0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра региональной экономики и менеджмента

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«11» 12 2021 г.

Количественные методы в менеджменте

Методические рекомендации для проведения практических занятий для студентов направления подготовки 38.03.02

Курск 2021

УДК 338

Составитель: О.А. Крыжановская

Рецензент
кандидат экономических наук, доцент *Ю.С. Положенцева*

Количественные методы в менеджменте: методические рекомендации для проведения практических занятий для студентов направления подготовки 38.03.02 / Юго-Зап. гос. ун-т.: сост. О.А. Крыжановская; - Курск, 2021. - 34 с.

Предназначены студентам направления подготовки 38.03.02 Менеджмент для проведения практических занятий по дисциплине «Количественные методы в менеджменте». Содержат теоретические основы и практические рекомендации по вопросам применения количественных методов в менеджменте.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ______________ Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. ____. Уч.-изд. л. _____. Тираж ___ экземпляров.
Заказ 1557 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября,94.

Цель дисциплины

Дать научное представление о методах, моделях и приемах, позволяющих получать количественное выражение закономерностей экономического развития на основе использования математического и статистического инструментария в менеджменте; овладение навыками построения экономико-математических моделей и интерпретации полученных результатов для обоснования управленческих решений с учетом знания современных информационных технологий и программных средств при решении профессиональных задач в сфере управления бизнесом.

Задачи дисциплины

- Изучение методов сбора статистической информации, методов обработки результатов наблюдений.
- Освоение методов расчета важнейших статистических показателей, приемов статистического анализа процессов и явлений.
- Овладение методологией эконометрического моделирования, идентификации и верификации моделей, содержательной интерпретации формальных результатов.
- Получение опыта анализа конкретных экономических ситуаций и применения на практике экономико-математических моделей для обоснования управленческих решений с учетом знания современных информационных технологий и программных средств при решении профессиональных задач в сфере управления бизнесом

Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Содержание
1	Статистическое наблюдение, статистическая сводка, группировка и таблицы Абсолютные и относительные величины.	Статистическое наблюдение как основной этап статистического анализа. Виды и способы статистического наблюдения. Сводка и статистические группировки, их виды. Выбор группировочного признака. Методы вторичной группировки статистического материала. Требования, предъявляемые к статистическим таблицам. Абсолютные величины, их значение в статистическом исследовании. Вид абсолютных величин и способы их получения. Относительные величины в статистике. Виды относительных величин. Способы их расчета и формы выражения. Взаимосвязь абсолютных и относительных величин, необходимость их комплексного применения.
2	Средние величины и показатели вариации. Статистическое изучение взаимосвязи социально-экономических явлений.	Средняя, ее сущность. История вопроса. Виды средних. Средняя арифметическая и средняя гармоническая простая и взвешенная, степенные средние. Выбор форм средней. Структурные средние. Мода и медиана, использование их в дискретных и интервальных рядах распределения. Сопоставление моды, медианы и средней величины. Показатели вариации и задачи их статистического изучения. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение. Коэффициент вариации и его значение при исследовании статистической совокупности. Изучение связи - одна из важнейших задач экономического анализа. Форма и виды связей. Основные методы статистики, применяемые в анализе связи между явлениями: метод проведения параллельных данных, метод группировок, балансовый метод, графический.

Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Содержание
3	Задачи эконометрики в области социально-экономических исследований. Основные этапы эконометрического моделирования. Линейная модель множественной регрессии. Множественная регрессия и корреляция.	Сущность понятия «эконометрика». Модельное описание конкретных количественных взаимосвязей, существующих между анализируемыми показателями. Основные задачи, решаемые с помощью эконометрики. Три основных класса моделей, которые применяются для анализа или прогноза. Этапы эконометрического моделирования - постановочный, априорный, параметризация, информационный, идентификация модели, верификация модели. Развитие информационных технологий. Компьютерные эконометрические пакеты. Экономические явления как результат действия большого числа совокупно действующих факторов. Задача исследования зависимости одной переменной Y от нескольких объясняющих переменных X1,X2,…Xn. Множественный регрессионный анализ. Причинность, регрессия, корреляция. Понятие результативных и факторных признаков. Корреляционно-регрессионный анализ в экономике. Анализ и обобщение статистической информации. Построение уравнения множественной регрессии. Метод наименьших квадратов (МНК). Отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии. Требования к факторам, включаемым во множественную регрессию. Мультиколлинеарность. Оценка качества регрессии. F-критерий Фишера. t-критерий Стьюдента. Построение модели связи в стандартизованном масштабе. Интерпретация моделей регрессии. Коэффициенты эластичности. Уравнение регрессии в стандартизованном масштабе. Средние коэффициенты эластичности, частные коэффициенты эластичности, индекс множественной корреляции, частные коэффициенты корреляции, коэффициент множественной детерминации.

Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Содержание
4	Нелинейные модели регрессии и их линеаризация. Балансовый метод в экономике. Модель межотраслевого баланса.	Нелинейные функции. Производственные функции. Функции спроса. Модели, нелинейные по параметрам. Модели, нелинейные по переменным. Оценка параметров нелинейных моделей. Линеаризация модели преобразованием исходных переменных и введением новых. Методы нелинейной оптимизации на основе исходных переменных. Преобразование к линейному виду путем логарифмирования. Экономическая сущность производственной функции. Основные виды производственных функций. Геометрическая интерпретация (изокванты). Производственная функция Кобба-Дугласа. Характеристики производственных функций. Линейное уравнение, связывающее темпы прироста. Эффект масштаба производства. Функция Кобба-Дугласа с автономным темпом технического прогресса. Коэффициенты частной эластичности. Понятие о балансовом методе. Схема межотраслевого баланса производства и распределения продукции. Математический аппарат межотраслевого баланса. Виды балансов. Динамическая и статическая модели межотраслевого баланса.

Тема 1. Статистическое наблюдение, статистическая сводка, группировка и таблицы. Абсолютные и относительные величины.

Предмет, метод и задачи статистики.

Глоссарий

Значение термина «статистика». Закон больших чисел. Статистическая совокупность. Единица совокупности. Признак. Вариация. Статистический показатель. Система показателей.

