

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 08.10.2023 16:33:43

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11cabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра «Машиностроительные технологии и оборудование»

УТВЕРЖАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 4 » 02



ПОСТРОЕНИЕ ГИСТОГРАММЫ, ПОЛИГОНА ЧАСТОТ И ПОЛИГОНА НАКОПЛЕННЫХ ЧАСТОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Методические указания к проведению практических занятий для студентов по направлению подготовки 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств профиль «Технология машиностроения»

УДК 519.6

Составители: В.В. Куц, М.С. Разумов

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.О. Гладышкин*

Построение гистограммы, полигона частот и полигона накопленных частот распределения результатов измерения : методические указания к проведению практических и лабораторных занятий / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, М.С. Разумов. – Курск, 2018. 17 с.: ил. 3.: табл. 2.

Содержат сведения по вопросам построения гистограммы, полигона частот и полигона накопленных частот распределения результатов измерения. Указывается порядок выполнения практического занятия, подходы к решению и правила оформления.

Методические рекомендации соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по специальности автоматизированного машиностроительного производства (УМОАМ).

Предназначено для студентов направлений 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» профиль «Технология машиностроения» дневной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подготовлено в печать 07.02.18 г. Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 0,7. Уч.-изд.л. 0,8. Тираж 40 экз. Заказ.882 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы: Научиться выполнять группировку данных и оформлять результаты обработки эмпирической выборки графически (в виде полигона, гистограммы, эмпирической функции распределения).

2 Задание: Построить полигон, гистограмму и эмпирическую функцию распределения результатов измерения диаметра шейки вала (см. п. 8) и оформить отчет о выполненной работе.

3 Краткие теоретические сведения

3.1. Построение эмпирических распределений. Оценка плотности вероятностей и функции распределения

Просматривая результаты наблюдений (измерений) трудно заметить какую-либо закономерность в их изменении. Выявить такие закономерности позволяют статистические методы.

Предварительная статистическая обработка опытных данных начинается обычно с того, что их располагают в порядке возрастания (точнее, неубывания). Упорядоченная таким образом выборка называется *вариационным рядом*, а сама процедура упорядочения – *ранжированием* (или сортировкой) опытных данных.

Наглядной формой графического представления эмпирических данных является *гистограмма* и *полигон*. Построение гистограммы (полигона) позволяет обоснованно выдвигать гипотезы о законе распределения обрабатываемых экспериментальных данных. Зная закон распределения наблюдаемой случайной величины можно решать многие практические задачи, связанные с обработкой результатов измерений, контролем качества продукции, оценкой эффективности и стабильности технологических процессов.

При непрерывном распределении случайной величины X эмпирическая плотность распределения вероятностей может быть изображена в виде *гистограммы* или *полигона относительных частот*. Для этого должна быть выполнена *группировка* значений выборки, которая состоит в следующем.

Весь интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$, в котором заключены элементы выборки, разбивается на ряд частичных непересекающихся интервалов (*разрядов*) $(a_i, b_i]$ длины h и подсчитывается число элементов выборки n_i , попавших в i -й интервал $i = 1, 2, \dots, m$. Параллельно вычис-

ляется и *относительная частота* $w_i = n_i / n$. При графическом изображении гистограммы и полигона каждый интервал удобнее представлять не двумя границами a_i и b_i , а одним значением $\bar{x}_i = a_i + h/2$ - серединой интервала.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h , а высоты равны отношению n_i/h (*плотность частоты*). Площадь частичного i -го прямоугольника равна $h(n_i/h) = n_i$ - числу выборочных элементов, попавших в i -й интервал. Площадь гистограммы частот равна объему выборки n .

Полигон частот – это ломаная линия, получающаяся при соединении точек с координатами $(\bar{x}_i, n_i/h)$, т.е. соединяются середины верхних сторон прямоугольников гистограммы.

Аналогично определяется *гистограмма и полигон относительных частот*.

Для *гистограммы относительных частот* площадь частичного i -го прямоугольника равна $h(w_i/h) = w_i$ - относительной частоте элементов, попавших в i -й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. *единице*. При достаточно большом объеме выборки высоты построенных прямоугольников дают приближенные значения плотности распределения $f(x)$ в средних точках \bar{x}_i интервалов (a_i, b_i) .

