$$

на основе которого можно получить передаточную функцию

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{p} \quad (2.11)$$

Характеристическое уравнение

$$A(p) = p = 0$$

имеет единственный корень (полюс), $p = 0$, который представляет собой модальную характеристику интегрирующего звена.

Переходная характеристика звена имеет вид линейно возрастающей функции

$$h(t) = k \int_0^t 1(\tau) d\tau = kt 1(t)$$

а импульсная переходная функция - ступенчатой функции

$$g(t) = k \int_0^t \delta(\tau) d\tau = k1(t)$$

Выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики (рис. 2.7) получим, заменив в (2.11) p на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

Вещественная частотная характеристика отсутствует, $R(\omega)=0$ Мнимая частотная характеристика имеет вид

$$I(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

а амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega}.$$

При этом фазовая частотная характеристика следующая:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = -90^\circ, \quad (2.12)$$

т. е. звено имеет постоянный фазовый сдвиг, который не зависит частоты.

Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего звена имеет вид прямой, совпадающей с отрицательной мнимой полуосью комплексной плоскости (рис. 2.7).

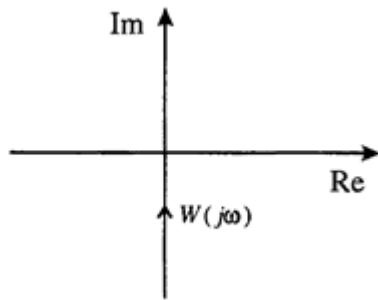


Рис. 2.7. Амплитудно-фазовая характеристика интегрирующего звена

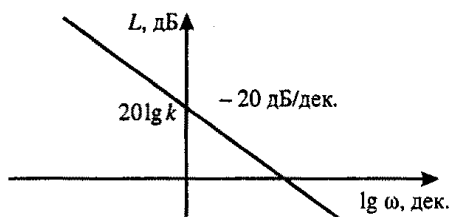


Рис. 2.8. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика интегрирующего звена

Запишем выражение для логарифмической амплитудно – частотной характеристики

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad (2.13)$$

И изобразим ее график (рис. 2.8).

Как видим, логарифмическая амплитудная частотная характеристика интегратора представляет собой прямую с наклоном - 20 дБ/дек. и пересекает ось ординат в точке $20 \lg k$. Она показывает, что звено усиливает низкочастотные сигналы и ослабляет высокочастотные.

2.4. Аперидическое звено

Аперидическим называется звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$\dot{y} + a_0 y = b u \quad (2.14)$$

Различного типа двигатели являются примерами такого звена. Дифференциальное уравнение аперидического звена принято записывать в стандартном виде:

$$T \dot{y} + y = k u \quad (2.15)$$

где $T = 1/a_0$ - постоянная времени; $k = b/a_0$ - коэффициент усиления звена.

Заменив в (2.15) d/dt на p , перейдем к символической записи дифференциального уравнения

$$(Tp + 1)y = k u \quad (2.16)$$

и найдем передаточную функцию аперидического звена:

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{Tp+1}. \quad (2.17)$$

Для определения модальных характеристик по передаточной функции (2.17) запишем характеристическое уравнение

$$A(p) = Tp + 1 = 0. \quad (2.18)$$

Оно имеет единственный корень (полюс), $p = -1/T$.

Переходную характеристику звена (рис. 2.9) можно найти решение уравнения (2.17) при $u = 1(t)$ и $y(0) = 0$:

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t). \quad (2.19)$$



Рис. 2.9. Переходная характеристика

Импульсную переходную функцию (рис. 2.10) вычислим по соотношению

$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} 1(t) \quad (2.20)$$

Выражение, соответствующее амплитудно-фазовой характеристике апериодического звена, имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + Tj\omega} = \frac{(1 - Tj\omega)k}{1 + T^2\omega^2} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{T\omega k}{1 + T^2\omega^2} \quad (2.21)$$

По выражению

$$R(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}. \quad (2.22)$$

можно построить его вещественную частотную характеристику (рис.2.11).