Структура (план)

1. Предмет статистики и методология статистики.
2. Основные категории статистики.
3. Задачи статистики на современном этапе.
4. Организация государственной статистики в РФ.

Статистическое наблюдение. Сводка и группировка статистических: данных.

Глоссарий

Объект наблюдения. Единица наблюдения. Отчетность. Специально организованное обследование. Регистровое наблюдение. Монографическое обследование. Выборочное обследование. Способ основного массива. Опрос. Сводка. Агрегирование статистической информации. Группировка Классификация Вторичная группировка данных. Ряд распределения. Статистическая таблица. График.

Структура (план)

1. Формы, виды и способы статистического наблюдения.
2. Сводка статистических данных как этап статистического исследования: задачи, виды, методика проведения.
3. Понятие, задачи и виды группировок.
4. Ряды распределения.
5. Построение интервального ряда распределения (задача)
6. Проведение аналитической группировки (задача).
7. Табличное и графическое представление статистических данных

Практическое занятие

1. Построение интервального ряда распределения
2. Проведение аналитической группировки.

Контрольные задания

Выбрать какой-либо реальный объект наблюдения (например, студентов курса, факультета, преподавателей, родственников, друзей и т.п.). Спроектировать процесс наблюдения: сформулировать цель наблюдения; определить состав признаков, подлежащих регистрации; выбрать вид наблюдения; разработать инструментарий наблюдения. Провести спроектированное наблюдение, т.е. собрать сведения об объекте наблюдения, оформить результаты наблюдения и сдать преподавателю на проверку.

Абсолютные, относительные и средние величины.

Глоссарий

Абсолютная величина (показатель). Относительная величина (показатель). Относительная величина динамики. Относительная величина плана. Относительная величина выполнения плана. Относительная величина структуры. Относительная величина интенсивности. Относительная величина координации. Относительная величина сравнения. Мажорантность средних. Средняя арифметическая (простая и взвешенная). Средняя гармоническая (простая и взвешенная). Мода. Медиана. Квартиль. Квинтиль. Дециль.

Структура (план)

1. Сущность и виды абсолютных величин. Единицы измерения абсолютных величин.
2. Относительные величины: понятие и их виды.
3. Сущность и условия применения средних величин.
4. Средняя арифметическая.
5. Свойства средней арифметической.
6. Средняя гармоническая.

Практическое занятие

1. Расчет относительных величин различных видов.
2. Расчет средней арифметической.
3. Расчет средней из интервального ряда распределения.
4. Расчет средней гармонической.
5. Расчет моды и медианы.

Контрольные задания

Вариант 1. По данным об урожайности двух фермерских хозяйств, представленным в таблице 1, рассчитать среднюю урожайность и сравнить эти хозяйства по этой урожайности.

Таблица 1. Данные об урожайности двух фермерских хозяйств

Зерновая культура	Фермерское хозяйство №1		Фермерское хозяйство №2	
	Урожайность, ц/га	Посевная площадь, га	Урожайность, ц/га	Валовый сбор, ц
Пшено	16	100	18	1400
Рожь	20	250	19	5500
Ячмень	25	300	24	8000
Просо	22	200	23	4500

Вариант 2. В 2005 году импорт России составил 98,7 млрд.долл., а экспорт – 241 млрд.долл., а в 2006 году – 137 и 302 млрд.долл. соответственно. Рассчитать всевозможные индексы, построить диаграммы и сделать выводы.

Вариант 3. По условным данным табл. 2 рассчитать среднюю экспортную цену товара, применив при этом свойства средней арифметической.

Таблица 2. Распределение цены экспортируемого товара

Цена товара, долл./т.	До 500	500 – 600	600 – 700	Более 700
Физический объем, т.	25000	28000	21000	11000

Вариант 4. По данным о реализации товара по трем коммерческим магазинам представленным в таблице 3, рассчитать среднюю цену товара.

Таблица 3. Реализация товара по трем коммерческим магазинам

Номер магазина	Цена товара, руб./кг	Выручка от реализации, руб.
1	17	49020
2	20	17400
3	22	12320

Вариант 5. По официальным данным об индексах цен на вторичном рынке жилья в РФ за 2003 – 2006 гг., представленным в таблице 4, рассчитать среднегодовые индексы цен по федеральным округам и сравнить между собой и с РФ в целом.

Таблица 4. Индексы цен на вторичном рынке жилья в 2003 – 2006 гг. (на конец года, в % к предыдущему году)

Год	2003	2004	2005	2006
Российская Федерация	118,8	124,1	118,0	154,4
по федеральным округам:				
Приволжский	113,4	124,2	120,0	157,8
Центральный	123,9	122,9	115,0	170,6
Северо-Западный	130,8	127,2	108,0	156,3
Южный	119,6	117,8	118,6	124,7
Уральский	105,3	122,3	130,6	146,3
Сибирский	111,4	133,2	123,9	134,0
Дальневосточный	121,6	119,2	121,6	124,4

Вариант 6. В 1985 году в Китае было выработано 1544 млрд.кВт-ч электроэнергии, а в США – 2650 млрд.кВт-ч. Ежегодно производство электроэнергии в среднем в Китае увеличивается на 6,9%, а в США – на 4,5%. Когда Китай и США сравняются в производстве электроэнергии?

Вариант 7. В отделе заказов торговой фирмы заняты трое работников, имеющих 8-часовой рабочий день. Первый работник на оформление одного заказа в среднем затрачивает 14 мин., второй – 15 мин., третий – 19 мин. Определить средние затраты времени на 1 заказ в целом по отделу, а также после увеличения производительности третьего работника на 25%

Вариант 8. За два месяца по цехам завода имеются данные, представленным в таблице 5. Определить изменение средней месячной заработной платы на заводе.

Таблица 5. Данные о месячной заработной плате на заводе

№ цеха	Сентябрь		Октябрь	
	Средняя месячная заработная плата, руб./чел.	Численность работников, чел.	Средняя месячная заработная плата, руб./чел.	Фонд заработной платы, тыс. руб.
1	15000	150	16000	2240
2	15500	200	16200	3645
3	15900	220	17000	4165

Вариант 9. По данным об экспорте из таблицы 6 рассчитать всевозможные индексы, построить диаграмму и сделать выводы.

