

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



УТВЕРЖАЮ  
Профессор учебной работе  
О.Г. Локтионова  
2016 г.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ  
УПРАВЛЕНИЯ ДВУХЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ**

Методические указания по выполнению практической,  
расчетно-графической и самостоятельной работы  
по дисциплине «Программное обеспечение мехатронных  
и робототехнических систем»

Курск 2016

УДК 621.(076.1)

Составители: Мальчиков А.В., Яцул С.Ф.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент Е.Н. Политов

**Математическое моделирование системы управления двухзвенным манипулятором:** методические указания по выполнению расчетно-графической работы по дисциплине: «Программное обеспечение мехатронных и робототехнических систем» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.Ф. Яцул, А.В. Мальчиков. – Курск, 2016. – 19 с., 12-ил. – Библиограф.: 19 с.

Изложены вопросы, связанные с проектированием верхнего уровня архитектуры системы управления робототехническими устройствами. Приведены рекомендации и порядок составления отдельных разделов расчетно-графической работы.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.03.06 Мехатроника и робототехника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 5.08.16. Формат 60x84 1/16

Усл.печ.л. 10 Уч.-изд.л. 99 Тираж 20 экз. Заказ ~~412~~ Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

## Содержание

1	Цель и задачи работы	4
2	Задание	5
3	Краткая теория	6
4	Ход работы	9
4.1	<i>Математическая модель двухзвенного манипулятора</i>	9
4.2	<i>Программная реализация модели в среде Mathcad</i>	11
5	Пример выполнения	14
6	Исходные данные для выполнения работы	17
	Библиографический список	18

## 1 Цель и задачи работы

Целью работы является освоение студентами принципов построения и функционирования программного обеспечения для практической реализации системы автоматического управления мехатронного электропривода.

Данная работа выполняется в ходе практического занятия «Математическое моделирование системы управления двухзвенным манипулятором»

Выполнение работы ориентировано на формирование у студентов следующих элементов профессиональных компетенций:

ПК2 – способность разрабатывать программное обеспечение, необходимое для обработки информации и управления в мехатронных и робототехнических системах, а также для их проектирования; способностью проводить вычислительные эксперименты с использованием стандартных программных пакетов с целью исследования математических моделей мехатронных и робототехнических систем

ПК6 – способность проводить вычислительные эксперименты с использованием стандартных программных пакетов с целью исследования математических моделей мехатронных и робототехнических систем

**2. Задание:**

1. Разработать алгоритм формирования управляющего воздействия для приводов манипулятора согласно требуемому закону перемещения исполнительного органа.
2. Провести моделирование работы системы в среде Mathcad для требуемых траекторий.
3. Исследовать влияние параметров системы на качество управления и ошибку позиционирования звеньев.
4. Сделать выводы на основе полученных результатов

### 3 Краткая теория

Для манипуляторов и других примеров многозвенных роботов актуальными являются решение основных задач кинематики.

Прямая задача – это вычисление положения  $(X, Y, Z)$  рабочего органа манипулятора по его кинематической схеме и заданной ориентации  $(A_1, A_2 \dots A_n)$  его звеньев ( $n$  – число степеней свободы манипулятора,  $A$  – углы поворота).

Обратная задача – это вычисление углов  $(A_1, A_2 \dots A_n)$  по заданному положению  $(X, Y, Z)$  рабочего органа и опять же известной схеме его кинематики.

Т.о., решение прямой задачи говорит – где будет находиться рабочий орган манипулятора, при заданных углах его суставов, а обратная задача, наоборот, говорит: как нужно переместиться звеньям манипулятора, чтобы его рабочий орган оказался в заданном положении.

Очевидно, что более распространённой и важной является именно обратная задача кинематики.

Но нужно иметь в виду, что эта задача редко может быть решена однозначно.

При решении обратной задачи аналитически, эта неоднозначность проявляется в явном виде (например, через квадратные корни).

Существует ряд методов позволяющих решить обратную задачу кинематики даже в случае наличия избыточных степеней свободы.

К аналитическим методам можно отнести:

- Метод обратных преобразований (суть метода заключается в определении углов поворотов звеньев из уравнений для отдельных элементов имеющегося матричного уравнения)
- Метод бикватернионных матриц (используются дуальные параметры Родрига – Гамильтона)
- Метод, основанный на геометрическом подходе.