Полигон относительных частот – это ломаная линия, соединяющая точки $(\bar{x}_1, w_1/h), (\bar{x}_2, w_2/h), \dots, (\bar{x}_m, w_m/h)$, где \bar{x}_i - середины интервалов группирования, w_i - соответствующие им относительные частоты.

Полигон накопленных частот – это график ломаной линии, соединяющей точки

$$(b_1, n_1), (b_2, n_1 + n_2), \dots, \left(b_k, \sum_{i=1}^k n_i \right), \dots, \left(b_m, \sum_{i=1}^m n_i \right),$$

с абсциссами, равными правым границам интервалов группирования, и ординатами, равными накопленным частотам.

Аналогично, *полигон накопленных относительных частот* – это ломаная линия, получающаяся соединением точек с координатами

$$(b_1, w_1), (b_2, w_1 + w_2), \dots, \left(b_k, \sum_{i=1}^k w_i\right), \dots, \left(b_m, \sum_{i=1}^m w_i = 1\right).$$

Эмпирической (выборочной) функцией распределения называется функция $\hat{F}(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Строится она так. Для данного числа x подсчитывается число элементов вариационного ряда $x_{(i)}$, меньших x и делится на объем выборки:

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{\min} \equiv x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} < x < x_{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & x > x_{\max} \equiv x_{(n)} \end{cases}$$

Используя функцию единичного скачка

$$H(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 1, & u \geq 0 \end{cases},$$

формулу для эмпирической функции распределения можно записать более компактно

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(x - x_{(i)}).$$

В математической статистике доказывается, что гистограмма и полигон относительных частот являются *состоятельными оценками плотности распределения*, а полигон накопленных относительных частот (или эмпирическая функция распределения) – *состоятельной оценкой истинной функции распределения* генеральной совокупности. При этом, чем больше объем выборки, тем мельче можно взять интервалы разбиения h и тем точнее гистограмма и эмпирическая функция распределения будут аппроксимировать соответствующие теоретические распределения.

Число интервалов группирования эмпирических данных m существенно влияет на вид гистограммы. Четких рекомендаций на этот счет не существует, ясно лишь то, что это число не должно быть «очень малым» или «очень большим». Для выборок среднего объема (несколько сотен элементов) число интервалов обычно выбирают в диапазоне 8 – 12. Согласно рекомендации ВНИИ Метрологии им.

Д.И. Менделеева в зависимости от объема выборки n число интервалов группирования m следует выбирать согласно таблице

n	40 – 100	100 – 500	500 – 1000	1000 – 10000
m	7 – 9	8 – 12	10 – 16	12 – 22

Часто в литературе по математической статистике для выбора оптимального значения m рекомендуется формула

$$m = 1 + 3.32 \lg(n) = 1 + \log_2(n) = 1 + 1.44 \ln(n),$$

записанная с использованием десятичного, двоичного или натурального логарифма; или формула

$$m = 5 \lg(n),$$

где n - объем выборки. Существуют и иные рекомендации. Однако все рекомендуемые формулы не имеют строгого обоснования и дают лишь ориентировочное количество интервалов m , которое при желании может быть изменено в ту или другую сторону.

При определении диапазона возможных значений параметра m можно ориентироваться на формулы

$$m_{\min} = 0.55n^{0.4}, \quad m_{\max} = 1.25n^{0.4},$$

дающие оценки минимального и максимального значения данного параметра. В качестве оптимального значения m рекомендуется выбирать целое число из интервала $[m_{\min}, m_{\max}]$. Обычно в этот интервал попадает несколько целых чисел; после построения гистограмм для каждого из этих чисел, «оптимальное» значение параметра m определяется визуально. Для симметричных распределений в качестве значения m рекомендуется выбирать нечетное целое число из интервала $[m_{\min}, m_{\max}]$.

После определения m вычисляется длина интервалов группирования

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m},$$

и производятся все дальнейшие вычисления, необходимые для построения гистограммы, полигона и эмпирической функции распределения.

Пример: При обработке валика на токарном станке необходимо выдержать размер $\varnothing 22,27_{-0,44}$.