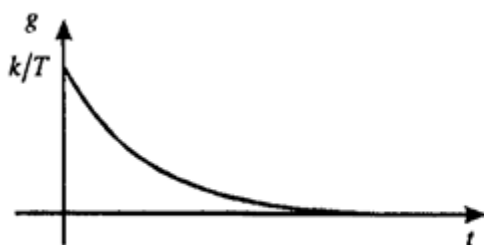


Рис. 2.10. Импульсная переходная функция

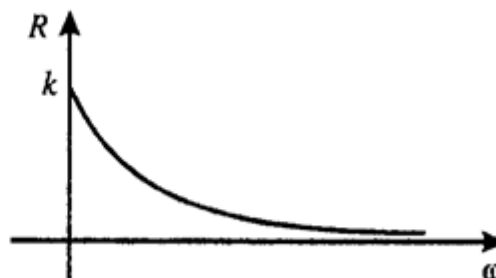


Рис. 2.11. Вещественная частотная характеристика апериодического звена

Мнимая частотная характеристика (рис. 2.12) аperiodического звена соответствует уравнению

$$I(\omega) = -\frac{T\omega k}{1 + T^2\omega^2}. \quad (2.23)$$

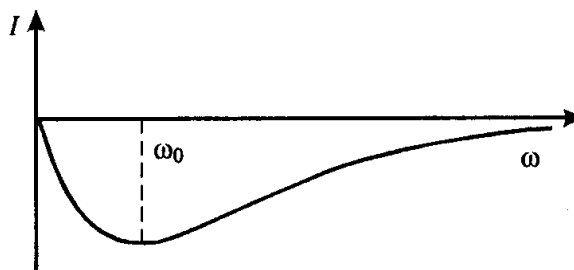


Рис. 2.12. Мнимая частотная характеристика аperiodического звена

Амплитудную частотную характеристику (рис. 2.13) описывает выражение

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (2.24)$$

Фазовая частотная характеристика звена определяется соотношением

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \operatorname{arctg}(-\omega T), \quad (2.25)$$

Она представляет собой кривую (рис. 2.14) с пределом $\varphi(\infty) = -\pi/2$

На комплексной плоскости по выражению (2.21) можно построить амплитудно-фазовую характеристику аperiodического звена, которая имеет вид полуокружности (рис. 2.15).

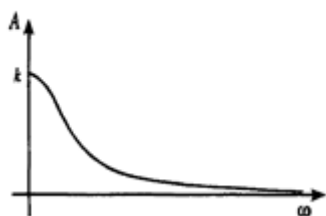


Рис. 2.13. АЧХ аperiodического звена

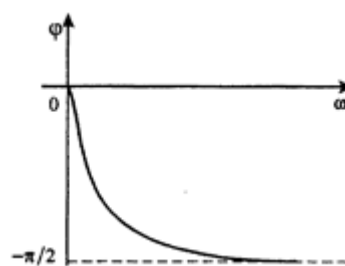


Рис. 2.14. ФЧХ аperiodического звена

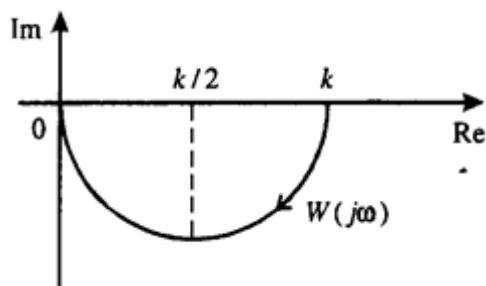


Рис. 2.15. Амплитудно-фазовая характеристика аperiodического звена

Запишем выражение для логарифмической амплитудной частотной характеристики

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg(1 + T^2 \omega^2). \quad (2.26)$$

Наиболее просто для звена можно построить асимптотическую логарифмическую амплитудную частотную характеристику. В этом случае следует рассмотреть отдельно области высоких низких частот и для каждой определить свою асимптоту:

1) в области низких частот, когда $\omega \ll 1/T$ вместо точной ЛАЧХ (2.26) можно рассмотреть приближенную

$$L_1(\omega) = 20 \lg k; \quad (2.27)$$

2) в области высоких частот при $\omega \gg 1/T$ вторая асимптота имеет вид

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg(T\omega); \quad \text{На частоте } \omega_0 = 1/T \text{ которая называется}$$

собственной частотой аperiodического звена, справедливо условие

$$L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0)$$

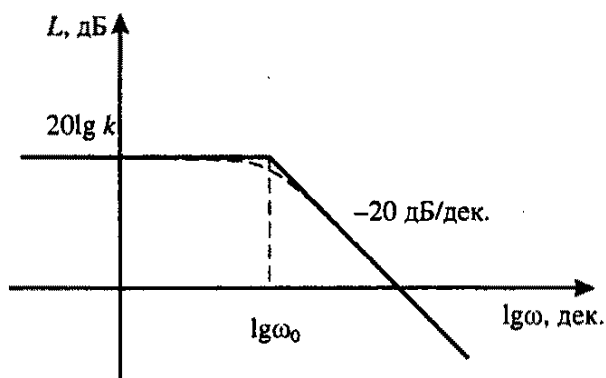


Рис. 2.16. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика аperiodического звена

Точная характеристика звена на рис. 2.16 показана пунктирной линией и несколько отличается от асимптотической ЛАЧХ, причем наибольшая погрешность будет на

собственной частоте ω_0 .

2.5. Форсирующее звено

Форсирующим называется звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$y = k_1 u + k_2 \dot{u} \quad (2.28)$$

Нетрудно убедиться в том, что (2.28) можно представить как сумму уравнений пропорционального и дифференцирующего звеньев.

Передающую функцию форсирующего звена

$$W(p) = \frac{y}{u} = k_1 + k_2 p$$

Принято записывать в стандартной форме

$$W(p) = k(1 + Tp) \quad (2.29)$$

где $k = k_1$ - коэффициент усиления, а $T = k_2 / k_1$ - постоянная времени звена.

Передающая функция (2.29) содержит полином в числителе, корень которого $n = 1/T$ называется «нулем» форсирующего звена.

Его переходная характеристика определяется соотношением

$$h(t) = k_1 1(t) + k_2 \delta(t) \quad (2.30)$$

Качественный вид ее приведен на рис. 3.17.

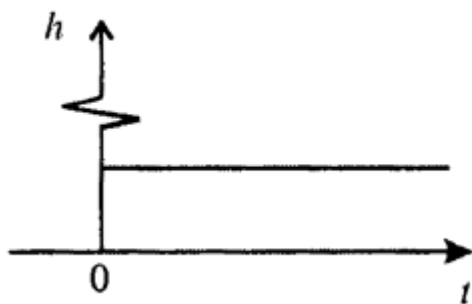


Рис. 3.17. Переходная характеристика форсирующего звена

Импульсная переходная функция звена

следующая:

$$g(t) = \dot{h}(t) = k_1 \delta(t) + k_2 \dot{\delta}(t) \quad (2.31)$$

Обобщенная частотная характеристика

находится по передающей функции (3.33) и

имеет вид

$$W(j\omega) = k(1 + jT\omega) \quad (2.32)$$

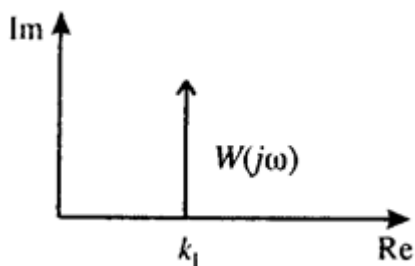


Рис. 2.18. Амплитудно-фазовая характеристика форсирующего звена

Соответствующая амплитудно-фазовая характеристика изображена на рис. 2.18.