Таблица 6. Товарная структура экспорта и импорта РФ

Группа товаров	Экспорт		Импорт	
	2005	2006	2005	2006
Продовольственные товары и сырье (кроме текстильного)	4,5	5,5	17,4	21,6
Минеральные продукты	156	199	3,0	3,3
Продукция химической промышленности, каучук	14,4	16,9	16,3	21,8
Кожевенное сырье, пушнина и изделия из них	0,3	0,4	0,3	0,4
Продукция лесной и целлюлозно-бумажной промышленности	8,3	9,5	3,3	4,0
Текстиль, текстильные изделия и обувь	0,9	0,9	3,6	5,5
Металлы, драгоценные камни и изделия из них	40,9	49,5	7,6	10,6
Машины, оборудование и транспортные средства	13,5	17,5	43,4	65,6
Прочие	2,5	3,1	3,7	4,9

Вариант 10. По данным об импорте из таблицы 6 рассчитать всевозможные индексы, построить диаграмму и сделать выводы.

Тема №2. Средние величины и показатели вариации. Статистическое изучение взаимосвязи социально-экономических явлений.

Показатели вариации.

Глоссарий

Вариация признака. Размах вариации. Среднее линейное отклонение. Дисперсия. Среднее квадратическое отклонение. Эмпирический коэффициент детерминации. Эмпирическое корреляционное отношение.

Структура (план)

1. Понятие и виды вариации.
2. Меры вариации (показатели).
3. Дисперсия и методы расчета.
4. Дисперсия альтернативного признака.
5. Правило сложения дисперсий.

Практическое занятие

1. Расчет показателей вариации.
2. Расчет эмпирического коэффициента детерминации и эмпирического корреляционного отношения.

Контрольные задания

На основе условных ранжированных данных таблицы 7 провести анализ вариации величины налоговых сборов (тыс. руб.) с предприятий района, собранных налоговыми органами.

Таблица 7. Распределение вариантов для выполнения контрольного задания

№	Вариант									
п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	107	109	118	155	104	101	142	123	128	158
2	139	111	165	178	107	163	143	124	180	177
3	142	199	168	182	113	200	169	184	208	292
4	144	226	247	223	133	230	169	247	247	317
5	150	239	249	227	186	308	223	295	259	327
6	207	289	293	269	186	314	233	303	262	380
7	207	318	299	272	195	320	236	312	325	433
8	217	319	302	286	230	328	290	332	341	449
9	233	346	339	294	232	367	292	335	344	458
10	244	390	361	301	243	405	292	351	353	490
11	271	390	364	306	264	410	338	378	362	505
12	273	405	405	361	356	420	359	379	366	506
13	275	428	410	362	368	427	363	388	377	526
14	300	436	429	392	372	440	367	389	387	553
15	302	438	439	428	387	458	368	393	389	567
16	305	450	458	454	403	464	411	420	429	586
17	312	451	462	462	467	465	436	422	466	604
18	320	496	492	466	482	482	449	425	485	618
19	359	497	498	482	491	495	460	461	491	624
20	369	502	543	487	494	497	480	465	515	627
21	370	513	550	490	510	545	488	495	523	633
22	372	517	566	493	511	549	493	498	534	653
23	382	531	581	501	512	582	500	526	546	656
24	411	545	588	508	533	590	500	528	550	657

№	Вариант									
п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	416	560	593	519	576	603	515	531	574	677
27	426	571	609	533	577	614	523	544	604	689
28	428	573	610	539	579	621	526	563	618	702
29	436	580	612	550	579	633	533	576	624	709
30	451	593	622	555	589	643	553	584	653	723
31	496	597	658	555	590	664	559	585	657	734
32	497	615	680	561	591	666	560	597	673	752
33	513	649	706	597	598	676	564	602	685	755
34	517	661	716	600	604	691	580	604	701	756
35	545	668	726	621	630	692	585	631	702	779
36	558	680	737	643	687	708	592	639	706	785
37	571	693	751	674	703	717	595	647	723	802
38	580	801	795	676	705	726	604	665	734	819
39	593	813	812	683	729	743	653	671	755	822
40	597	816	825	689	738	744	671	699	756	829
41	615	825	849	712	740	753	676	716	785	842
42	649	675	855	735	776	758	698	719	802	848
43	661	842	858	766	786	772	700	720	842	864
44	680	845	861	799	792	793	717	764	864	886
45	801	650	865	818	825	808	761	803	886	888
46	816	858	866	824	851	861	808	873	888	926
47	825	878	867	858	854	867	818	879	926	930
48	845	958	938	861	895	880	838	898	930	945
49	961	972	939	898	896	897	869	922	945	951

№ п/п	Вариант 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	414	558	590	511	540	602	513	531	573	673

№ п/п	Вариант 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50	972	994	989	937	949	929	888	991	961	961

Выборочное наблюдение.

Глоссарий

Выборочное наблюдение. Генеральная совокупность. Выборочная совокупность. Повторный отбор. Бесповторный отбор. Собственно случайная выборка. Механическая выборка. Типическая выборка. Серийная выборка. Комбинированная выборка. Средняя ошибка выборочного наблюдения. Предельная ошибка выборочного наблюдения.

Структура (план)

1. Понятие выборочного наблюдения и его преимущества.
2. Генеральная и выборочная совокупности, их обобщающие характеристики.
3. Ошибки выборочного наблюдения.
4. Определение необходимой численности выборки.

Практическое занятие

1. Расчет ошибок выборки при различных способах отбора.
2. Расчет необходимой численности выборки.

Контрольные задания

Для изучения вкладов населения в коммерческом банке города была проведена 5%-я случайная бесповторная выборка лицевых счетов, в результате которой в таблице 8 получено распределение клиентов по размеру вкладов.