Из текущей продукции станка берется выборка из деталей, изготовленных при неизменной настройке, объемом $n=90$ шт. Результаты измерений занесены в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты измерения диаметра деталей

22,02	21,97	22,03	22,05	22,01	22,04	21,98	22,04	21,99	21,93	22,05	21,98	21,91
21,99	22,05	21,99	21,84	21,81	22,06	22,00	22,04	21,92	22,07	21,92	22,0	22,0
21,98	22,06	22,03	22,05	21,98	22,06	22,04	21,88	22,08	21,98	22,04	22,0	22,01
21,92	21,96	21,99	21,99	21,94	21,90	21,93	21,94	22,07	22,09	21,82	21,92	21,99
21,94	22,06	22,02	21,99	22,15	22,00	21,88	21,97	21,99	22,13	21,88	22,03	21,96
21,89	21,97	21,93	21,95	21,98	22,01	22,05	22,04	22,09	21,87	22,09	22,01	22,07
21,89	22,0	21,96	22,06	21,93	22,02	21,95	22,06	22,03	22,05	22,03	21,89	

Находим наибольшее и наименьшее значения

$$X_{max} = 22,15; X_{min} = 21,81.$$

Определяем размах

$$R = 22,15 - 21,81 = 0,34.$$

Принимаем количество интервалов равное 9 ($m=9$). Определяем ширину интервала

$$h = 0,34/9 = 0,038.$$

Для удобства построения выбираем ширину интервала равную 0,04 ($h=0,04$).

Границы интервалов устанавливаем следующими: левая граница первого интервала принимается 21,80 (меньше X_{min}), правая отстоит на ширину интервала и составляет 21,84. Последующие границы 21,88; 21,92; 21,96 и т.д.

Правая граница последнего интервала 22,16, что больше наибольшего из имеющихся значений.

Определяем частоту попадания размеров в установленные интервалы (n_i).

Результаты подсчетов сводим в таблицу. Накопленная частота определяется путем прибавления каждого последующего значения частоты к сумме предыдущих значений.

Таблица 2 – Бланк для подсчета частоты

№	Интервалы	Середина интервала	Штриховые отметки частоты	Частота	Накопленная частота
1	21,80-21,84	21,82		3	3
2	21,84-21,88	21,86		4	7
3	21,88-21,92	21,90	###	9	16
4	21,92-21,96	21,94	### ##	12	28
5	21,96-22,00	21,98	### ## ## ##	24	52
6	22,00-22,04	22,02	### ## ##	17	69
7	22,04-22,08	22,06	### ## ##	16	85
8	22,08-22,12	22,10		3	88
9	22,12-22,16	22,14		2	90

Строим гистограмму и полигон частот распределения (рисунок 1).

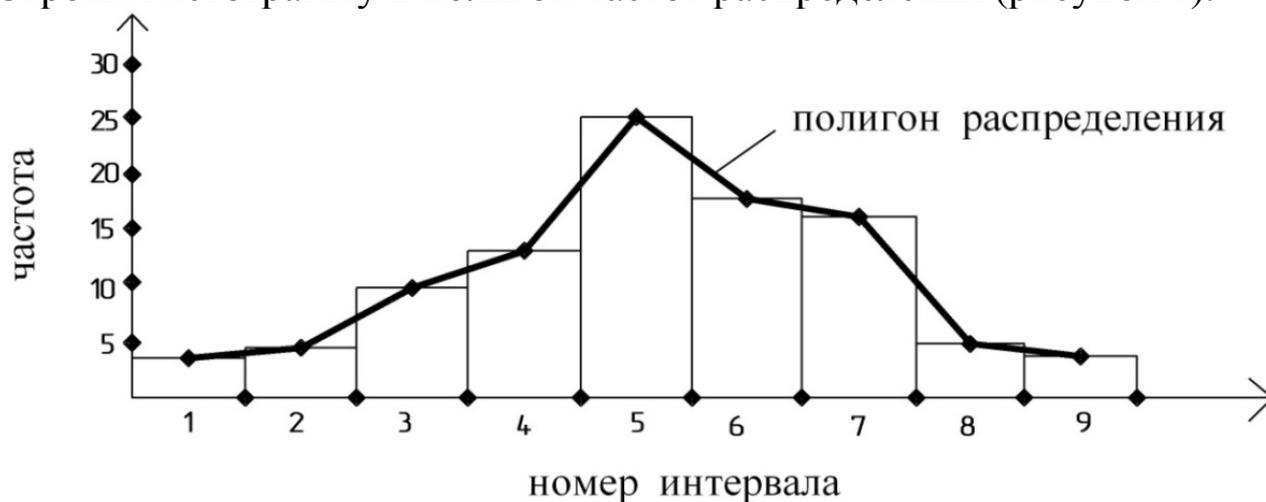


Рис. 1 – Гистограмма и полигон частот распределения значений диаметра вала

Далее строим полигон накопленных частот (рис. 2)



Рис. 2 - Полигон накопленных частот распределения значений диаметра вала

3.2 Анализ формы гистограммы

Гистограмма может иметь различную форму, по которой можно судить об условиях и результатах исследуемого процесса. При анализе гистограммы можно выяснить в удовлетворительном ли состоянии находится партия изделий и технологический процесс, а также предложить мероприятия по приведению процесса в стабильное состояние.

