МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
И.Ч. И.Е. Чернецкая
«30» 06 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«Методы оптимизации»

09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

1.1 ВОПРОСЫ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

Раздел (тема) дисциплины: «Методологические основы оптимизации. Условия экстремума гладких функций»

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?

- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?
- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условие минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.

Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы одномерной минимизации»

- 1. Для решения какой задачи предназначены методы одномерного поиска?
- 2. Дайте определения минимума и максимума функции одной переменной.
- 3. Дайте определение стационарной точки.
- 4. Дайте определение интервала неопределенности.
- 5. Из каких этапов состоит большинство методов одномерного поиска?
- 6. Какое наименьшее количество точек на графике функции надо знать, чтобы определить интервал неопределенности?
- 7. Какое наименьшее количество точек внутри интервала неопределенности необходимо определить, чтобы уменьшить этот интервал?
- 8. Сформулируйте правило исключения интервалов.
- 9. Чем отличается пассивная стратегия поиска?
- 10. Какое назначение метода равномерного поиска?
- 11. Опишите метод равномерного поиска.
- 12. Как оценивается эффективность метода равномерного поиска?
- 13. Какие преимущества и недостатки метода равномерного поиска?
- 14. Чем отличаются последовательные методы одномерного поиска?
- 15. Какое назначение метода дихотомии?
- 16. Какие основные принципы метода дихотомии?
- 17. Опишите метод дихотомии.
- 18. Как оценивается эффективность метода дихотомии?
- 19. Какого порядка метод дихотомии?
- 20. В чем заключаются преимущества и недостатки метода дихотомии?
- 21. Какая задача привела к открытию золотого сечения?
- 22. Выведите уравнение золотого сечения.
- 23. Приведите численное представление золотого сечения.

- 24 Укажите алгебраические свойства золотого сечения.
- 25. Какова особенность золотой прогрессии?
- 26. Какое назначение метода золотого сечения?
- 27. Опишите метод золотого сечения.
- 28. Как начинается поиск минимума в методе золотого сечения?
- 29. Как оценивается эффективность метода золотого сечения?
- 30. Какого порядка метод золотого сечения?
- 31. Какие преимущества и недостатки метода золотого сечения?
- 32. Какое назначение метода ломаных?
- 33. Опишите метод ломаных.
- 34. Уменьшение значения константы Липшица приводит к замедлению метода ломаных. Объясните этот факт с помощью геометрической иллюстрации.
- 35. Покажите, что если в методе ломаных используется ошибочно заниженное значение константы Липшица, то задача минимизации будет решена неверно.

Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы безусловной минимизации функции многих переменных»

- 1. Дайте определение направления спуска.
- 2. Какие методы многомерной минимизации функций называются методами спуска?
- 3. Запишите условие точного одномерного поиска в многомерном пространстве.
- 4. Приведите формулы итерации метода спуска.
- 5. Составьте алгоритм метода спуска.
- 7. Дайте определение направления наискорейшего спуска. Опишите метод наискорейшего спуска.
- 8. По какому принципу задается направление шага в методе наискорейшего спуска?

- 9. Как вычисляется величина шага в методе наискорейшего спуска?
- 10. Как заканчиваются вычисления в методе наискорейшего спуска?
- 11. Какого порядка метод наискорейшего спуска?
- 12. Составьте алгоритм метода наискорейшего спуска.
- 13. Какова особенность траектории поиска для метода наискорейшего спуска?
- 14. Укажите достоинства и недостатки метода наискорейшего спуска.
- 15. Представьте в общем виде положительно определенную квадратичную функцию.
- 16. Запишите формулу для градиента квадратичной функции.
- 17. Приведите свойства квадратичной функции.
- 18. Выведите условие точного одномерного поиска для функции многих переменных.
- 19. Выведите условие точного одномерного поиска для квадратичной функции многих переменных.
- 20. Дайте определение сопряженных направлений.
- 21. В чем заключается основная идея метода сопряженных направлений для квадратичной функции многих переменных?
- 22. Запишите итерационные формулы метода сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.
- 23. Опишите метод сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.
- 24. По какому принципу задаются напрпавление и шаг в методе сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных?
- 25.Какого порядка метод сопряженных градиентов?
- 26. Запишите формулу Флетчера- Ривса.
- 27. Запишите итерационные формулы метода Флетчера - Ривса.
- 28. Опишите метод Флетчера - Ривса.

- 29. Как вычисляется величина шага в методе Флетчера - Ривса?
- 30. Как заканчиваются вычисления в методе Флетчера - Ривса?
- 31. Какого порядка метод Флетчера - Ривса?
- 32. Составьте алгоритм метода Флетчера- Ривса.
- 33. Составьте алгоритм экономного метода Флетчера - Ривса.
- 34. Укажите достоинства и недостатки метода Флетчера - Ривса.
- 35. Дайте определение рестарта в методе Флетчера - Ривса.
- 36. Обоснуйте необходимость применения рестартов в методе Флетчера - Ривса.
- 37. Раскройте роль рестартов в повышении эффективности метода Флетчера - Ривса.
- 38. В чем заключается основная идея метода Ньютона?
- 39. Представьте функцию многих переменных рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым второго порядка малости.
- 40. Выведите формулу метода Ньютона.
- 41. Дайте определение метода Ньютона для решения задачи безусловной минимизации функции многих переменных.
- 42. Приведите различные формулы метода Ньютона.
- 43. Запишите итерационные формулы метода Ньютона. Опишите метод Ньютона.
- 44. Какой принцип задания направления шага в методе Ньютона?
- 45. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона?
- 46. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона?
- 47. Какого порядка метод Ньютона?
- 48. Составьте алгоритм метода Ньютона.
- 49. При каком условии направление поиска в методе Ньютона будет направлением спуска?
- 50. Какое другое название метода Ньютона вы знаете?