Таблица 8. Варианты выполнения контрольного задания

Размер вклада, у.е.	Число вкладчиков, чел.									
	Вариант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
до 5000	10	80	100	50	60	30	90	20	70	40
5 000 – 15 000	40	60	150	30	40	110	75	65	90	80
15 000 – 30 000	25	35	70	90	120	90	130	140	60	95
30 000 – 50 000	30	45	40	5	80	30	60	75	20	115
свыше 50 000	15	10	30	25	50	15	25	5	10	5

С вероятностью 0,954 определить:

1) средний размер вклада во всем банке;

2) долю вкладчиков во всем банке с размером вклада свыше 15000 у.е.;

3) необходимую численность выборки при определении среднего размера вклада, чтобы не ошибиться более чем на 500 у.е.;

4) необходимую численность выборки при определении доли вкладчиков во всем банке с размером вклада свыше 30 000 у.е., чтобы не ошибиться более чем на 10%.

Статистические методы изучения взаимосвязей.

Глоссарий

Корреляционная связь. Метод параллельных рядов. Метод аналитической группировки. Метод корреляционной таблицы. Балансовый метод. Теснота связи. Корреляционно-регрессионный метод анализа. Регрессия. Однофакторное уравнение регрессии. Линейный коэффициент корреляции. Индекс корреляции. Теоретическое корреляционное отношение. Коэффициент детерминации.

Структура (план)

1. Понятие статистической связи, ее виды и формы.
2. Методы выявления корреляционной связи.

3. Расчет параметров линейного уравнения регрессии.
4. Проверка адекватности модели.
5. Показатели тесноты связи неколичественных переменных.

Практическое занятие

1. Расчет параметров линейного уравнения регрессии.
2. Расчет линейного коэффициента корреляции, теоретического корреляционного отношения.
3. Расчет непараметрических показателей тесноты связи.

Контрольные задания

Проанализировать ряд динамики, приведенный в таблице 9 (по данным ФСГС), сделать прогноз на 2017 год.

Таблица 9. Варианты выполнения контрольного задания

Год	**Вариант**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	Число заключенных браков, тыс.	Число разводов, тыс.	Среднедушевые денежные доходы населения (в месяц), руб.	Численность студентов, тыс.чел (на начало учеб.года)	профессорско-преподавательского персонала в ВУЗах, тыс.чел. (на начало учеб.года)	Численность лиц, впервые признанных инвалидами, тыс. чел.	Численность осужденных за преступления, , тыс. чел.	Численность населения, тыс.чел. (на начало года)	Число кредитных организаций, зарегистрированных Банком России (на конец года)	Индекс потребительских цен, % (на конец года)
2010	897,3	627,7	2281	4727	307,4	1109	1184	146890	2126	120,2
2011	1001,6	763,5	3062	5427	319,6	1200	1244	146304	2003	118,6
2012	1019,8	853,6	3947	5948	339,6	1184	859	145649	1828	115,1
2013	1091,8	798,8	5170	6456	354,1	1092	767	144964	1668	112,0
2014	979,7	635,8	6410	6884	364,3	1463	794	144168	1518	111,7
2015	1066,4	604,9	8023	7064	387,3	1799	879	143474	1409	110,9
2016	1113,7	640,9	9947	7310	409,0	1443	910	142754	1345	109,0

Ряды динамики.

Глоссарий

Ряд динамики (временной ряд). Смыкание рядов динамики. Скользящие средние. Абсолютный прирост. Темп роста. Темп прироста. Абсолютное значение одного процента прироста. Средний уровень ряда. Средний абсолютный прирост. Средний темп роста. Средний темп прироста. Тренд. Индексы сезонности. Автокорреляция. Экстраполяция. Интерполяция.

Структура (план)

1. Понятие рядов динамики и их виды.
2. Аналитические показатели ряда динамики.
3. Средние показатели в рядах динамики.
4. Методы сглаживания рядов динамики.
5. Метод скользящей средней.
6. Расчет параметров уравнения тренда с использованием МНК.
7. Индексы сезонности.

Практическое занятие

1. Расчет аналитических и средних показателей в ряду динамики.
2. Построение уравнения тренда.
3. Расчет индексов сезонности.

Расчетно-аналитическое задание

По периодическим изданиям за текущий год, статистическим ежегодникам, сайтам ФСГС, Курскстата привести примеры *статистического анализа динамики какого-либо явления (показателя)*

Тема №3. Задачи эконометрики в области социально-экономических исследований. Основные этапы эконометрического моделирования. Линейная модель множественной регрессии. Множественная регрессия и корреляция.

Эконометрика – быстроразвивающаяся отрасль науки, цель которой состоит в том, чтобы придать количественные меры экономическим отношениям. Описание экономических систем математическими методами, или эконометрика, дает заключение о реальных объектах и связях по результатам выборочного обследования или моделирования. Вместе с тем, чтобы сделать вывод о том, какие из полученных результатов являются достоверными, а какие сомнительными или просто необоснованными, необходимо уметь оценивать их надежность и величину погрешности.

Зарождение эконометрики является следствием междисциплинарного подхода к изучению экономики. Эта наука возникла в результате взаимодействия и объединения трех компонент: экономической теории, статистических и математических методов. Впоследствии к ним присоединилось развитие вычислительной техники как условие развития эконометрики.

Таким образом, ***эконометрика*** *– это наука, которая дает количественное выражение взаимосвязей экономических явлений и процессов.* В результате статистико-математического анализа экономических отношений вырабатываются рекомендации по повседневным проблемам делового мира. При этом экономические показатели и процессы рассматриваются в общем случае как случайные величины и случайные процессы, требующие их статистической интерпретации. Основными элементами такого подхода являются понятия случайной величины и распределения ее вероятностей.

Становление и развитие эконометрического метода происходили на основе так называемой высшей статистики – на методах парной и множественной регрессии, парной, частной и множественной корреляции, выделения тренда и других компонент временного ряда, на статистическом оценивании. Исследование объективно существующих связей между явлениями – важнейшая задача теории статистики.

Социально-экономические явления представляют собой результат одновременного воздействия большого числа причин. При изучении этих явлений необходимо выявлять основные причины, абстрагируясь от второстепенных.

1.2. Основные этапы эконометрического моделирования и классификация моделей

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их прощенные формальные описания, называемые *экономическими моделями.*

Модель – это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Математическая модель экономического объекта – это его отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Математические модели широко применяются в бизнесе, экономике, общественных науках, исследовании экономической активности и даже в исследовании политических процессов.