На рисунке 3 приведены типичные виды гистограмм, которыми можно воспользоваться как образцами при анализе процессов.

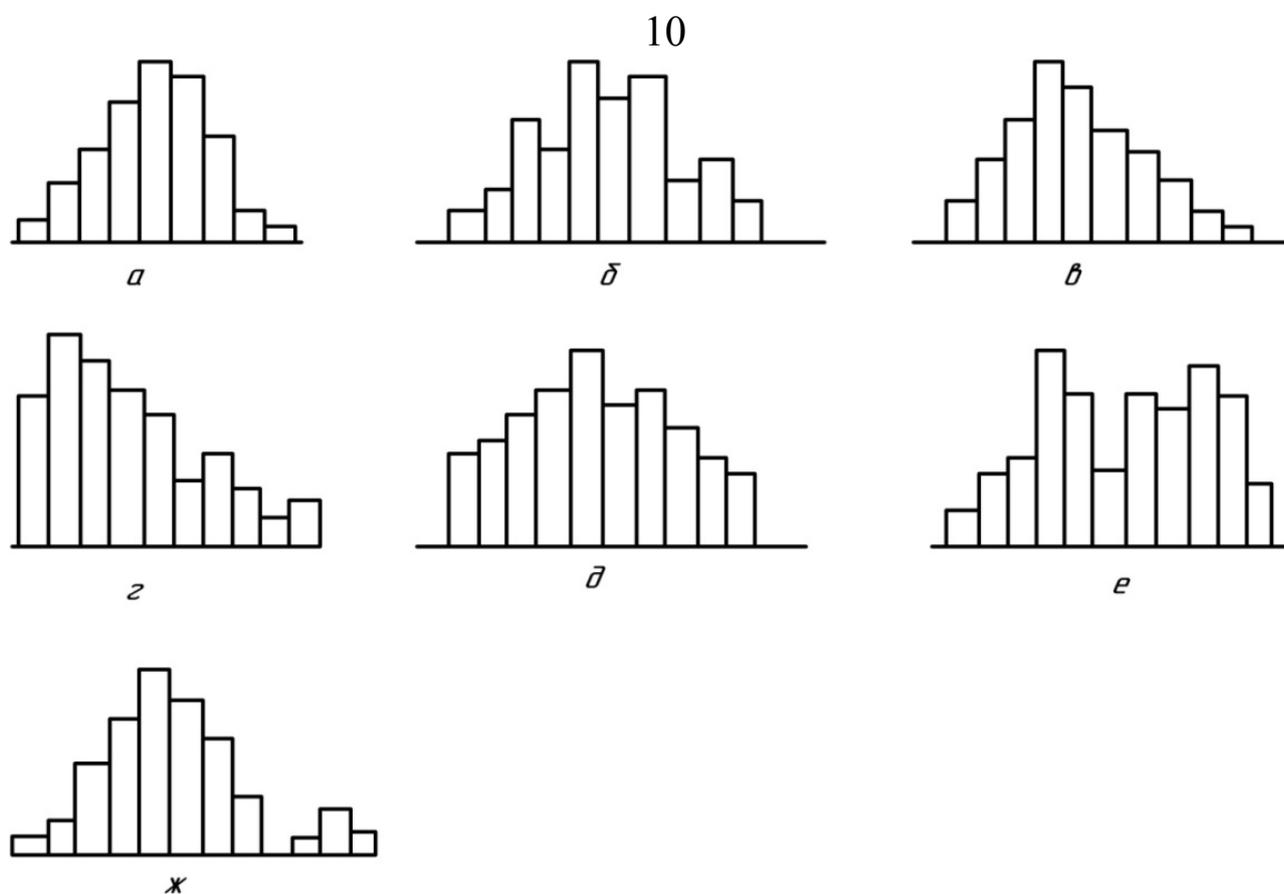


Рис. 3 – Виды гистограмм

Обычный тип, симметричный (рисунок 3, а). Гистограмма с таким распределением встречается чаще всего. Она указывает на стабильность процесса.