- 51. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона.
- 52. Обоснуйте метод Ньютона с одномерным поиском.
- 53. Запишите формулы метода Ньютона с одномерным поиском.
- 54. Опишите метод Ньютона с одномерным поиском.
- 55. Как находят шаг в методе Ньютона с одномерным поиском?
- 56. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона с одномерным поиском?
- 57. Какого порядка метод Ньютона с одномерным поиском?
- 58. Составьте алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.
- 59. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона с одномерным поиском.
- 60. Приведите формулу метода Марквардта.
- 61. Какой принцип задания направления в методе Марквардта?
- 62. Как задаются параметры в методе Марквардта?
- 63. Запишите итерационные формулы метода Марквардта.
- 64. Опишите метод Марквардта.
- 65. Как вычисляется величина шага в методе Марквардта?
- 66. Как заканчиваются вычисления в методе Марквардта?
- 67. Какого порядка метод Марквардта?
- 68. Составьте алгоритм метода Марквардта.
- 68. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта.
- 70. Обоснуйте метод Марквардта с одномерным поиском.
- 71. Запишите итерационные формулы метода Марквардта с одномерным поиском.
- 72. Опишите метод Марквардта с одномерным поиском.
- 73. Как находят шаг в методе Марквардта с одномерным поиском?
- 74. Как заканчивают метод Марквардта с одномерным поиском?

- 75. Какого порядка метод Марквардта с одномерным поиском?
- 76. Дайте алгоритм метода Марквардта с одномерным поиском.
- 77. Укажите достоинства и недостатки метода Марквардта с одномерным поиском.
- 78. В чем заключается основная идея метода Пауэлла?
- 79. Запишите итерационные формулы метода Пауэлла.
- 80. Опишите метод Пауэлла.
- 81. По какому принципу задается направление шага в методе Пауэлла?
- 82. Как вычисляется величина шага в методе Пауэлла?
- 83. Как заканчиваются вычисления в методе Пауэлла?
- 84. Какого порядка метод Пауэлла?
- 85. Составьте алгоритм метода Пауэлла.
- 86. Укажите достоинства и недостатки метода Пауэлла.

  метод поиска по симплексу, метод Хука-Дживса
- 87. Опишите метод Хука-Дживса.
- 88. По какому принципу определяется направление спуска в методе Хука-Дживса?
- 89. Как проводится исследующий поиск?
- 90. Как проводится поиск по образцу?
- 91. Какого порядка метод Хука-Дживса?
- 92. Составьте алгоритм метода Хука-Дживса.
- 93. Укажите достоинства и недостатки метода Хука-Дживса.
- 94. Опишите метод деформируемого многогранника (поиска по симплексу).
- 95. Как задается координаты вершин многоогранника?
- 96. Как проводится операция «отражения»?
- 97. Опишите операцию «растяжения»?

- 98. Опишите операцию «редукции»?
- 99. Какого порядка метод деформируемого многогранника?
- 100. Составьте алгоритм деформируемого многогранника.
- 101. Укажите достоинства и недостатки метода деформируемого многогранника.

Раздел (тема) дисциплины: «Численные методы условной оптимизации»

- 1.Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 2. Опишите метод штрафов.
- 3. Какая функция называется вспомогательной и как она строится?
- 4. Какая функция называется штрафной?
- 5. Как строится штрафная функция?
- 6. Составьте алгоритм условной минимизации методом штрафов.
- 7. Обсудите сходимость метода штрафов.
- 8. Укажите достоинства и недостатки метода штрафов.
- 9. Опишите метод барьерных функций.
- 10. Что такое обратная и логарифмическая штрафная функция?
- 11. Составьте алгоритм условной минимизации методом барьерных функций.
- 12. Как формулируется сходимость метода барьерных функций? Укажите достоинства и недостатки метода барьерных функций.
- 13. В чем состоит идея комбинированного метода штрафных функций.
- 14. Опишите стратегию поиска.
- 15. Составьте алгоритм условной минимизации комбинированным методом штрафных функций.
- 16. Укажите достоинства и недостатки метода комбинированного метода штрафных функций.

Шкала оценивания: балльная

Критерии оценки

Оценка **«7 баллов»** выставляется обучающемуся, если он демонстрирует глубокое знание содержания вопроса, дает точные определения основных понятий, аргументированно и логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ актуальными примерами (типовыми и нестандартными), в том числе самостоятельно найденными, не нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **«5 баллов»** выставляется обучающемуся, если он владеет содержанием вопроса, но допускает некоторые недочеты при ответе, допускает незначительные неточности при определении основных понятий, недостаточно аргументированно и (или) логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ типовыми примерами.

Оценка **«3 балла»** выставляется обучающемуся, если он освоил основные положения контролируемой темы, но недостаточно четко дает определение основных понятий и дефиниций, затрудняется при ответах на дополнительные вопросы, приводит недостаточное количество примеров для иллюстрирования своего ответа, нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **« 0 баллов»** выставляется обучающемуся, если он не владеет содержанием вопроса или допускает грубые ошибки, затрудняется дать основные определения, не может привести или приводит неправильные примеры, не отвечает на уточняющие и (или) дополнительные вопросы преподавателя или допускает при ответе на них грубые ошибки

1.2 КЕЙС-ЗАДАЧИ

1. Найдите значение a, при котором достигает максимума функция

$f(a) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2)/2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + 3a - 1 = 0$.

2. Требуется спроектировать емкость в виде прямого кругового цилиндра фиксированного объема V, имеющего наименьшую длину швов.

(а) Постройте графики целевой функции и функции ограничения.

(б) Проиллюстрируйте решение задачи графически.

3. Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной a.

Объем призмы фиксирован и равен 1 см^3.

Указание к задаче: Объем призмы $V = SH$, где S– площадь основания, H – высота.

4. Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 6\sqrt{3}$ м^2. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания a и высота H), чтобы объем палатки был наибольший? Проиллюстрируйте решение задачи графически.

5. Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму кругового конуса заданной вместимости $V = 9\pi/2$ м^3. Каковы должны быть размеры конуса (высота H и радиус основания R), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

Указание: Площадь кругового сектора $S = \dfrac{Lr}{2}$, L – длина дуги, r — радиус сектора.

6. Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершенного с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны $V = 40\pi/3$ м^3. Найдите радиус R цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

Указание: Объем шара $V = 4\pi R^3/3$, площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

6. Требуется изготовить коническую воронку с образующей L, равной 20 м. Какова должна быть высота воронки H, чтобы ее объем был наибольшим?

7. Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), имеющей наименьшую длину швов. Основанием призмы является равносторонний треугольник с стороной a. Объем призмы фиксирован и равен 1 см^3.

Указание к задаче: Объем призмы $V = SH$, где S– площадь основания $S = \dfrac{a^2\sqrt{4}}{4}$, H – высота.