В настоящее время эконометрика располагает огромным разнообразием типов моделей – от больших макроэкономических моделей, включающих несколько сот, а иногда и тысяч уравнений, до малых коинтеграционных моделей, предназначенных для решения специфических проблем.

К основным задачам эконометрики можно отнести следующие:

- Построение эконометрических моделей, т.е. представление экономических моделей в математической форме, удобной для проведения эмпирического анализа. Данную проблему принято называть проблемой *спецификации.* Зачастую она может быть решена несколькими способами.
- Оценка параметров построенной модели, делающих выбранную модель наиболее адекватной реальным данным. Это так называемый этап *параметризации.*

- Проверка качества найденных параметров модели и самой модели в целом. Иногда этап анализа называют этапом *верификации.*
- Использование построенных моделей для объяснения поведения исследуемых экономических показателей, прогнозирования и предсказания, а также для осмысленного проведения экономической политики.

Можно выделить три основных класса моделей, которые применяются для анализа и / или прогноза.

1. ***Модели временных рядов.*** К этому классу относятся модели:

тренда: $y(t) = T(t) + \varepsilon_t$,

где *T(t)* – временной тренд заданного параметрического вида, ε_t - случайная компонента;

сезонности: $y(t) = S(t) + \varepsilon_t$,

где *S(t)* – периодическая (сезонная) компонента, ε_t - случайная (стохастическая) компонента;

тренда и сезонности: $y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t$ (аддитивная) или

$$y(t) = T(t) \cdot S(t) + \varepsilon_t$$

(мультипликативная),

где *T(t)* – временной тренд заданного параметрического вида, *S(t)* – периодическая (сезонная) компонента, ε_t - случайная компонента.

К моделям временных рядов относится множество более сложных моделей, таких, как модели адаптивного прогноза, модели авторегрессии и скользящего среднего и др. Их общей чертой является то, что они объясняют поведение временного ряда, исходя только из его предыдущих значений. Такие модели могут применяться, например, для изучения и прогнозирования объема продаж авиабилетов, спроса на мороженое, краткосрочного прогноза процентных ставок и т.п.

2. ***Регрессионные модели с одним уравнением.*** В таких моделях зависимая (объясняемая) переменная y представляется в виде функции $f(x, \beta) = f(x_1, ..., x_k, \beta_1, ..., \beta_p)$, где $x_1, ..., x_k$ - независимые (объясняющие) переменные, а $\beta_1, ..., \beta_p$ - параметры. В зависимости от вида функции $f(x, \beta)$ модели делятся на линейные и нелинейные. Например, можно исследовать спрос на мороженое

как функцию от времени, температуры воздуха, среднего уровня доходов или зависимость зарплаты от возраста, пола, уровня образования, стажа работы и т.п.

Область применения таких моделей, даже линейных, значительно шире, чем моделей временных рядов.

3. ***Системы одновременных уравнений.*** Эти модели описываются системами уравнений. Системы могут состоять из тождеств и регрессионных уравнений, каждое из которых может, кроме объясняющих переменных, включать в себя также объясняемые переменные из других уравнений системы. Таким образом, имеется набор объясняемых переменных, связанных через уравнения системы. Примером может служить модель спроса и предложения. Системы одновременных уравнений требуют относительно более сложный математический аппарат. Они могут использоваться для моделей страновой экономики и др.

При моделировании экономических процессов мы встречаемся с двумя типами данных:

- *пространственные данные;*
- *временные ряды.*

Примером пространственных данных является, например, набор сведений (объем производства, количество работников, доход и др.) по разным фирмам в один и тот же момент времени (пространственный срез). Другим примером могут являться данные по курсам покупки/продажи наличной валюты в какой-то день по обменным пунктам города.

Примерами временных данных могут быть ежеквартальные данные по инфляции, средней заработной плате, национальному доходу, денежной эмиссии за последние годы или, например, ежедневный курс доллара США на ММВБ, цены фьючерсных контрактов на поставку доллара США (ММБ) и котировки ГКО (ММВБ) за два последних года.

Отличительной чертой временных данных является то, что они естественным образом упорядочены по времени, кроме того наблюдения в близкие моменты времени часто бывают зависимыми.

Процесс эконометрического моделирования происходит в течение нескольких этапов. В основе ***первого этапа*** статистического изучения связей лежит качественный анализ явления, связанный с анализом его природы методами экономической теории, социологии, конкретной экономики. ***Второй этап*** – построение модели связи. Он базируется на методах статистики: группировки, средних величин, таблиц и т.д. ***Третий этап*** – интерпретация результатов. Он вновь связан с качественными особенностями изучаемого явления.

Существует множество методов изучения связей, выбор конкретного из которых зависит от цели исследования и от поставленной задачи. Связи между признаками и явлениями классифицируются по ряду оснований. Признаки по их значению для изучения взаимосвязи делятся на два класса:

1. ***Факторные (факторы)*** – это признаки, обусловливающие изменение других, связанных с ними признаков.
2. ***Результативные*** – это признаки, изменяющиеся под действием факторных признаков.

Связи между явлениями и их признаками классифицируются по ***степени тесноты, по направлению*** (выделяют *прямую* и *обратную* связь)***, по аналитическому выражению*** (выделяют *прямолинейные* – или просто *линейные* – и *нелинейные* - или *криволинейные*).