Гребенка (мультимодальный тип) (рисунок 3, б). Интервалы через один имеют более низкие частоты. Такая форма встречается, когда число единичных наблюдений, попадающих в интервал, колеблется, или когда действует определенное правило округления данных.

Положительно (отрицательно) скошенное распределение (рисунок 3, в). Среднее значение гистограммы локализуется слева (справа) от центра размаха. Частоты довольно резко спадают при движении влево (вправо) и, наоборот, медленно вправо (влево). Такая асимметричная форма встречается, когда невозможно получить значение ниже определенного, например, для диаметра деталей.

Распределение с обрывом слева (справа) (рисунок 3, г). Это одна из тех форм, которые часто встречаются при 100%-м контроле изделий из-за плохой воспроизводимости процесса, а также, когда, на-

пример, отобраны и исключены из выборки все изделия с параметрами ниже (или выше) контрольного норматива.

Плато (равномерное и прямоугольное распределение) (рисунок 3, д). Такая гистограмма получается в случаях, когда объединяются несколько распределений, в которых средние значения различаются незначительно. Например, детали обрабатываются на станках-дублерах. Анализ такой гистограммы целесообразно проводить, используя метод расслоения.

Двухпиковое (бимодальное) распределение (рисунок 3, е). Такая форма встречается, когда смешиваются два распределения с далеко отстоящими средними значениями, например, в случае наличия разницы между двумя видами материалов, двумя операторами, разными типоразмерами станков. В этом случае можно провести расслоение по двум видам факторов, исследовать причины различия и принять соответствующие меры для его устранения.

Распределение с изолированным пиком (рисунок 3, ж). Рядом с распределением обычного типа появляется маленький изолированный пик. Эта форма гистограммы появляется при наличии малых включений данных из другого распределения или грубых ошибок при измерениях.

По виду гистограммы можно приблизительно судить о стабильности и устойчивости процесса. Однако для более точного решения этих задач необходимо знать закон распределения случайной величины.

На практике эмпирические распределения строятся в виде гистограммы или полигона, т.е. ломаной линии, соединяющей середины частот в каждом интервале (рисунок 1). Эмпирические распределения значений случайных величин могут подчиняться различным законам. Зная закон распределения, можно заранее предсказать, что те или иные значения случайной величины могут появиться с той или иной вероятностью. Знание законов распределения бывает необходимым для принятия определенных решений по анализу и управлению процессами. Закон распределения может быть представлен в интегральной или дифференциальной форме, которая является более наглядной и поэтому более предпочтительной.

Среди различных законов наиболее широко применяется закон нормального распределения (закон Гаусса). Этому закону подчиня-

ются случайные величины, на которые оказывают влияние многочисленные, примерно равные по силе воздействия, факторы. Этому закону подчиняются размеры деталей, обрабатываемых на настроенных станках; результаты многократных измерений, при отсутствии систематических погрешностей и многие другие величины. Нормальное распределение свидетельствует об устойчивости технологического процесса.

Для того чтобы убедиться, что распределение подчиняется закону Гаусса, необходимо провести проверку гипотезы нормальности распределения.

Если гипотеза нормальности распределения не подтверждается, то оценивание процесса ведут на основе того закона распределения, который был установлен, либо, что бывает чаще, получают приближенную оценку зоны рассеивания.

При подтверждении гипотезы о соответствии эмпирического распределения нормальному закону становится возможным исследование воспроизводимости процесса, т.е. определяется неизменность основных параметров процесса: среднего арифметического значения и среднего квадратического отклонения. После чего можно провести статистический анализ точности технологического процесса.

4 Выполнение работы

Получив исходные данные для выполнения практической работы (см. приложение), студент изучает теоретические сведения согласно пункту 3. Далее выполняет действия аналогичные действиям в рассмотренном примере (пункт 3.1) **с учетом имеющихся особенностей задания.**

В отчёте должны найти отражение следующие пункты:

- название практической работы;
- цель работы;
- индивидуальное задание для выполнения практической работы;
- краткие теоретические сведения;
- результаты выполнения работы: таблица с исходными, таблица с параметрами распределения;

- подробные выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Что графически представляет собой гистограмма распределения?
2. Как строится полигон распределения?
3. Как определяется количество и ширина интервалов при построении гистограммы?
4. О чем свидетельствует форма гистограммы?