К недостаткам аналитического решения относятся сложность получения обобщенных координат в явном виде и неопределенность, связанная с кинематической неоднозначностью

и используемыми тригонометрическими функциями. Однако, основным недостатком все же является невозможность получения решения для произвольных конструкций манипуляторов. Вернее, манипуляторы уже проектируются с учетом того, что описание кинематики будет возможно с помощью аналитических выражений.

Кроме аналитических методов широко используются численные методы, методы локального поиска. Итеративный подход позволяет добиться требуемой точности для различных конфигураций манипуляторов.

Наиболее простым в программной реализации, является метод, основанный на геометрических соотношениях. Так, например, в промышленных манипуляторах SCARA используется следующий подход.

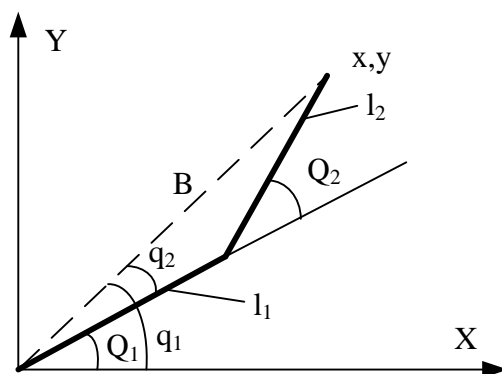


Рис. 1. Расчетная схема манипулятора

Для данной схемы, можно записать:

$$B = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$q_1 = \arctg(y/x)$$

$$q_2 = \arccos\left(\frac{l_1^2 - l_2^2 + B^2}{2l_1 B}\right)$$

$$Q_1 = q_1 - q_2$$

$$Q_2 = \pi - \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - B^2}{2l_1 l_2}\right)$$

Где  $Q_1$  и  $Q_2$  – это и есть искомые углы относительного поворота звеньев.

## 4.Ход работы

### 4.1 Математическая модель двухзвенного манипулятора

На рис. 2 показана схема двухзвенного манипулятора, состоящего из основания 1, электроприводов 2 и 3, звеньев 4 и 5, и исполнительного органа 6.

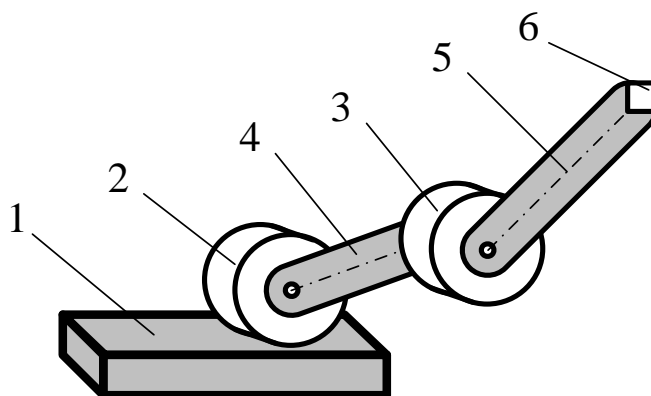


Рис. 2. Схема двухзвенного манипулятора

Для математического описания данной конструкции рассмотрим расчетную схему, показанную на рис. 3.

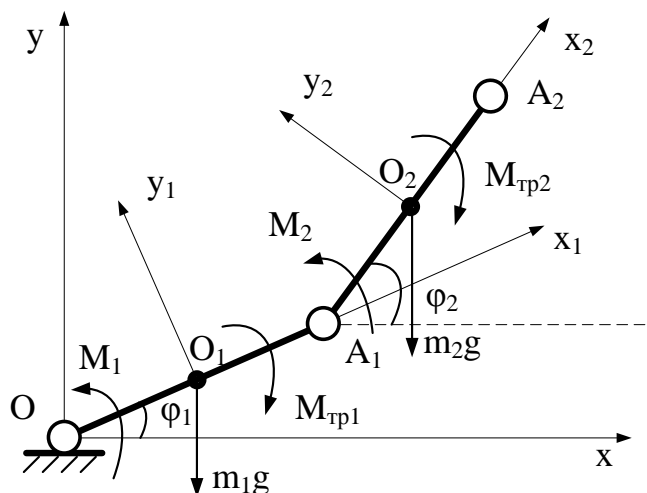


Рис. 3. Расчетная схема электромеханического устройства

Согласно приведенной схеме: Звенья  $OA_1$  и  $A_1A_2$  осуществляют перемещение рабочего органа, точки  $A_3$ , под действием крутящих моментов  $M_1$  и  $M_2$ . Примем, что центры масс звеньев  $OA_1$  и  $A_1A_2$  расположены в их геометрических центрах  $O_1$ ,  $O_2$ . Введем подвижные системы координат  $X_1Y_1O_1$  и  $X_2Y_2O_2$  связанные с центрами масс звеньев.