Вещественная частотная характеристика звена не зависит от частоты и равна $R(\omega) = k$, мнимая частотная характеристика представляет собой прямую

$$I(\omega) = kT\omega.$$

Амплитудная частотная характеристика может быть построена по выражению

$$A(\omega) = k\sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

а фазовая частотная характеристика определяется в виде

$$\phi(\omega) = \text{arctg}(\omega T) \quad (2.33)$$

причем в пределе $\phi(\infty) = \pi/2$.

На основании выражения для $A(\omega)$ определим логарифмическую амплитудную частотную характеристику

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k + 10\lg(1 + T^2\omega^2) \quad (2.34)$$

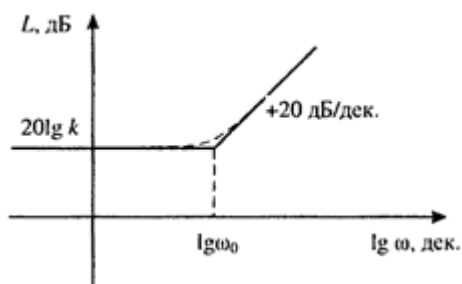


Рис. 2.19 Асимптотическая ЛАЧХ форсирующего звена

Как и в предыдущем случае, для форсирующего звена удобнее строить не точную, а асимптотическую ЛАЧХ (рис. 2.19). Здесь $\omega_0 = 1/T$ - собственная частота звена.

дифференцирующего звеньев.

Причем ее можно получить, исследуя отдельно области низких и высоких частот или суммируя ЛАЧХ пропорционального и

Нетрудно убедиться, сравнивая выражения (2.25) и (2.26) с выражениями (2.33) и (2.34), в том, что логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики форсирующего звена представляют собой зеркальное

отображение относительно оси абсцисс соответствующих логарифмических характеристик апериодического звена.

2.6. Звено второго порядка

Дифференциальное уравнение звена второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = bu \quad (2.35)$$

принято записывать в стандартном виде

$$T^2 \ddot{y} + 2dT \dot{y} + y = ku, \quad (2.36)$$

где $T = \sqrt{1/a_0}$ - постоянная времени звена; d - коэффициент демпфирования, который определяет склонность переходных процессов к колебаниям, $2dT = a_1 / a_0$; $k = b / a_0$ - коэффициент усиления.

Передаточную функцию звена получим на основе, символической записи дифференциального уравнения

$$T^2 p^2 y + 2dTpy + y = ku \quad (2.37)$$

в виде

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}. \quad (2.38)$$

Для определения модальных характеристик запишем характеристическое уравнение звена

$$T^2 p^2 + 2dTp + 1 = 0. \quad (2.39)$$

Оно имеет два корня (полюса), которые в зависимости от коэффициента демпфирования d могут быть вещественными или комплексно-сопряженными, что приводит к различным переходным процессам. Рассмотрим варианты корней.

1. Если $d \geq 1$, то корни уравнения (2.39) вещественные и положительные. Обозначим их через $p_1 = \lambda_1, p_2 = \lambda_2$ и получим переходную функцию (рис. 3.20) в виде

$$h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + k1(t) \quad (2.40)$$

2. Если $0 \leq d < 1$, то корни уравнения (2.39) будут комплексно-сопряженными, т. е. $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ ($\alpha > 0$). При $d=0$ получаем:

$$p_{1,2} = \pm j\beta$$

В случае, когда коэффициент демпфирования изменяется в диапазоне $0 < d < 1$, звено второго порядка называют *колебательным*. Выражение для его переходной характеристики следующее:

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t} (\cos \beta t + c_2) + k1(t) \quad (2.41)$$

Причем колебательность переходного процесса будет тем больше; чем меньше коэффициент демпфирования d . В пределе при $d=0$ будут иметь место незатухающие колебания. В этом случае звено называется *консервативным*. Соответствующие графики переходных процессов представлены на рис. 2.21.