Для выявления наличия связи, ее характера и направления используются следующие методы: *метод приведения параллельных данных* (основан на сопоставлении двух или нескольких рядов статистических величин, что позволяет установить наличие связи и получить представление о ее характере)*, аналитических группировок, графический, корреляции и регрессии.*

«Модель парной линейной регрессии»

По имеющимся данным требуется:

1) вычислить дескриптивные (описательные) статистики:

■ выборочные средние,
■ выборочную дисперсию,
■ выборочное среднее квадратичное отклонение,
■ нижний и верхний квартили выборочного распределения,
■ размах выборки,

■ 95- и 99%-ные доверительные интервалы для оценки математического ожидания (и дисперсии) исходя из того, что выборочные данные имеют нормальное распределение;

2) вычислить выборочный коэффициент корреляции и оценить его значимость на 5%-ном уровне;

3) построить корреляционное поле заданных переменных и сформулировать гипотезу о виде связи;

4) вычислить параметры уравнения парной регрессионной модели;

5) оценить значимость построенного уравнения регрессии с помощью *F*-критерия;

6) оценить качество построенного уравнения регрессии с помощью коэффициента детерминации R^2;

7) построить 95%-ные интервалы для оценок параметров уравнения регрессии;

8) рассчитать прогнозное значение, если значение независимой переменной увеличится на 10% от его среднего значения. Построить 95%-ный доверительный интервал для прогнозного значения;

9) оценить с помощью коэффициента эластичности (среднего) силу связи независимой переменной с зависимой;

10) рассчитать параметры уравнений регрессий других форм: степенной, логарифмической, экспоненциальной и др.

«Множественная регрессия и корреляция»

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$,

где y – зависимая переменная (результативный признак);

$x_1, x_2, \ldots, x_p$ – независимые переменные (факторы).

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

- линейная $y= a+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_px_p+\varepsilon$;
- степенная $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{b_p} \cdot \varepsilon$;
- экспонента $y=e^{a+b_1 \cdot x_1+b_2 \cdot x_2+\ldots+b_p \cdot x_p+\varepsilon}$;

- гипербола $y = \dfrac{1}{a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_p \cdot x_p + \varepsilon}$.

Можно использовать и другие функции, приводимые к линейному виду.

Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют *метод наименьших квадратов* (МНК). Для линейных уравнений и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, строится следующая система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$\sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + ... + b_p \sum x_p \,,$$
$$\sum yx_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + ... + b_p \sum x_p x_1 \,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum yx_p = a \sum x_p + b_1 \sum x_1 x_p + b_2 \sum x_2 x_p + ... + b_p \sum x_p^2 \,.$$

Для ее решения может быть применен метод определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta}, \ldots, \quad b_p = \frac{\Delta b_p}{\Delta},$$

где $\Delta a, \Delta b_1, \ldots, \Delta b_p$ – частные определители, которые получаются заменой соответствующего столбца матрицы определителя системы данными левой части системы;

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & ...\sum x_p \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_2 x_1 & ...\sum x_p x_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 & ...\sum x_p x_2 \\ \sum x_p & \sum x_1 x_p & \sum x_2 x_p & ...\sum x_p^2 \end{vmatrix}$$ - определитель системы.

Другой вид уравнения множественной регрессии – *уравнение регрессии в стандартизованном масштабе*:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_p t_{x_p} \,,$$

где $t_y = \dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$, $t_{x_i} = \dfrac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$ – стандартизованные переменные;

β_i – стандартизованные коэффициенты регрессии.

К уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе применим МНК. Стандартизованные коэффициенты регрессии (β-коэффициенты) определяются из следующей системы уравнений:

$$r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_2 x_1} + \beta_3 r_{x_3 x_1} + ... + \beta_p r_{x_p x_1} \,,$$

$$r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2x_1} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \beta_p r_{x_px_2},$$

……………………………………..

$$r_{yx_p} = \beta_1 r_{x_px_1} + \beta_2 r_{x_px_2} + \beta_3 r_{x_3x_p} + \ldots + \beta_p \ .$$

Связь коэффициентов множественной регрессии b_i со стандартизованными коэффициентами β_i описывается соотношением $b_i = \beta_i \dfrac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$. Параметр a определяется как $a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2 - \ldots - b_p\bar{x}_p$.

Средние коэффициенты эластичности для линейной регрессии рассчитываются по формуле: $\bar{Э}_{yx_j} = b_j \dfrac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$.

Для расчета *частных коэффициентов эластичности* применяется следующая формула: $Э_{yx_i} = b_i \cdot \dfrac{x_i}{\hat{y}_{x_i \cdot x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p}}$.

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает *индекс множественной корреляции*: $R_{yx_1,x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{1 - \dfrac{\sigma^2_{yост}}{\sigma^2_y}}$.

Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

$$R_{yx_1,x_2,\ldots,x_p} \geq r_{yx_i} \qquad (i = \overline{1,p}).$$

Индекс множественной корреляции для *уравнения в стандартизованном масштабе* можно записать в виде: $R_{yx_1,x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{\sum \beta_i r_{yx_i}}$.

При линейной зависимости *коэффициент множественной корреляции* можно определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$R_{yx_1,x_2,\ldots,x_p} = \sqrt{1 - \dfrac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}$, где $\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \ldots r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & \ldots r_{x_1x_p} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 & \ldots r_{x_2x_p} \\ r_{yx_p} & r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \ldots 1 \end{vmatrix}$ – определитель матрицы парных коэффициентов корреляции; $\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$ – определитель матрицы межфакторной корреляции.

Частные коэффициенты (*или индексы*) *корреляции*, измеряющие влияние на y фактора x_i при неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле $r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p} = \sqrt{1 - \dfrac{1 - R^2_{yx_1x_2 \dots x_i \dots x_p}}{1 - R^2_{yx_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p}}}$ или по рекуррентной формуле $r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_p} = \dfrac{r_{yx_i \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}} r_{x_ix_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}})(1 - r^2_{x_ix_p \cdot x_1x_2 \dots x_{p-1}})}}$.

Частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от –1 до 1.

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент (индекс) детерминации. *Коэффициент множественной детерминации* рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции: $R^2_{yx_1x_2,\dots,x_p}$.

Скорректированный индекс множественной детерминации содержит поправку на число степеней свободы и рассчитывается по формуле:

$$\hat{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{(n-1)}{(n-m-1)},$$

где n – число наблюдений; m – число факторов.

Значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью F-критерия Фишера: $F = \dfrac{R^2}{1 - R^2} \cdot \dfrac{n-m-1}{m}$.