Рассмотрим частный случай, при котором, на манипулятор не действуют внешние силы, а нагрузка на приводы определяется силой тяжести, моментом силы трения, а также инерционными силами возникающими в системе.

Для исследования динамики движения устройства в качестве обобщенных координат примем абсолютные углы поворота обоих звеньев длинами  $l_1, l_2$  и массами  $m_1, m_2$ , относительно их центров масс:  $\varphi_1, \varphi_2$ . Далее, запишем дифференциальные уравнения, воспользовавшись уравнением Лагранжа 2-го рода, при этом правые части уравнения найдем методом возможных перемещений. Итоговая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_2 \left( J_{A_2} + \frac{m_2 l_2^2}{4} \right) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = M_2 - M_{fr2} - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) \\ \ddot{\varphi}_1 \left( J_{A_1} + m_1 l_1^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \\ = M_1 - M_{fr1} - m_2 g l_2 \cos(\varphi_1) - m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) \end{cases}$$

Здесь:  $J_{A_1}, J_{A_2}$  - моменты инерции звеньев, а моменты трения определяется как:

$$M_{tr i} = \begin{cases} M^{тр.пред} \text{sign}(\dot{\varphi}_i), & \text{если } \dot{\varphi}_i \neq 0; \\ \sum M_i^{внеш}, & \text{если } \dot{\varphi}_i = 0 \text{ и } \left| \sum M_i^{внеш} \right| \leq M_i^{тр.пред}, \\ M^{тр.пред} \text{sign}(\sum M_i^{внеш}), & \text{если } \dot{\varphi}_i = 0 \text{ и } \left| \sum M_i^{внеш} \right| > M_i^{тр.пред}, \end{cases}$$

Для электроприводов можно записать следующее уравнение:

$$L_{я} \frac{dI_{я}}{dt} + r_{я} I_{я} + C_e \dot{\varphi}_i^* \cdot i_{ред} = U_i,$$

где  $L_{я}$  - индуктивность обмотки двигателя,  $r_{я}$  - сопротивление обмотки,  $C_e$  - электромеханический коэффициент двигателя,  $i_{ред}$  - передаточное отношение редуктора. При этом  $I_{я}$  - ток в цепи якоря определяющий крутящий момент электродвигателя:  $M_i = C_M I_{я} i_{ред}$ .  $U_i$  - управляющее напряжение формируемое системой управления.

## 4.2 Программная реализация модели в среде Mathcad

Далее покажем листинг программы математического моделирования управляемого движения двухзвенного манипулятора в среде Mathcad.

```

M1 := 0    L1 := 0.1    m1 := 0.05
M2 := 0    L2 := 0.1    m2 := 0.05

JA1 :=  $\frac{m1 \cdot L1^2}{12}$     JA2 :=  $\frac{m2 \cdot L2^2}{12}$ 

g := 9.81

Func(Time) :=
  dt ← 0.00001
  Count ←  $\frac{Time}{dt}$ 
  ddφ2 ← 0
  dφ2 ← 0
  φ2 ← 0
  ddφ1 ← 0
  dφ1 ← 0
  φ1 ← 0
  L ← 0.00008
  R ← 0.3
  red ← 10
  Cm ← 0.03
  Ce ← 0.03
  MtrPr ← 0.01
  W ← 27
  I1 ← 0
  I2 ← 0
  kp ← 0.5
  ki ← 0
  kd ← 0
  fs ← 1000
  fc ← 200
  NULL ← 0.0001