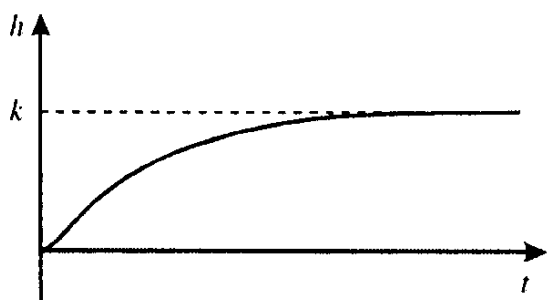


Рис. 3.20. Переходная характеристика звена второго порядка при $d \geq 1$

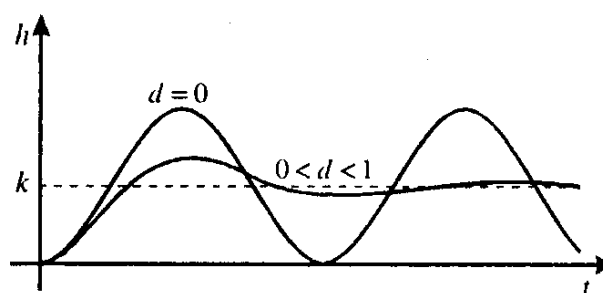


Рис. 3.21. Переходная характеристика звена второго порядка при $0 \leq d \leq 1$

Определим выражение для общей частотной характеристики колебательного звена, заменив p на $j\omega$ в передаточной функции (2.38):

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + 2dTj\omega + (-T^2\omega^2)} = \frac{k - kT^2\omega^2 - jk2dT\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \quad (2.42)$$

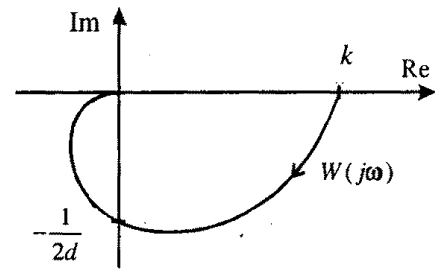
Запишем выражения для вещественной частотной характеристики

$$R(\omega) = \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \quad (2.43)$$

мнимой частотной характеристики:

$$I(\omega) = \frac{k2dT\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \quad (2.44)$$

На основе (2.42) и (2.43) построим АЧХ на комплексной плоскости, рассматривая характерные точки: $\omega = 0$, $\omega = 1/T$, ..., $\omega \rightarrow \infty$. Ее вид существенно зависит от коэффициента демпфирования d (рис. 2.22).



Амплитудно-фазовая характеристика консервативного звена ($d = 0$) начинается в точке k на вещественной оси и при увеличении ω стремится к $+\infty$, а затем из $-\infty$ - к началу координат.

Рис. 2.22. Амплитудно-фазовая характеристика звена второго порядка

Амплитудная частотная характеристика строится на основе выражения

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2}} \quad (2.45)$$

и может иметь резонансный пик, высота которого будет тем больше, чем меньше коэффициент демпфирования d .

Формула для фазовой частотной характеристики имеет вид

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{2d\omega T}{1-T^2\omega^2} \quad (2.46)$$

Построение ЛАЧХ колебательного звена (при $0 < d < 1$) осуществляется по соотношению, полученному из (2.45):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4d^2T^2\omega^2} \quad (2.47)$$

При значениях коэффициента демпфирования в интервале $0,3 \leq d \leq 1$ можно строить упрощенную асимптотическую ЛАЧХ, рассматривая отдельно области высоких и низких частот.

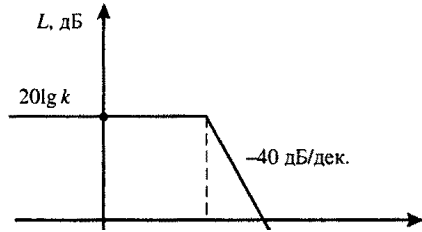


Рис. 2.23. Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена при $0,3 \leq d \leq 1$