8. Из куска проволоки, длиной L требуется согнуть прямоугольник так, чтобы его площадь была наибольшей.

9. (задача Евклида). В заданный треугольник ABC с высотой H и основанием b вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

Указание к задаче: Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется $(H-h)/H = a/b$, где a и h –основание и высота параллелограмма.

10. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R и имеющего наибольшую пложадь S.

Указание к задаче: Условие, что прямоугольник вписан в окружность радиуса R, определяется $a^2+b^2=4R^2$, где a и b – стороны прямоугольна.

11. В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежпт в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую цилиндром.

Указание к задаче: Условие, что прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр, определяется равенством $r/R = (H-h)/H$, где r, h – радиус основания и высота цилиндра; H, R – высота и радиус основания конуса.

Общие указания:

(а) ***Пирамида называется правильной****, если основание ее — правильный многоугольник и высота падает в центр основания. В правильной пирамиде все боковые ребра равны, а все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани называется* ***апофемой*** *правильной пирамиды.*

(б) ***Формула площади боковой поверхности*** *правильной пирамиды:*

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot L,$$

P — периметр основания; L — апофема (перпендикуляр, опущенный из вершины на ребро основания).

(в) ***Апофема*** *правильной пирамиды $L = \sqrt{H^2+r^2}$, где H – высота пирамиды, r – радиус вписанной окружности в правильный многоугольник (основание правильной пирамиды).*

(г) ***Объем*** *V всякой пирамиды равен*

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания, H — высота пирамиды.

12. Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (2,0,1)^T$ и $\boldsymbol{x}_* = (0,0,0)^T$ точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

13. Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (-1,-1)^T$точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

14. Найти безусловный экстремум функции $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$.

15. Найти безусловный экстремум функции $f(\boldsymbol{x}) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$.

16. Методом *деления интервала пополам* решите задачу одномерной минимизации:

$f(x) = x^3 - \sin x,\ L_0 = [0; 1]$.

17. Методом *деления интервала пополам* решите задачу одномерной минимизации:

$f(x) = x^4 + x^2 + x + 1,\ L_0 = [-1; 0]$.

18. Методом *дихотомии* решите задачу одномерной минимизации:

$f(x) = x\sin(1/x),\ L_0 = [0.2; 1.0]$.

19. Методом *дихотомии* решите задачу минимизации:

$f(x) = x\sin x + 2\cos x,\ L_0 = [-6; -4]$.

20. Методом *золотого сечения* решите задачу одномерной минимизации:

$f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2},\ L_0 = [0.1; 1.0]$;

21. Методом *золотого сечения* решите задачу минимизации:

$f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^3}{3} + 2x,\ L_0 = [-2.5; -1.0]$.

22. Методом *ломаных* решите задачу минимизации:

$f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x,\ L_0 = [-0.5; 1.0]$.

23. Методом *ломаных* решите задачу минимизации: $f(x) = (x-1)^2\sin x$, $L_0 = [-2.0; 3.0]$ю

24. Методом *ломаных* решите задачу минимизации: $f(x) = x^4 + \mathrm{e}^x$, $L_0 = [0.0; 1.0]$.

Указания. Для каждого реализованного метода оценить число итераций, необходимое для определения точки минимума x_* с заданной точностью. ε ($\varepsilon \approx \sqrt{masheps}$). Провести сравнение методов. Алгоритм метода ломаных проиллюстрировать графически.

25. Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции (выполните 2 итерации)

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$, при начальном приближении $x_0 = (0,0)^T$;

26. Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации скалярной квадратичной функции

$f(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx + c$, где $a > 0, b, c$ – произвольные константы.

27. Сформулируйте теоретическое обоснование сходимости градиентного метода с постоянным шагом $\alpha_k = \alpha$ для функции $f(x)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Т.е. найдите такие α, для которых последовательность $x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...$, определяемая формулой (1), сходится к точке минимума функции $f(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx + c$.

28. Проверьте полученное условие сходимости численно для заданных значений a, b, (c): $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$. Оцените скорость сходимости в зависимости от величины α.

29. Решить задачу мнимизации функции

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \mathbf{b}^T\boldsymbol{x}$$

методом наискорейшего градиентного спуска. Построить линии уровня с указанием траектории движения. Варианты:

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & N+1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3N-1 \\ 5N+3 \end{bmatrix}.$$

Параметр N равен номеру студента в списке группы.

30. Решить численно задачу минимизации квадратичной функции методом сопряженных градиентов. Построить график функции и линии уровня:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \mathbf{b}^T\boldsymbol{x},$$

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & N+1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} N-1 \\ N+3 \end{bmatrix}.$$

Параметр N равен номеру студента в списке группы.

31. Решить численно задачу минимизации методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1;$

32. Решить численно задачу минимизации методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 64x_1^2 + 64x_1x_2 + 126x_2^2 - 10x_1 + 30x_2 + 13.$

33. Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 129x_1^2 - 256x_1x_2 + 129x_2^2 - 51x_1 - 149x_2 - 27.$

34. Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 254x_1^2 + 506x_1x_2 + 254x_2^2 + 50x_1 + 130x_2 - 111.$

35. Решить численно задачу функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 151x_1^2 - 300x_1x_2 + 151x_2^2 + 33x_1 + 99x_2 + 48.$

36. Решить численно задачу функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 85x_1^2 + 168x_1x_2 + 85x_2^2 + 29x_1 - 51x_2 + 83.$

37.
Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 211x_1^2 - 420x_1x_2 + 211xx_2^2 - 192x_1 + 52x_2 - 25.$

38. Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 194x_1^2 + 376x_1x_2 + 19x_2^2 + 31x_1 - 229x_2 + 4.$

39.
Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 45x_1^2 - 88x_1x_2 + 45x_2^2 + 102x_1 + 268x_2 - 21.$

40. Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = 99x_1^2 + 196x_1x_2 + 99x_2^2 - 95x_1 - 9x_2 + 9.$

41. Решить численно задачу минимизации функции методом Ньютона-Рафсона:
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$, $x_0 = (0, 0)^T$.

42. Методом барьерных функций найти условный минимум (использовать логарифмическую штрафную функцию) $f(x) = 3x^2 - x$, $x - 2 \leqslant 0$.