```

Рис. 4. Листинг. Часть 1. Инициализация переменных

```

for i ∈ 0.. Count
  if mod(i,  $\frac{1}{dt \cdot fs}$ ) = 0
    | s $\varphi$ 1 ← round( $\frac{\varphi_1 \cdot 360}{2 \cdot \pi}, 0$ )
    | s $\varphi$ 2 ← round( $\frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot 360}{2 \cdot \pi}, 0$ )
  if mod(i,  $\frac{1}{dt \cdot fc}$ ) = 0
    |  $\varphi$ zad1 ← 45
    | sd $\varphi$ 1 ←  $\frac{[(\varphi$ zad1 - s $\varphi$ 1) - (prevs $\varphi$ zad1 - prevs $\varphi$ 1)]}{dt \cdot fc}
```

---

```

i $\varphi$ 1 ←  $[(\varphi$ zad1 - s $\varphi$ 1) \cdot dt \cdot fc + i $\varphi$ 1]
prevs $\varphi$ 1 ← s $\varphi$ 1
prevs $\varphi$ zad1 ←  $\varphi$ zad1
cU1 ← kp \cdot ( $\varphi$ zad1 - s $\varphi$ 1) + kd \cdot sd $\varphi$ 1 + ki \cdot i $\varphi$ 1
U1 ←  $\begin{cases} cU1 & \text{if } |cU1| < 9 \\ 9 \cdot \text{sign}(cU1) & \text{otherwise} \end{cases}$ 
 $\varphi$ zad2 ← 45
sd $\varphi$ 2 ←  $\frac{[(\varphi$ zad2 - s $\varphi$ 2) - (prevs $\varphi$ zad2 - prevs $\varphi$ 2)]}{dt \cdot fc}
```

---

```

i $\varphi$ 2 ←  $[(\varphi$ zad2 - s $\varphi$ 2) \cdot dt \cdot fc + i $\varphi$ 2]
prevs $\varphi$ 2 ← s $\varphi$ 2
prevs $\varphi$ zad2 ←  $\varphi$ zad2
cU2 ← kp \cdot ( $\varphi$ zad2 - s $\varphi$ 2) + kd \cdot sd $\varphi$ 2 + ki \cdot i $\varphi$ 2
U2 ←  $\begin{cases} cU2 & \text{if } |cU2| < 9 \\ 9 \cdot \text{sign}(cU2) & \text{otherwise} \end{cases}$ 

```

Рис. 5. Листинг. Часть 2. Программная реализация моделирования САУ

$$\begin{aligned}
dI1 &\leftarrow \frac{U1 - R \cdot I1 - Ce \cdot d\varphi1 \cdot red}{L} \\
dI2 &\leftarrow \frac{U2 - R \cdot I2 - Ce \cdot d\varphi2 \cdot red}{L} \\
I1 &\leftarrow I1 + dI1 \cdot dt \\
I2 &\leftarrow I2 + dI2 \cdot dt \\
I1 &\leftarrow \begin{cases} I1 & \text{if } |I1 - U1| < W \\ \frac{W}{U1} & \text{otherwise} \end{cases} \\
I2 &\leftarrow \begin{cases} I2 & \text{if } |I2 - U2| < W \\ \frac{W}{U2} & \text{otherwise} \end{cases} \\
M1 &\leftarrow Cm \cdot I1 \cdot red \\
M2 &\leftarrow Cm \cdot I2 \cdot red \\
SumM1 &\leftarrow M1 - m2 \cdot g \cdot L2 \cdot \cos(\varphi1) + m1 \cdot g \cdot \frac{L1}{2} \cdot \cos(\varphi1) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot dd\varphi2 \cdot \cos(\varphi1 - \varphi2) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot d\varphi2^2 \cdot \sin(\varphi1 - \varphi2) - dd\varphi1 \cdot (JA1 + m1 \cdot L1^2) \\
SumM2 &\leftarrow M2 - m2 \cdot g \cdot \frac{L2}{2} \cdot \cos(\varphi2) + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot d\varphi1^2 \cdot \sin(\varphi1 - \varphi2) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot dd\varphi1 \cdot \cos(\varphi1 - \varphi2) - dd\varphi2 \cdot \left( JA2 + \frac{m2 \cdot L2^2}{4} \right) \\
dd\varphi2 &\leftarrow \frac{\left( M2 - 0 - m2 \cdot g \cdot \frac{L2}{2} \cdot \cos(\varphi2) + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot d\varphi1^2 \cdot \sin(\varphi1 - \varphi2) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot dd\varphi1 \cdot \cos(\varphi1 - \varphi2) \right)}{JA2 + \frac{m2 \cdot L2^2}{4}} \\
d\varphi2 &\leftarrow d\varphi2 + dd\varphi2 \cdot dt \\
\varphi2 &\leftarrow \varphi2 + d\varphi2 \cdot dt + \frac{dd\varphi2 \cdot dt^2}{2} \\
\hline
dd\varphi1 &\leftarrow \frac{\left( M1 - 0 - m2 \cdot g \cdot L2 \cdot \cos(\varphi1) + m1 \cdot g \cdot \frac{L1}{2} \cdot \cos(\varphi1) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot dd\varphi2 \cdot \cos(\varphi1 - \varphi2) - \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot L1 \cdot L2 \cdot d\varphi2^2 \cdot \sin(\varphi1 - \varphi2) \right)}{JA1 + m1 \cdot L1^2} \\
d\varphi1 &\leftarrow d\varphi1 + dd\varphi1 \cdot dt \\
\varphi1 &\leftarrow \varphi1 + d\varphi1 \cdot dt + \frac{dd\varphi1 \cdot dt^2}{2} \\
x1 &\leftarrow L1 \cdot \cos(\varphi1) \\
y1 &\leftarrow L1 \cdot \sin(\varphi1) \\
x3 &\leftarrow L1 \cdot \cos(\varphi2) + L2 \cdot \cos(\varphi2) \\
y3 &\leftarrow L1 \cdot \sin(\varphi2) + L2 \cdot \sin(\varphi2)
\end{aligned}$$