Частный F-критерий оценивает статистическую значимость присутствия каждого из факторов в уравнении. В общем виде для фактора x_i частный F-критерий определится как

$$F_{частx_i} = \frac{R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_p} - R^2_{yx_1 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_p}}{1 - R^2_{yx_1 \dots x_i \dots x_p}} \cdot \frac{n-m-1}{1}.$$

Оценка значимости коэффициентов чистой регрессии с помощью t-критерия Стъюдента сводится к вычислению значения $t_{b_i} = \frac{b_i}{m_{b_i}} = \sqrt{F_{x_i}}$, где m_{b_i} – средняя квадратическая ошибка коэффициента регрессии b_i, которая может быть определена по следующей формуле: $m_{b_i} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1 - R^2_{yx_1 \ldots x_p}}}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{1 - R^2_{x_i x_1 \ldots x_p}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n - m - 1}}$.

При построении уравнения множественной регрессии может возникнуть проблема *мультиколлинеарности* факторов, их тесной линейной связанности.

Считается, что две переменные явно *коллинеарны*, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_i x_j} \geq 0{,}7$.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии *мультиколлинеарности* факторов. Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надежна оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться *определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами*.

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы $r_{x_i x_j}$ $(x_i \neq x_j)$ были бы равны нулю. Так, для включающего три объясняющих переменных уравнения

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon$$

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель, равный 1:

$$Det|R| = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_2x_1} & r_{x_3x_1} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & r_{x_3x_2} \\ r_{x_1x_3} & r_{x_2x_3} & r_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

так как $r_{x_1x_1} = r_{x_2x_2} = r_{x_3x_3} = 1$ и $r_{x_1x_2} = r_{x_1x_3} = r_{x_2x_3} = 0$.

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны 1, то определитель такой матрицы равен 0:

$$Det|R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Чем ближе к 0 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И наоборот, чем ближе к 1 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Проверка мультиколлинеарности факторов может быть проведена методом испытания гипотезы о независимости переменных H_0 : $Det|R| = 1$. Доказано, что величина $\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2 \cdot m + 5)\lg DetR \right]$ имеет приближенное распределение x^2 с $\left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \right)$ степенями свободы. Если фактическое значение x^2 превосходит табличное (критическое) $\chi^2_{факт} > \chi^2_{табл(df,\alpha)}$, то гипотеза H_0 отклоняется. Это означает, что $Det|R| \neq 1$, недиагональные ненулевые коэффициенты корреляции указывают на коллинеарность факторов. Мультиколлинеарность считается доказанной.

Для применения МНК требуется, чтобы дисперсия остатков была *гомоскедастичной*. Это значит, что для каждого значения фактора x_j остатки ε_i имеют одинаковую дисперсию. Если это условие не соблюдается, то имеет место *гетероскедастичность*.

При нарушении гомоскедастичности мы имеем неравенства $\sigma^2_{\varepsilon_i} \neq \sigma^2_{\varepsilon_j} \neq \sigma^2$, $j \neq i$.

При малом объеме выборки для оценки гетероскедастичности может использоваться метод Гольдфельда – Квандта. Основная идея теста Гольдфельда – Квандта состоит в следующем:

1) упорядочение n наблюдений по мере возрастания переменной x;
2) исключение из рассмотрения C центральных наблюдений; при этом $(n\text{-}C){:}2{>}p$, где p – число оцениваемых параметров:

3) разделение совокупности из (n-C) наблюдений на две группы (соответственно с малыми и с большими значениями фактора x) и определение по каждой из групп уравнений регрессии;
4) определение остаточной суммы квадратов для первой (S_1) и второй (S_2) групп и нахождение их отношения: $R = S_1 : S_2$.

При выполнении нулевой гипотезы о гомоскедастичности отношение R будет удовлетворять F-критерию со степенями свободы $((n\text{-}C\text{-}2p)/2)$ для каждой остаточной суммы квадратов. Чем больше величина R превышает табличное значение F-критерия, тем более нарушена предпосылка о равенстве дисперсий остаточных величин.

Уравнения множественной регрессии могут включать в качестве независимых переменных качественные признаки (например, профессия, пол, образование, климатические условия, отдельные регионы и т.д.). Чтобы ввести такие переменные в регрессионную модель, их необходимо упорядочить и присвоить им те или иные значения, т.е. качественные переменные преобразовать в количественные.

Такого вида сконструированные переменные принято в эконометрике называть *фиктивными переменными*. Например, включать в модель фактор «пол» в виде фиктивной переменной можно в следующем виде:

$$z = \begin{cases} 1 - \text{мужской} \\ 0 - \text{женский} \end{cases} \text{пол.}$$

Коэффициент регрессии при фиктивной переменной интерпретируется как среднее изменение зависимой переменной при переходе от одной категории (женский пол) к другой (мужской пол) при неизменных значениях остальных параметров. На основе t-критерия Стъюдента делается вывод о значимости влияния фиктивной переменной, существенности расхождения между категориями.

Тема 4. Нелинейные модели регрессии и их линеаризация. Балансовый метод в экономике. Модель межотраслевого баланса.

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, и поэтому их моделирование линейными уравнениями регрессии, безусловно, не даст положительного результата. Это означает, что нужно оценить уравнение нелинейной регрессии. Для такой оценки существуют различные пути, одним из которых является линеаризация нелинейной модели. Рассмотрим этот процесс на примере производственной функции.

Производственная функция (ПФ) – это функция, независимая переменная которой принимает значения объемов *затрачиваемого* или *используемого ресурса* (фактора производства), а зависимая переменная – значения объемов *выпускаемой продукции*: *y=f(x).*

Производственная функция нескольких переменных – это функция, независимые переменные $x_1,...,x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска: $y = f(x_1,...,x_n)$.

В данной формуле y ($y \geq 0$) – скалярная величина; $x_1,...,x_n$ - координаты вектора $\boldsymbol{x}$. Таким образом $f(x_1,...,x_n)$ является числовой функцией нескольких или многих переменных $x_1,...,x_n$. В связи с этим ее называют многоресурсной или многофакторной ПФ. Точнее ее вид $f(x_1....,x_n,a)$, где $\boldsymbol{a}$ – вектор параметров ПФ.