Библиографический список

1. Сергеев, А.Г. Метрология [Текст]/ А.Г. Сергеев, В.В. Крохин. Учебное пособие для вузов. М.: Логос, 2001. 488 с.: ил.
2. Алексахин, С.В. Прикладной статистический анализ [Текст]/ С.В. Алексахин, А.В. Балдин, А.Б. Николаев, В.Ю. Строганов. Учебное пособие для вузов. М.: “Издательство ПРИОР”, 2001. 224 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А**Исходные данные к практической работе**

№ варианта										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	28,855	43,026	31,981	58,657	93,441	6,005	7,002	13,808	50,663	10,034
2	28,916	43,073	32,039	58,632	93,467	6,003	7,001	13,838	50,663	10,002
3	28,859	42,976	32,002	58,673	93,439	5,994	6,999	13,808	50,615	9,997
4	28,863	43,029	31,975	58,653	93,462	5,998	6,998	13,818	50,616	9,976
5	28,915	43,057	32,063	58,634	93,446	5,987	7,000	13,818	50,657	10,020
6	28,853	42,982	31,964	58,684	93,469	5,986	6,995	13,814	50,650	9,979
7	28,934	43,040	32,050	58,651	93,451	6,012	7,006	13,847	50,612	9,984
8	28,955	43,068	31,967	58,688	93,464	6,005	6,995	13,831	50,619	9,974
9	28,902	43,037	31,951	58,668	93,436	6,008	7,002	13,799	50,630	9,975
10	28,960	43,074	32,021	58,657	93,428	5,998	7,003	13,850	50,625	9,981
11	28,961	43,018	32,051	58,655	93,439	6,000	7,004	13,800	50,641	9,922
12	28,895	43,006	31,977	58,682	93,442	6,005	6,998	13,809	50,661	10,000
13	28,919	43,046	31,948	58,615	93,423	6,005	7,001	13,812	50,664	9,955
14	28,938	43,059	31,990	58,682	93,461	5,999	6,996	13,829	50,657	10,029
15	28,956	43,024	32,027	58,638	93,446	5,996	6,998	13,796	50,653	9,960
16	28,960	43,006	32,026	58,646	93,459	5,997	7,001	13,819	50,653	9,938
17	28,867	43,047	32,018	58,649	93,477	6,003	6,997	13,856	50,610	9,964
18	28,905	43,075	32,009	58,654	93,469	6,011	6,998	13,842	50,660	10,056
19	28,889	42,980	31,919	58,639	93,454	6,002	6,998	13,799	50,645	10,005
20	28,882	43,029	32,052	58,673	93,464	6,008	7,001	13,848	50,644	10,016
21	28,874	43,038	32,011	58,669	93,450	6,004	7,002	13,787	50,616	10,033
22	28,917	42,985	32,011	58,645	93,474	6,006	6,999	13,826	50,626	9,944
23	28,915	43,050	32,025	58,606	93,453	6,008	6,999	13,837	50,663	9,994
24	28,900	43,044	31,954	58,639	93,461	6,003	7,004	13,819	50,649	9,976
25	28,946	43,068	32,010	58,634	93,445	5,991	6,998	13,825	50,635	9,982
26	28,911	42,983	31,963	58,691	93,432	5,996	6,997	13,826	50,661	10,029
27	28,907	43,021	32,004	58,646	93,433	6,000	7,001	13,835	50,620	9,956
28	28,870	42,998	31,985	58,644	93,475	5,999	6,998	13,812	50,620	10,013
29	28,890	43,027	32,028	58,605	93,462	5,997	6,998	13,844	50,656	9,994
30	28,904	43,006	31,954	58,659	93,441	5,999	7,001	13,843	50,621	9,895
31	28,952	43,006	32,013	58,669	93,427	6,004	7,000	13,847	50,658	9,984
32	28,961	43,060	32,040	58,653	93,455	5,981	7,002	13,844	50,617	10,012
33	28,892	42,984	32,039	58,690	93,459	6,001	6,998	13,831	50,664	9,974
34	28,893	42,978	32,000	58,626	93,432	5,996	7,000	13,811	50,617	10,002
35	28,912	43,025	32,071	58,626	93,466	6,006	7,003	13,823	50,636	9,972