Рис. 6. Листинг. Часть 3. Моделирование динамики манипулятора

$$\begin{aligned}
M_{i,0} &\leftarrow dt \cdot i \\
M_{i,1} &\leftarrow \varphi1 \\
M_{i,2} &\leftarrow \varphi2 \\
M_{i,3} &\leftarrow x1 \\
M_{i,4} &\leftarrow y1 \\
M_{i,5} &\leftarrow x3 \\
M_{i,6} &\leftarrow y3
\end{aligned}$$

M

A := Func(2)

Рис. 7. Листинг. Часть 4. Сохранение результатов

## 5 Пример выполнения

В работе требуется осуществить перемещение рабочего органа по окружности с центром в точке с координатами:  $X = 0.6l_1$   $Y = 0.4l_2$  и радиусом  $0.5l_1$

Рассмотрим схему перемещения звена робота

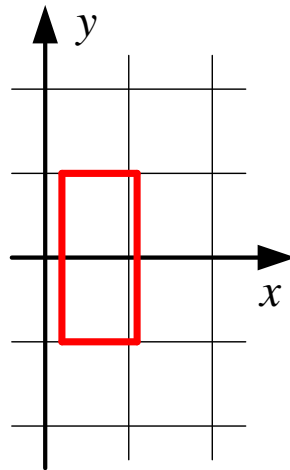


Рис. 8. Схема траектории выходного звена манипулятора

Зададим траекторию перемещения четырьмя точками, тогда фрагмент программы в `mathcad`, задающий координаты, будет иметь вид:

```

if i < 1000001
  if i < 200000
    xh ← 0.01
    yh ← -0.05
  otherwise
    if i < 400000
      xh ← 0.055
      yh ← -0.05
    otherwise
      if i < 600000
        xh ← 0.055
        yh ← 0.05
      otherwise
        if i < 800000
          xh ← 0.01
          yh ← 0.05
        otherwise
          if i < 1000000
            xh ← 0.01
            yh ← -0.05
          otherwise
            xh ← 0.01
            yh ← -0.05

```

Рис. 9 Фрагмент листинга задающие координаты выходного звена

Результаты моделирования представим в виде графиков. После решения обратной задачи, требуемые углы поворота будут иметь вид.