43. Методом штрафных функций найти условный максимум $f(x) = -4x_1^2 - 8x_1 + x_2 + 3$, $-x_1 - x_2 = 2$

44. Методом штрафных функций найти условный максимум
$f(x) = x_1 - 2x_2^2 + 4x_2$, $3x_1 + 2x_2 = -6$.

45. Методом штрафных функций найти условный максимум

$f(x) = -8x_1 + 4x_1^2 - x_2^2 + 12x_2 - 7$, $2x_1 + 3x_2 = -6$.

45. Методом барьерных функций найти условный минимум

$$f(x) = 4/x_1 + 9/x_2 + x_1 + x_2$$

, $x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

Шкала оценивания: балльная

Критерии оценки

Оценка **«3 балла»** выставляется обучающемуся, если задача решена правильно, в установленное преподавателем время или с опережением времени, при этом обучающимся предложено нестандартное или наиболее эффективное (или наиболее рациональное, или оптимальное) ее решение.

Оценка **«2 балла»** выставляется обучающемуся, если задача решена правильно, в установленное преподавателем время, типовым способом; допускается наличие несущественных недочетов.

Оценка **«1,5 балл»** выставляется обучающемуся, если при решении задачи допущены ошибки некритического характера и (или) превышено установленное преподавателем время.

Оценка **«0 баллов»** выставляется обучающемуся, если задача не решена или при ее решении допущены ошибки критического характера.

2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?

- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?
- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.

- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?
- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условие минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.
- 34. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая унимодальная функция на отрезке $[a, b]$. Оцените точность $\varepsilon(M)$ при определении минимума $f(x)$ методом равномерного поиска в результате вычисления M значений $f(x)$.
- 35. Интервал неопределенности минимума унимодальной функции.
- 36. Метод равномерного поиска.
- 37. Метод дихотомии.
- 38. Метод деления интервала пополам.
- 39. Золотое сечение и его свойства.
- 40. Метод золотого сечения.
- 41. Метод ломаных.
- 42. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 43. Покажите, что погрешность определения точки минимума функции $f(x)$ методом равномерного не превосходит величины $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.

- 44. Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой
$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$
- 45. Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой
$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
- 46. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют метод квадратичной интерполяции в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 47. Что такое золотое сечений отрезка? Чему равна величина Ф? Перечислите свойства золотого сечения отрезка, на которых базируется правило вычисления пробных точек в алгоритме минимизации.
- 48. Является ли условие $f'(x_*) = 0$ достаточным, для того чтобы число x_* было точкой минимума унимодальной, но невыпуклой функции $f(x)$?
- 49. Получите итерационную формулу метода Ньютона.
- 50. Получите итерационную формулу метода хорд.
- 51. Объясните работу алгоритма метода бисекции. Выполните одну итерацию.
- 52. Объясните работу алгоритма метода ломаных.
- 53. Известно, что увеличение константы Липшица L приводит к замедлению сходимости метода ломаных. Объясните почему с помощью геометрической иллюстрации.
- 54. Укажите класс функций, для которых точное определение точки минимума гарантировано в результате всего одной итерации метода Ньютона.
- 55. Дайте определение квадратичной функции.
- 56. Чему равны градиент и матрица Гессе квадратичной функции?

- 57. Выпишите матрицу Гессе A и градиент квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2 + x_3$.
- 58. Дайте определение производной по направлению.
- 59. Какие направления дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?
- 60. Когда говорят, что в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
производится исчерпывающий спуск?
- 61. Покажите, что если в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
выбор шага производится исчерпывающим спуском,
$$(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0.$$
- 63. В чем состоит идея метода наискорейшего градиентного спуска?
- 64. Сформулируйте идею метода сопряженных градиентов.
- 65. Метод Пауэлла.
- 66. Метод Флетчера-Ривса
- 67. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 68. Сформулируйте общий принцип построения методов первого и второго порядков.
- 69. Сформулируйте стратегию построения алгоритма симплексного метода.
- 70. Опишите алгоритм отражения вершины в симплексном методе.
- 71. Зачем необходим и в чем заключается алгоритм редукции в симплексном методе.
- 72. Сформулируйте особенности минимизации методом Нельдера-Мида.
- 73. В чем состоит стратегия метода Хука-Дживса?
- 74. В чем состоит метод покоординатного поиска?

- 75. Какие алгоритмы случайного поиска вы знаете. В чем состоит стратегия методов случайного поиска?
- 76. Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 77. Какая функция называется штрафной?
- 78. Алгоритм поиска условного экстремума методом штрафных функций.
- 79. Какая функция называется барьерной?
- 80. Алгоритм поиска условного экстремума методом барьерных функций.

По вопросам 1-80 формируются вопросы в тестовой форме.

2.2 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Что такое градиент $\nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции и каков его геометрический смысл?

Варианты ответов:

$$(а) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (б) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^n x_n} \end{bmatrix}. \quad (в) \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} \\ \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

- (а) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке $\mathbf{x}$, и указывает направление наибольшего возрастания функции в данной точке.
- (б) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке $\mathbf{x}$, в сторону точки экстремума функции.
- (в) Направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной в точке $\mathbf{x}$, и указывает направление наибольшего убывания функции в данной точке.

2. Метод золотого сечения: как выбираются пробные точки x_1, x_2 на отрезке неопределенности $[a, b]$?

Варианты ответов:

(а) $x_1 = a + \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \dfrac{2}{1-\sqrt{5}}(b-a).$

(б) $x_1 = a + b - x_2, \quad x_2 = a + b - x_1$ где $x_2 = a + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$

(в) $x_1 = a + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a), \quad x_2 = a + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a).$

3. Сформулируйте достаточное условие безусловного минимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного минимума.

Варианты ответов:

- (а)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0, \quad H(\mathbf{x}_*) > 0.$$

  Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, строго положительны.

- (б)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) < 0.$$

  Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, чередуются,
  начиная с отрицательного.

- (в)

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) \geqslant 0.$$

  Все главные миноры определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума неотрицательны.

4. Постройте вспомогательную функцию $\varphi(x, s_k)$ для поиска условного минимума функции $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2$, $x_1 + x_2 = 1$ методом штрафов.

Варианты ответов:

$$\text{(а).}\quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{s_k}{x_1 + x_2}.$$

$$\text{(б).}\quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{s_k}{2}(x_1 + x_2)^2.$$

$$\text{(в).}\quad \varphi(x, s_k) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{s_k}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2.$$

5. Какая квадратичная форма $x^T A x$ (и матрица Гессе A) называется положительно полуопределенной?