№ варианта										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	28,916	42,981	31,982	58,670	93,456	5,991	7,003	13,828	50,619	9,983
37	28,928	43,059	31,983	58,649	93,449	6,008	7,000	13,787	50,630	9,963
38	28,915	43,067	32,022	58,671	93,433	6,004	7,001	13,789	50,641	9,989
39	28,925	43,017	32,030	58,606	93,479	5,999	6,996	13,844	50,619	10,034
40	28,863	43,075	31,926	58,636	93,440	5,994	7,001	13,848	50,635	9,963
41	28,893	43,010	32,008	58,667	93,451	6,008	7,002	13,847	50,663	9,961
42	28,853	43,040	31,974	58,610	93,436	6,003	6,990	13,812	50,654	9,983
43	28,889	42,987	31,974	58,644	93,476	6,004	7,002	13,818	50,625	9,979
44	28,867	43,071	31,983	58,669	93,453	6,009	6,999	13,790	50,648	9,976
45	28,933	43,041	32,019	58,663	93,429	6,003	7,005	13,841	50,617	9,981
46	28,852	43,040	31,981	58,623	93,451	6,003	6,996	13,797	50,639	10,049
47	28,913	43,054	32,084	58,607	93,459	6,002	6,999	13,844	50,631	9,938
48	28,868	43,075	31,995	58,627	93,444	5,999	6,999	13,796	50,640	10,002
49	28,904	43,075	32,008	58,633	93,454	5,999	6,999	13,813	50,634	10,024
50	28,890	43,033	32,018	58,680	93,448	5,995	6,998	13,835	50,615	9,992
51	28,890	42,973	32,024	58,644	93,442	6,007	7,004	13,849	50,631	10,020
52	28,854	43,068	31,945	58,630	93,459	6,001	7,005	13,799	50,663	9,965
53	28,944	42,988	32,020	58,648	93,442	6,007	6,998	13,817	50,630	10,058
54	28,930	43,029	32,027	58,653	93,441	5,997	7,002	13,803	50,613	9,996
55	28,943	42,973	31,959	58,614	93,461	6,002	7,000	13,797	50,629	9,985
56	28,942	43,066	32,003	58,668	93,468	5,987	6,999	13,789	50,644	9,981
57	28,882	43,043	32,059	58,619	93,477	6,003	7,002	13,859	50,630	9,960
58	28,924	43,014	32,037	58,694	93,452	6,012	6,997	13,827	50,623	10,036
59	28,898	43,043	32,031	58,627	93,432	5,996	6,999	13,822	50,630	10,021
60	28,935	42,982	31,999	58,654	93,424	5,995	6,994	13,838	50,612	10,031

№ варианта										
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	10,958	41,593	50,389	14,044	80,489	15,983	17,001	95,096	19,000	19,992
2	11,048	41,594	50,369	13,985	80,489	15,972	16,984	95,076	18,949	20,002
3	11,008	41,572	50,389	13,972	80,483	15,973	16,996	95,172	18,952	19,995
4	11,024	41,569	50,370	13,994	80,489	16,035	16,966	95,116	19,036	19,997
5	11,004	41,554	50,371	14,006	80,487	15,960	16,991	95,180	18,907	19,994
6	11,000	41,593	50,369	13,976	80,482	15,967	16,972	95,110	19,014	19,992
7	10,987	41,564	50,378	13,996	80,487	15,952	16,978	95,154	18,966	20,002
8	10,973	41,561	50,377	13,981	80,486	15,991	17,003	95,105	18,992	20,004
9	11,009	41,551	50,371	14,023	80,482	15,967	16,996	95,143	18,972	19,998
10	10,987	41,584	50,371	14,025	80,482	15,964	17,018	95,105	19,010	19,986
11	11,013	41,569	50,364	14,011	80,482	15,997	16,989	95,135	18,913	19,996