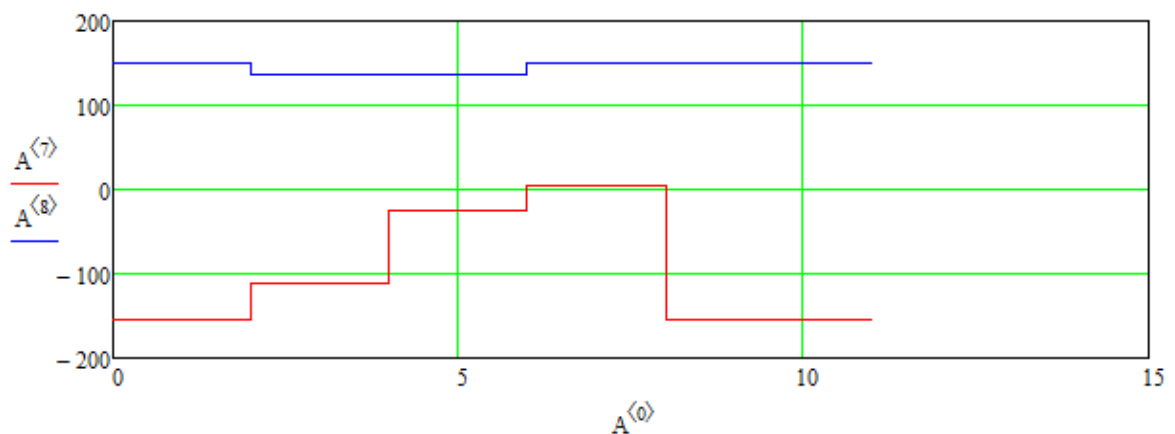


Рис. 10. Временные диаграммы задающих воздействий

Углы поворота обрабатываемые манипулятором при этом будут иметь вид

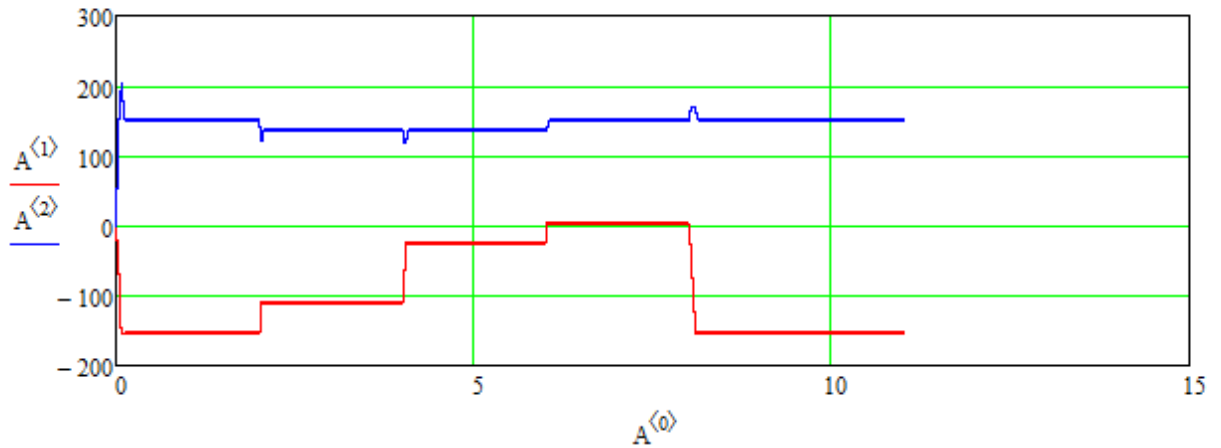


Рис. 11 Временные диаграммы углов

При этом траектория выходного звена выглядит следующим образом

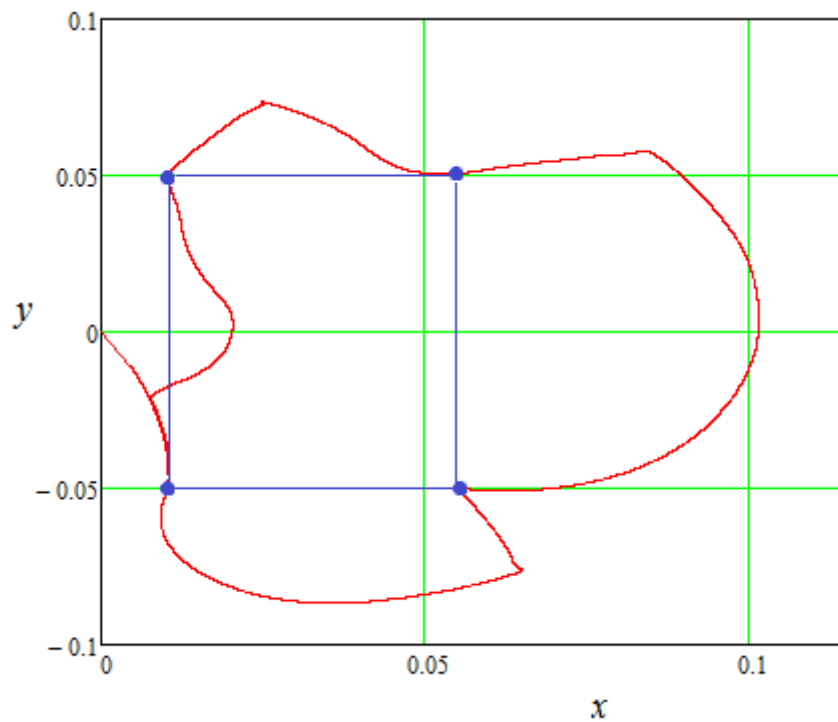


Рис. 12 График траектории выходного звена

Как показали результаты моделирования 4х точек для задания траектории недостаточно, зададим траекторию 8ю точками

## 6 Исходные данные для выполнения работы

Номер варианта	Требуемая траектория
1	Окружность с центром в точке с координатами: $X = 0.6l_1$ $Y = 0.4l_2$ и радиусом $0.5l_1$
2	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.1l_1$ $Y = 0.1l_2$ и сторонами длиной $0.8l_2$ и $0.4l_2$
3	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.1l_1$ $Y = -0.2l_2$ и стороной длиной $0.6l_2$
4	Окружность с центром в точке с координатами: $X = 0.6l_1$ $Y = -0.4l_2$ и радиусом $0.2l_1$
5	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.5l_1$ $Y = 0.5l_2$ и сторонами длиной $0.5l_2$ и $0.6l_2$
6	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.5l_1$ $Y = -0.5l_2$ и стороной длиной $0.3l_2$
7	Окружность с центром в точке с координатами: $X = 0.5l_1$ $Y = 0$ и радиусом $0.3l_1$
8	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.5l_1$ $Y = 0$ и сторонами длиной $0.3l_2$ и $0.2l_2$
9	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.5l_1$ $Y = -0.6l_2$ и стороной длиной $0.4l_2$
10	Окружность с центром в точке с координатами: $X = 0.8l_1$ $Y = 0.1l_2$ и радиусом $0.4l_1$
11	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.3l_1$ $Y = 0.5l_2$ и сторонами длиной $0.3l_2$ и $0.4l_2$
12	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.3l_1$ $Y = -0.5l_2$ и стороной длиной $0.2l_2$