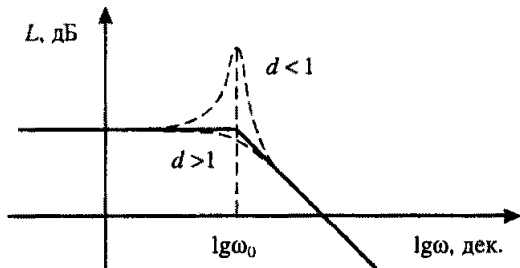


Рис. 3.24. Влияние коэффициента демпфирования на ЛАЧХ звена

В области низких частот ($\omega \ll 1/T$)

$$L_1(\omega) \approx 20 \lg k \quad \text{асимптота имеет вид}$$

В области высоких частот, когда $\omega \gg 1/T$ получим вторую асимптоту (рис.2.23)

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg(T\omega)$$

На собственной частоте колебательного звена $\omega_0 = 1/T$ справедливо соотношение

$$L_1(\omega_0) = L_2(\omega_0)$$

Наибольшее отличие асимптотической ЛАЧХ от действительной

характеристики наблюдается на частоте ω_0 (рис. 2.24) и зависит от величины коэффициента демпфирования.

При значениях $d < 0,3$ не следует пользоваться асимптотической ЛАЧХ, а нужно строить точную логарифмическую характеристику

При $d > 1$ корни характеристического уравнения (2.39) будут вещественными и передаточную функцию звена второго порядка (2.38) можно представить в виде произведения двух передаточных функций аperiodических звеньев:

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \quad (2.48)$$

где $T_1 = 1/\lambda_1, T_2 = 1/\lambda_2$ - постоянные времени аperiodических звеньев. В этом случае асимптотическая ЛАЧХ звена второго порядка имеет два «излома» на частотах $\omega_1 = 1/T_1, \omega_2 = 1/T_2$.

Она может быть получена суммированием асимптотических ЛАЧХ двух аperiodических звеньев.

2.7 Задание для самостоятельной работы

Задача 2.11

Определить, к какому типовому звену относится САУ с передаточной функцией

$$W_{pc} = \frac{1}{7p^2 + 5p + 4}.$$

Задача 2.12

Определить, к какому типовому звену относится САУ с передаточной функцией

$$W_{pc} = \frac{1}{4p^2 + 3p + 2}.$$

Задача 2.13

Определить, к какому типовому звену относится САУ с передаточной функцией

$$W_{pc} = \frac{8}{5p^2 + 4p + 3}.$$

Задача 2.14

Определить, к какому типовому звену относится САУ с передаточной функцией

$$W_{pc} = \frac{5}{7p^2 + 6p + 3}.$$

Задача 2.15

Определить, к какому типовому звену относится САУ с передаточной функцией

$$W_{pc} = \frac{1}{3p^2 + 4p + 5}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие типовые динамические звенья САУ Вы знаете?
2. Что такое переходная характеристика динамического звена?
3. Чем качественно отличаются графики переходного процесса апериодических звеньев первого и второго порядка?
4. Что такое амплитудно-фазовая характеристика типового динамического звена и как её построить?
5. Что такое АЧХ и ФЧХ динамических звеньев и как построить их графики?

ЛИТЕРАТУРА|

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1978.
2. *Бесекерский В.А., Попов Е. Л.* Теория автоматического регулирования. - М.: Наука, 1974.
3. *Востриков А.С.* Теория автоматического регулирования: Учебное пособие для вузов / А.С. Востриков, Г.А. Французова. – 2-е изд.. –М.:Высш.шк., 2006.- 365 с.
4. *Ерофеев А. А.* Теория автоматического управления. - СПб.: Политехника, 1998.
5. *Иващенко Н.Н.* Автоматическое регулирование. - М.: Машиностроение, 1978.
6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. -М.: Высш. шк., 1986.
8. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Высш. шк., 1989.

Анализ точности систем автоматического управления
Исследование устойчивости САУ
Коррекция динамических свойств САУ. Настройка ПИД-регулятора линейной САУ
Синтез и анализ робастной САУ
Исследование устойчивости и качества линейной САУ с запаздыванием
Исследование устойчивости и качества нелинейной САУ с ПИД-регулятором