Варианты ответов:

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T A x > 0$.

(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T A x \geqslant 0$.

(в) Если для любого x выполняется неравенство $x^T A x \geqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T A x = 0$.

6. Запишите формулу метода Ньютона для минимизации функции одной переменной.

Варианты ответов:

(а)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(б)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(в)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

7. Что называется поверхностью уровня?

Варианты ответов:

(а) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция $f(x)$ и градиент $\nabla f(x)$ принимают постоянные значения.

(б) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \text{const}$.

(в) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \text{const}$, а матрица Гессе является положительно-определенной.

8. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ вычислить градиент в точке $x_* = (1, 0)^T$.

Варианты ответов:

$$\text{(а)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ найдите матрицу Гессе.

Варианты ответов:

(а) $\quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

(б) $\quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(в) $\quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

10. Устоновите знакоопреедeленность матрицы Гессе

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Варианты ответов:
(а) $\quad H > 0.$
(б) $\quad H < 0.$
(в) $\quad H \geqslant 0.$

11. Найдите экстремум функции $f(x) = 2x^8$.
Варианты ответов:

- (а) $x_* = 0$ – точка минимума.
- (б) $x_* = 0$ – точка максимума.
- (в) функция не имеет экстремума.

12. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
Варианты ответов:
(а) Определители m-ого порядка ($m \leqslant n$), получающиеся из определителя матрицы A вычеркиванием каких-либо $(n - m)$ строк и $(n - m)$ столбцов с одними и теми же номерами.
(б) Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(в) Определители m-ого порядка ($m \leqslant n$), получающиеся из определителя матрицы A вычеркиванием каких-либо m строк и (m) столбцов с одними и теми же номерами.

13. Ненулевые векторы $s^1, s^2, ..., s^k$ называются сопряженными относительно матрицы A, если:

Варианты ответов:
(а) $(As^i, s^j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$.
(б) $(As^i, s^j) = 0$, $i, j = \overline{1, k}$..
(в) $(As^i, s^j) < 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$.

14. Дайте определение производной функции в точке x^k вдоль направления s^k.

Варианты ответов:
(а) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = \dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{||\nabla f(x^k)||}$.
(б) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(||\nabla f(x^k)||)^2}$.
(в) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{||\nabla f(x^k)||}$.

15. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить цилиндр объемом V с наибольшей поверхностью S. Какими должны быть радиус основания R и высота цилиндра H?

Варианты ответов:
(а) $f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH, \quad V = \pi R^2 H, \quad V = \text{const}$.
(б) $f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH, \quad V = 2\pi R^2 H, \quad V = \text{const}$.
(в) $f(R) = \pi R^2 + \pi RH, \quad V = \pi R^2 H, \quad V = \text{const}$.

16. Что такое матрица Гессе $H(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции многих переменных?
Варианты ответов:

(а) $H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$. (б) $H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^n x_n} \end{bmatrix}$. (в) $H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} \\ \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$.

17. Чему равна длина интервала Δ_k, $k = 1, 2, ...$ неопределенности после 4-х итераций $(k = 4)$ методом дихотомии при заданном $\delta > 0$, если длина исходного интервала равна 16? ?

Варианты ответов:

(а) $\Delta_4 = 1 + \frac{15}{16}\delta.$

(б) $\Delta_4 = 1/2 + \frac{15}{16}\delta.$

(в) $\Delta_4 = 1 + \left(1 - \frac{1}{32}\right)\delta.$

18. Запишите итерационную формулу метода наискорейщего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.

19. В какой последовательности численно решается задача одномерной оптимизации?

Варианты ответов:

(а) 1- находится начальный интервал неопределенности; 2 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 3 - выбирается численный метод минимизации; 4 - составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 5 - проводится расчет точки минимума.

(б) 1 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 2- находится начальный интервал неопределенности; 3 - выбирается численный метод минимизации; 4 -составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 5 - проводится расчет точки минимума.

(в) 1 - выясняется максимум или минимум ищется, задача сводится к минимизации функции, если ищется максимум; 2- находится начальный интервал неопределенности; 3 -составляется алгоритм численного решения задачи и программа для ЭВМ; 4 - выбирается численный метод минимизации; 5 - проводится расчет точки минимума.

20. Найдите экстремум функции $f(x) = x^7$.

- (а) $x_* = 0$ – точка минимума.
- (б) $x_* = 0$ – точка максимума.
- (в) функция не имеет экстремума.

21. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется положительно определенной?

Варианты ответов:

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax > 0$.

(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax \geqslant 0$.

(в) Если для любого x выполняется неравенство $x^T Ax \geqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T Ax = 0$.

22. Как выбираются пробные точки в методе золотого сечения?

Варианты ответов:

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

23. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ и классифицировать ее.
Варианты ответов:

$$\text{(а)} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H < 0.$$

$$\text{(б)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

$$\text{(в)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

24. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе функции $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2 + 5$ в точке $\mathbf{x} = (0, 0)$.

Варианты ответов:
(а) $H > 0$.
(б) $H < 0$.
(в) $H \geqslant 0$.
25. Постройте целевую функцию для задачи. Из всех прямоугольных треугольников, имеющих площадь равный S, требуется найти тот, периметр которого наименьший.

Варианты ответов:
(а) $f(a) = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \dfrac{1}{2}ab, \quad S = \text{const}.$

(б) $f(a) = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \dfrac{a}{b}, \quad S = \text{const}.$

(в) $f(a) = 2(a + b) + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = \dfrac{1}{2}ab, \quad S = \text{const}.$

26. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.

Варианты ответов:
(а) Градиент функции $f(x)$ в точке x_* локального минимиума равен нулю, а матрица Гессе $H(x_*)$ является положительно полуопределенной: $\nabla f(x_*) = 0$ и $H(x_*) \geqslant 0$.

(б) Градиент функции $f(x)$ в точке x_* локального минимиума равен нулю: $\nabla f(x_*) = 0$.

(в) Градиент функции $f(x)$ в точке x_* локального минимиума равен нулю, а матрица Гессе $H(x_*)$ является отриательно определенной: $\nabla f(x_*) = 0$ и $H(x_*) < 0$.

27. Какая точка называется стационарной?