13	Окружность с центром в точке с координатами: $X = 0.7l_1$ $Y = -0.1l_2$ и радиусом $0.3l_1$
14	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.3l_1$ $Y = 0.5l_2$ и сторонами длиной $0.2l_2$ и $0.4l_2$
15	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.3l_1$ $Y = -0.5l_2$ и стороной длиной $0.3l_2$
16	Окружность с центром в точке с координатами: $X = l_1$ $Y = 0.1l_2$ и радиусом $0.5l_1$
17	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0.8l_1$ $Y = 0.5l_2$ и сторонами длиной $0.3l_2$ и $0.1l_2$
18	Квадрат с координатами начальной точки: $X = 0.7l_1$ $Y = -0.1l_2$ и стороной длиной $0.5l_2$
19	Окружность с центром в точке с координатами: $X = l_1$ $Y = l_2$ и радиусом $0.1l_1$
20	Прямоугольник с координатами начальной точки: $X = 0$ $Y = 0.5l_2$ и сторонами длиной $0.4l_2$ и $0.5l_2$

Параметры манипулятора, берутся из задания к РГР1. При этом  $l_2=0.9l_1$  для четных номеров варианта, и  $l_2=1.1l_1$  для нечетных. Остальные параметры, включая массу звеньев, принимаются равными.



## Библиографический список

1. Astrom K.J., Hagglund T.. Advanced PID control. - ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006, 460 p.
2. Денисенко В.В. ПИД-регуляторы: вопросы реализации. - СТА, №4, 2007, с. 86 - 97, №1, 2008, с. 86-99.
3. Денисенко В.В. Разновидности ПИД-регуляторов. Автоматизация в промышленности, №6, 2007, с. 45 - 50.
4. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М.: МЭИ, 2004, 400 с.
5. Calcev G., Gorez R. Iterative technique for PID controller tuning. - Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995, vol. 3, 13-15 Dec 1995, p. 3209 - 3210.
6. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984, 541 с.
7. Энциклопедия АСУ ТП, [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://bookasutp.ru>