При построении ПФ для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y чаще берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в *неизменных*, а не в текущих *ценах*, а в качестве ресурсов рассматривают *основной капитал* ($x_1(=K)$ - объем *используемого* в течение года основного капитала), *живой труд* ($x_{21}(=L)$ - количество единиц *затрачиваемого* в течение года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Таким образом строят двухфакторную ПФ $f(x_1,x_2)$ или $Y = f(K,L)$. От нее переходят к трехфакторной (вводят объемы используемых природных ресурсов). Если ПФ строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

Для моделирования отдельного региона или страны в целом часто используется ПФ вида $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, которая называется ПФ Кобба-Дугласа (ПФКБ). Она принадлежит к классу мультипликативных ПФ.

В ПФКБ α и β эластичности выпуска по затратам капитала и труда соответственно. Сумма этих коэффициентов является таким важным экономическим показателем, как *отдача от масштаба.* При $\alpha + \beta = 1$ говорят о *постоянной отдаче от масштаба* (во сколько раз увеличиваются затраты ресурсов, во столько же раз увеличивается выпуск). При $\alpha + \beta < 1$ имеет место *убывающая отдача от масштаба* (увеличение объема выпуска меньше увеличения затрат ресурсов). При $\alpha + \beta > 1$ – *возрастающая отдача от масштаба* (увеличение объема выпуска больше увеличения затрат ресурсов).

ПФ называется *статической*, если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t.

ПФ называется *динамической*, если:

1) время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (фактора производства), влияющей на объем выпускаемой продукции;
2) параметры ПФ и ее характеристика f зависят от времени t.

При построении ПФ *научно-технический прогресс* (НТП) может быть учтен с помощью множителя НТП, e^{pt}, где параметр (число) p $(p>0)$ характеризует *темп прироста* выпуска под влиянием НТП:

$$y(t) = e^{pt} f(x_1(t), x_2(t)) \qquad (t=0,1,\dots,T)$$

Оценка параметров ПФ обычно проводится с помощью метода наименьших квадратов.

ПФ должна удовлетворять ряду свойств:

1) $f(0,0) = 0$. Это означает, что без ресурсов нет выпуска.

Если $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$, то при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

2) $x(1) \geq x(0)$ $\qquad (x(1) \neq x(0)) \Rightarrow f(x(1)) > f(x(0))$

$(x(k) = (x_1(k), x_2(k), k = 0{,}1))$.
Это означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет.

Если $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$ *(i=1,2)*, $x = (x_1, x_2)$, то с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет. Упорядоченная пара (x_1, x_2) чисел x_1 и x_2 для краткости обозначается символом x, то есть $x = (x_1, x_2)$.

3) Если $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \le 0$ *(i=1,2)*, $x = (x_1, x_2)$.

Это означает, что с ростом затрат одного (i-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i-го ресурса не растет (*закон убывающей эффективности*).

Если $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \ge 0$, $x = (x_1, x_2)$, то при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены оба условия 3), то график ПФ есть выпуклая вверх горка в положительной ортанте Ox_1x_2y.

4) $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$. Это означает, что ПФ является *однородной функцией* степени *p>0*. При *p>1* с ростом масштаба производства в t раз (число $t>1$), то есть с переходом от вектора x к вектору tx, объем выпуска возрастает в t^p ($>t$) раз, то есть имеем *рост эффективности* производства от *роста масштаба* производства. При *p<1* имеем *падение эффективности* производства от *роста масштаба* производства. При *p=1* имеем *постоянную эффективность* производства при *росте его масштаба* (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства).

Для ПФКБ $y = a_0 x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ (α + β =1) свойства 1 – 4 выполняются.

Линеаризация производственной функции

Линейная ПФ (ЛПФ) имеет вид: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ (двухфакторная) и $y = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ (многофакторная). ЛПФ принадлежит к классу аддитивных ПФ (АПФ). Переход от мультипликативной (МПФ) к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной МПФ $y = a_0 x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ этот переход имеет вид:

$\ln y = \ln a_0 + \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$.

Полагая $\ln y = w$; $\ln x_1 = v_1$; $\ln x_2 = v_2$, получаем аддитивную ПФ $w = \ln a_0 + \alpha v_1 + \beta v_2$.

Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ ($a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$) свойства 1 и 4 не выполняются.

CES-функция

Обобщение ПФКБ может вестись в различных направлениях. Наиболее известным обобщением является функция CES, или ПЭЗ, - функция с постоянной эластичностью замещения. Эластичность замещения σ – это мера «кривизны» изоквант (линий уровня) ПФ.

«Кривизну» измеряет величина $\frac{1}{\sigma}$. Эластичность замещения труда капиталом $\sigma_{LK} = \dfrac{d\left(\ln\left(\frac{K}{L}\right)\right)}{d\left(\ln\left(\frac{Y_L^{'}}{Y_K^{'}}\right)\right)}$ показывает, на сколько процентов изменится капиталовооруженность $\left(\frac{K}{L}\right)$ при изменении предельной нормы замены труда капиталом $\left(\frac{Y_L^{'}}{Y_K^{'}}\right)$ на 1%. Величина $\frac{1}{\sigma}$ показывает относительное изменение тангенса угла наклона линии уровня в расчете на единицу отношения $\left(\frac{K}{L}\right)$.

Линейная ПФ имеет нулевую «кривизну» и, соответственно, бесконечную эластичность замещения *у*. Функция Кобба-Дугласа имеет эластичность замещения, равную единице. В реальной экономике степень взаимозаменяемости ресурсов может быть различной, соответственно различной (а не только нулевой, бесконечной или единичной) может быть и эластичность замещения. Это ставит задачу оценки более общих формул ПФ, в

частности ПФ с постоянной, но произвольной эластичностью замещения. Такая функция (*функция CES*) описывается формулой
$Y = A(uK^{-p} + (1-u)L^{-p})^{-n/p}$,
где $p \geq -1$; $n>0$ - степень однородности; $A>0$; $0<u<1$.

Эластичность замещения для такой функции равна $\frac{1}{1+p}$. Если p = -1, то получаем функцию с линейными изоквантами, при p→0 в пределе получаем ПФ Кобба-Дугласа, при p→∞ - ПФ Леонтьева.