Варианты ответов:

(а) Точка x_*, удовлетворяющая условию $\nabla f(x_*) = 0$.

(б) Точка x_*, удовлетворяющая условиям $\nabla f(x_*) = 0$, $H(x_*) < 0$.

(в) Точка x_*, удовлетворяющая условиям $\nabla f(x_*) = 0$, $H(x_*) > 0$.

29. Сформулируйте необходимое и достаточные условие минимума для функции одной переменной.

Варианты ответов:

$$\text{(а)} \quad f'(x_*) = f''(x_*) = \cdots f^{(m-1)}(x_*) = 0, \quad f^{(m)}(x_*) > 0, \quad m - \text{четно.}$$

$$\text{(б)} \quad f'(x_*) = f''(x_*) = \cdots f^{(m-1)}(x_*) = 0, \quad f^{(m)}(x_*) > 0, \quad m - \text{нечетно.}$$

$$\text{(в)} \quad f'(x_*) = f''(x_*) = \cdots f^{(m-1)}(x_*) = 0, \quad f^{(m)}(x_*) < 0, \quad m - \text{четно.}$$

30. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве $\mathbb{R}^2$.

Варианты ответов:

(а) В точке $x_* = (0, 0)$ функция $f(x)$ имеет глобальный миниум.

(б) В точке $x_* = (0, 0)$ функция $f(x)$ имеет глобальный максимум.

(в) Точка $x_* = (0, 0)$ является точкой локального максимума.

31. Запишите итерационную процедуру, лежащую в основе градиентных методов.

Варианты ответов:
(а) $x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)$, $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.
(б) $x^{k+1} = x^k + \alpha_k \nabla f(x^k)$, $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.
(в) $x^{k+1} = x^k - \nabla f(x^k)$, $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

32. Сформулируйте достаточное условие безусловного максимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного максимума.

- (а)
$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0, \quad H(\mathbf{x}_*) > 0.$$
Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, строго положительны.

- (б)
$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) < 0.$$
Знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума, чередуются,начиная с отрицательного.

- (в)
$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = 0 \quad \text{и} \quad H(\mathbf{x}_*) \geqslant 0.$$
Все главные миноры определителя матрицы Гессе, вычисленной в точке минимума неотрицательны.

33. Чему равна длина интервала Δ_k, $k = 1, 2, ...$ неопределенности после 3-х итераций ($k = 3$) методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 1?

$$\text{(а)} \quad \Delta_3 = \frac{8}{(1+\sqrt{5})^3}.$$
$$\text{(б)} \quad \Delta_3 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{8}.$$
$$\text{(в)} \quad \Delta_4 = \frac{8}{(\sqrt{5}-1)^3}.$$

3. Функция $f(x) = x^5 - 1$ имеет две единственную стационарную точку $x_* = 0$. Определите, является ли $x_* = 0$ точкой экстремума.

- (а) $x_* = 0$ — точка максимума.
- (б) $x_* = 0$ — точка минимума.
- (в) $x_* = 0$ не является.

34. Постройте вспомогательную функцию $\varphi(x, s_k)$ для поиска условного минимума функция $f(x) = x^2$, $x \geqslant 1$ с применением обратной штрафной функции.

- (а)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 + \frac{s_k}{2}(x-1)^2.$$

- (б)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 - \frac{s_k}{(x-1)}.$$

- (в)

$$\varphi(x, s_k) = x^2 - \frac{s_k}{(1-x)}.$$

35. Как выбираются пробные точки x_1, x_2 в методе дихотомии?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a).$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

36. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется отрицательно определенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax{<}0$.
(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leqslant 0$.
(в) Если для любого x выполняется неравенство $x^T Ax \leqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T Ax = 0$.

37. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$.

(а) $H > 0$.
(б) $H < 0$.
(в) $H \geqslant 0$.

38. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить коническую воронку с образующей равной L. Каков должен быть радиус R основания конуса, чтобы объем воронки был наибольшим?

(а) $f(R) = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H, \quad H^2 + R^2 = L^2, \quad L = \mathrm{const}.$

(б) $f(R) = \dfrac{\pi}{R}^2 H, \quad H = \sqrt{L^2 - R^2}, \quad L = \mathrm{const}.$

(в) $f(R) = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H, \quad H = \sqrt{R^2 - L^2}, \quad L = \mathrm{const}.$

39. Чему равна величина шага исчерпывающего спуска в градиентном методе, если функции $f(x)$ квадратичная?

(а) $\alpha_k = -\dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \; s^k = -\nabla f(x^k).$

(б) $\alpha_k = \dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \; s^k = -\nabla f(x^k).$

(в) $\alpha_k = -\dfrac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{(A\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}.$

40. Как записывается итерационный процесс метода сопряженных градиентов для минимизации неквадратичных функций?

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k),$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = \frac{||\nabla f(x^{k+1}||^2}{||\nabla f(x^k||^2}.$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k),$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = -\frac{||\nabla f(x^k||^2}{||\nabla f(x^{k+1}||^2}.$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k),$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

41. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая производная отрицательна, то эта точка является точкой:

(а) максимума;

(б) минимума;

(в) перегиба.

13. При реализации метода барьерных функций параметр s_k штрафа формируется как:

(а) убывающая последовательность чисел;
(б) возрастающая последовательность чисел;
(в) $s_k =$const.

42. Как можно свести задачу максимизации к задаче минимизации?

$$(а)\quad x_* = \max_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D}(-f(x)).$$

$$(б)\quad x_* = \max_{x\in D} f(x) = -\min_{x\in D}(f(x)).$$

$$(в)\quad x_* = -\max_{x\in D} f(x) = \min_{x\in D}(-f(x)).$$

43. Что называется главными минорами симметричной матрицы?

(а) Определители m-ого порядка ($m \leqslant n$), получающиеся из определителя матрицы A вычеркиванием каких-либо $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов с одними и теми же номерами.
(б) Определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(в) Определители m-ого порядка ($m \leqslant n$), получающиеся из определителя матрицы A вычеркиванием каких-либо m строк и (m) столбцов с одними и теми же номерами.

44. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции n переменных?

(а) не более чем за n шагов.
(б) не более чем за $2n$ шагов.
(в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

45. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?