№ варианта										
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12	11,073	41,592	50,366	13,967	80,488	15,948	17,006	95,169	19,005	19,999
13	11,019	41,591	50,362	13,988	80,489	15,976	17,006	95,169	18,977	20,003
14	11,010	41,589	50,365	14,035	80,483	15,968	16,972	95,155	19,028	20,008
15	11,014	41,583	50,364	14,046	80,484	15,919	16,987	95,080	18,994	20,004
16	10,996	41,581	50,375	14,011	80,488	15,968	17,006	95,183	19,012	20,005
17	11,032	41,588	50,361	13,999	80,484	15,960	17,031	95,170	18,994	19,994
18	10,927	41,569	50,379	14,010	80,483	15,943	16,986	95,114	19,024	19,994
19	11,042	41,567	50,373	13,981	80,484	16,062	16,998	95,149	19,036	20,001
20	10,993	41,580	50,355	14,024	80,484	16,050	16,983	95,133	18,973	20,008
21	11,065	41,583	50,390	13,982	80,484	16,047	17,013	95,125	18,981	20,005
22	11,050	41,570	50,363	13,985	80,486	15,874	17,021	95,086	19,011	19,997
23	10,997	41,568	50,389	13,956	80,481	15,973	17,009	95,083	19,002	19,993
24	11,050	41,585	50,388	14,014	80,484	16,005	16,992	95,170	18,981	19,996
25	11,048	41,574	50,374	13,990	80,486	15,976	17,023	95,143	19,009	19,992
26	11,065	41,567	50,354	14,031	80,489	16,011	17,030	95,078	18,975	19,997
27	10,994	41,590	50,360	14,040	80,484	16,063	16,986	95,151	18,993	19,995
28	10,931	41,591	50,390	13,999	80,486	15,978	16,972	95,079	19,007	20,000
29	10,997	41,555	50,382	13,993	80,486	16,030	17,033	95,068	18,913	20,009
30	10,931	41,576	50,364	13,982	80,488	16,008	16,978	95,095	18,948	20,003
31	10,946	41,574	50,374	13,940	80,484	15,969	17,001	95,066	18,995	20,013
32	10,976	41,571	50,374	13,996	80,482	16,013	16,987	95,065	18,967	20,008
33	11,029	41,569	50,353	13,977	80,486	15,996	17,027	95,154	19,064	19,990
34	10,971	41,588	50,367	13,986	80,485	15,988	17,006	95,161	18,981	19,998
35	10,996	41,545	50,388	13,995	80,483	15,988	17,005	95,129	18,960	20,002
36	10,970	41,595	50,394	13,980	80,483	15,974	16,994	95,106	18,984	19,997
37	11,065	41,593	50,365	14,033	80,485	15,993	17,002	95,173	19,068	19,996
38	11,031	41,586	50,392	13,989	80,484	16,061	16,976	95,132	18,984	19,990
39	11,024	41,556	50,397	14,036	80,484	16,029	17,003	95,087	19,056	20,002
40	10,972	41,549	50,353	13,993	80,485	15,983	16,980	95,133	19,064	20,010
41	11,005	41,546	50,354	14,007	80,489	15,974	17,004	95,170	18,976	19,999
42	11,064	41,569	50,387	14,031	80,488	16,072	16,980	95,063	18,947	20,006
43	10,968	41,559	50,390	13,965	80,484	16,039	16,990	95,125	18,990	19,983
44	11,000	41,548	50,359	14,015	80,485	15,975	16,999	95,174	18,981	20,007
45	10,997	41,551	50,362	14,003	80,484	15,929	16,998	95,111	18,974	20,005
46	10,959	41,559	50,373	14,017	80,487	15,915	16,966	95,174	18,982	19,991
47	11,018	41,594	50,380	13,950	80,487	16,001	16,996	95,160	19,041	19,994
48	11,016	41,568	50,368	13,990	80,481	15,956	16,995	95,163	18,973	20,008
49	10,942	41,560	50,394	13,963	80,484	16,013	17,003	95,109	19,025	20,008
50	10,975	41,577	50,359	13,978	80,486	16,035	16,974	95,073	18,986	20,010

№ варианта										
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
51	11,015	41,566	50,395	14,017	80,481	16,021	17,017	95,172	19,042	20,003
52	11,030	41,591	50,367	14,007	80,487	15,941	17,024	95,129	19,114	20,007
53	11,036	41,588	50,392	14,011	80,482	16,042	17,016	95,106	18,939	19,995
54	11,018	41,565	50,366	14,046	80,484	15,893	17,013	95,079	18,975	19,999
55	10,997	41,548	50,391	13,976	80,483	15,874	16,994	95,125	18,939	20,006
56	10,958	41,582	50,383	13,946	80,485	16,014	17,011	95,181	19,029	19,992
57	10,981	41,590	50,384	14,017	80,486	16,034	16,998	95,172	19,016	19,999
58	11,060	41,546	50,362	14,021	80,484	15,968	16,986	95,173	18,997	20,007
59	11,038	41,557	50,360	14,036	80,484	15,924	17,022	95,149	19,015	19,991
60	11,007	41,567	50,375	13,993	80,481	15,952	17,021	95,176	19,030	19,999