- (а)
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H(x)\Delta x + O(||\Delta x||^2).$$
- (б)
$$f(x+\Delta x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H(x)\Delta x + O(||\Delta x||^2).$$
- (в)
$$f(x+\Delta x) + f(x) = \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H(x)\Delta x + O(||\Delta x||^2).$$

46. Что называется поверхностью (линией) уровня?

- (а) Множество точек, в которых функция $f(x)$ принимает постоянное значение.
- (б) Множество точек, в которых функция $f(x)$ принимает постоянное значение и градиент функции в этих точках равен нулю.
- (в) Множество точек, в которых функция $f(x)$ принимает постоянное значение и градиент функции в этих точках меняет направление.

47. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров:

- (а) Главные миноры неотрицательны.
- (б) Главные миноры неоположительны.
- (в) Главные миноры четного порядка неотрицательны, а нечетного порядка – неподожительны.

48. В методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε на отрезке $[a, b]$, определяется формулой :

- (а)

$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

- (б)

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- (в)

$$n \geqslant \ln \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

49. Как выбираются пробные точки x_1, x_2 в методе деления интервала пополам?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

60. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется отрицательно полуопределенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax<0$.

(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leqslant 0$.

(в) Если для любого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax \leqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T Ax = 0$.

61. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2$.

(а) $H > 0$.
(б) $H < 0$.
(в) $H \geqslant 0$

62. Для функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$ вычислить антиградиент в точке $\mathbf{x}^* = (0, 1)^T$.

(а) $\nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. (б) $\nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (в) $\nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

63. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции $f(x)$ квадратичная.

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$

$$\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \quad s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\beta_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$

$$\alpha_k = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)},$$

$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\beta_k = -\frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$\alpha_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)},$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

64. Сформулируйте задачу безусловной оптимизации. Из всех прямоугольников, имеющих периметр равный P, найдите тот, площадь которого наибольшая.

(а)

$$f(a_*) = \max_a f(a), \quad f(a) = \frac{aP}{2} - a^2, \quad P = 2(a+b).$$

(б)

$$f(a_*) = \min_a f(a), \quad f(a) = a^2 - \frac{aP}{2}, \quad P = 2(a+b).$$

(в)

$$f(a_*) = \max_a f(a), \quad f(a) = a^2 - \frac{aP}{2}, \quad P = 2(a+b).$$

65. Чему равна длина интервала неопределенности при использовании метода золотого сечения, если реализовано 4 итераций, а длина исходного интервала равна 16?

(а) $(\sqrt{5} - 1)^4$.

(б) $\dfrac{16}{(1+\sqrt{5})^4}$.

(в) $16/(\sqrt{5} - 1)^4$.

66. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая и третья производные равны нулю, а четвертая производная отрицательна, то эта точка является точкой:

(а) максимума.
(б) минимума.
(в) перегиба.

66. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции двух переменных?

(а) не более чем за 2 шага.
(б) не более чем за 4 шагов.
(в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

67. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ и классифицировать ее.

$$\text{(а)} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H < 0.$$

$$\text{(б)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H > 0.$$

$$\text{(в)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H \lesseqgtr 0.$$

68. Найдите минимум функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ методом Ньютона, если начальная точка $\mathbf{x}_0 = (1, 2)^T$.

(а) $\mathbf{x}_* = (-1/2, 1/2)^T$.

(б) $\mathbf{x}_* = (1/2, -1/2)^T$.

(в) $\mathbf{x}_* = (1/2, 1/2)^T$.

69. Какие направления вектора S_k дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?

- (а) Если $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) < 0$.
- (б) Если $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) > 0$.
- (в) Если $(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0$.

70. Какая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, называется сильно выпуклой?

- (а) Если для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.
- (б) Если для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.
- (в) Если для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

71. Найдите экстремум функции $f(x) = x^9$.

- (а) Не имеет экстремума.
- (б) Имеет максимум в точке $x_* = 0$.
- (в) Имеет минимум в точке $x_* = 0$.

72. Чему равна длина интервала Δ_k, $k = 1, 2, \ldots.$ неопределенности после 4-х итераций ($k = 4$) методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 16?

- (а) $\Delta_4 = \sqrt{5} - 1$.
- (б) $\Delta_4 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
- (в) $\Delta_4 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

73. Как выбираются пробные точки в методе дихотомии?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a).$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

74. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$?

(а). Это $n \times n$ матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке $\mathbf{x}$.

(б) Это симметричная и положительно-определенная $n \times n$ матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке $\mathbf{x}$.

(в) Это симметричная $n \times n$ матрица частных производных второго порядка, вычисленных в точке $\mathbf{x}$.

75. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$.

(а) $H > 0$.

(б) $H < 0$.

(в) $H \geqslant 0$.

76. Запишите итерационный процесс метода Марквардта.

(а)

$$\begin{gathered} x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \\ s^k = -(H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k). \\ \text{Если} \quad f(x^k + s^k) < f(x^k), \text{то} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k/2, \\ \text{иначе} \quad \lambda_{k+1} = 2\lambda_k. \end{gathered}$$

(б)

$$\begin{gathered} x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \\ s^k = -(H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k). \\ \text{Если} \quad f(x^k + s^k) < f(x^k), \text{то} \quad \lambda_{k+1} = 2\lambda_k, \\ \text{иначе} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k/2. \end{gathered}$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = (H(x^k) + \lambda_k E)^{-1} \nabla f(x^k).$$
$$\text{Если} \quad f(x^k + s^k) < f(x^k), \text{то} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k / 2,$$
$$\text{иначе} \quad \lambda_{k+1} = 2\lambda_k.$$

77. При реализации метода внешних штрафов параметр s_k штрафа формируется как:

(а) убывающая последовательность чисел.
(б) возрастающая последовательность чисел.
(в) $s_k =$const.

10. Найти точку минимума функции $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ методом Ньютона из начальной точки $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$.

(а) $\mathbf{x}_* = (-1/8, 1/4)^T$.

(б) $\mathbf{x}_* = (1/8, 1/4)^T$.

(в) $\mathbf{x}_* = (1/4, 1/8)^T$.

78. Какая квадратичная форма $x^T A x$ (матрица Гессе A) называется отрицательно полуопределенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax< 0$.
(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leqslant 0$.
(в) Если для любого вектора x выполняется неравенство $x^T A x \leqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T A x = 0$.

79. Когда говорят, что в итерационном процессе $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $x, s \in \mathbb{R}^n$ производится исчерпывающий спуск?

(а) Если величина шага α_k находится из решения задачи одномерной минимизации

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha} \Phi_k(\alpha), \quad \Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha s^k).$$

(б). Если величина шага α_k находится из условия

$$f(x^{k+1}) < f(x^k).$$

(в) Если величина шага α_k выбирается постоянной.

80. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

$$\text{(а)} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

81. Для функции $f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_1 x_2$ вычислить градиент в точке $x_* = (0, 1)^T$.

$$\text{(а)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

82. Дайте определение поверхности уровня функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(а) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция $f(x)$ и градиент $\nabla f(x)$ принимают постоянные значения.

(б) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \text{const}$.

(в) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \text{const}$, а матрица Гессе является положительно-определенной.

83. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?

- (а)
$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D}(-f(x)).$$
- (б)
$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} \frac{1}{f(x)}.$$
.
- (в)
$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D}(-f^2(x)).$$
.

84. Какая функция называется строго выпуклой?

- (а) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.
- (б) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.
- (в) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

85. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ вычислите градиент в точке $x_* = (1, 1)^T$.

- (а) $\nabla f(x_*) = (1, 1)^T$.

- (б) $\nabla f(x_*) = (0,1)^T$.
- (в) $\nabla f(x_*) = (0,1)^T$.

86. Число итераций n, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a,b]$, в методе деления интервала пополам оценивается:

- (а) формулой
$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
.
- (б) условием
$$\frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \leqslant \varepsilon$$
.
- (в) условием
$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon$$
.

87. Пробные точки в методе золотого сечения определяются как

(а)
$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$
(б)
$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$
(в)
$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

88. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$.

(а) $H > 0$.
(б) $H < 0$.
(в) $H \geqslant 0$.

89. Производная функции в точке x^k вдоль направления s^k определяется как

(а) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = \dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{||\nabla f(x^k)||}$.
(б) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(||\nabla f(x^k)||)^2}$.
(в) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{||\nabla f(x^k)||}$.

90. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации функции?

(а) Задачей безусловной оптимизации.
(б) Задачей поиска условного оптимума.
(в) Задачей поиска экстремума.

93. Как записывается итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона для минимизации функции многих переменных?

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = -H(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = H(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = -H(x^k) \nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

94. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ на множестве $\mathbb{R}^2$.

(а) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ имеет максимум.
(б) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ не имеет экстремума.
(в) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ имеет минимум.

95. Для функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$ вычислить антиградиент в точке $\mathbf{x}^* = (0, 1)^T$.

$$\text{(а)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

96. Проверить, является ли точка $x_* = (1, 1)^T$ точкой безусловного минимума функции $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

(а) В точке $x_* = (1, 1)$ функция $f(x)$ имеет безусловный максимум.
(б) В точке $x_* = (1, 1)$ функция $f(x)$ имеет безусловный минимум.
(в) Точка $x_* = (1, 1)$ не является точкой локального минимума или локального максимума.

97. Какая точка называется точкой глобального минимума?

(а) Если

$$f(x_*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

(б) Если существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $x \in D$ и $||x^* - \mathbf{x}|| < \varepsilon$, то $f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x})$.
(в) Утверждения (а) и (б) неверны.

98. Если в стационарной точке x_* функции одной переменной $f(x)$ вторая производная отрицательна, то:
(а) x_* – точка максимума.
(б) x_* – точка минимума.
(в) в точке x_* функция имеет разрыв.

100. Какая ставится задача поиска безусловного экстремума?

$$\text{(а)} \quad x_* = \min_{x \in D} f(x) \quad \left(x_* = \max_{x \in D} f(x) \right), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\text{(б)} \quad x_* = \min_{x \in D} f(x), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\text{(в)} \quad x_* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \left(x_* = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right).$$

101. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^3x_2$ вычислите градиент в точке $x_* = (1, 0)^T$.

- (а) $\nabla f(x_*) = (1, 5)^T$.
- (б) $\nabla f(x_*) = (5, 1)^T$.
- (в) $\nabla f(x_*) = (1, 1)^T$.

102. Число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой

- (а)

$$n \geqslant \log_2 \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

- (б)

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- (в)

$$n \geqslant \ln \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

103. Какая точка называется стационарной?

- (а) Точка x_*, удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x_*) = 0.$$

- (б) Точка x_*, удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x_*) < 0.$$

- (в) Точка x_*, удовлетворяющая условию

$$\nabla f(x) > 0.$$

104. Выпишите матрицу A квадратичной функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 - x_2$$

.

$$\text{(а)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{(б)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{(в)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

105. Дана задача: $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2 \to$, $g_1(x) = x_1 - 1 > 0$. Запишите для этой задачи штрафную функцию, используя логарифмический штраф.

- (а) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1 + 1]$.
- (б) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[x_1 - 1]$.
- (в) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1]$.

6. Проверьте знакоопределенность квадратичной формы $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$.

- (а) Положительно определенная.
- (б) Отрицательно определенная.
- (в) Отрицательно полуопредленная.

106. Найдите экстремум функции $f(x) = x^3 - 27x + 5$

- (а) $x_* = -3$ – локальный максимум, $x_* = 3$ – локальный минимум.
- (б) $x_* = 3$ – локальный максимум, $x_* = -3$ – локальный минимум.
- (в) $x_* = -3$ – точка перегиба, $x_* = 3$ – локальный минимум.

107. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции $f(x)$?)

- (а) Не зависит, главное чтобы $f(x)$ была унимодальной.
- (б) Зависит от величины производной в окрестности точки минимума.
- (в) Не зависит, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

108. Как выбираются пробные точки x_1, x_2 в методе дихотомии?

(а)

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$

(б)

$$x_1 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a).$$

(в)

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

109. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции $f(x)$ квадратичная.

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$\alpha_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}, \quad s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$\alpha_k = \frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)},$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = -\frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., s^0 = -\nabla f(x^0),$$
$$\alpha_k = \frac{(A\nabla f(x^{k+1}), s^k)}{(As^k, s^k)},$$
$$s^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$\beta_k = -\frac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(As^k, s^k)}.$$

11. Сформулируйте задачу безусловной оптимизации. Требуется изготовить бак цилиндрической формы заданного объема V. Каковы должны быть его размеры (радиус основания R и высота цилиндра H), чтобы площадь поверхности была наименьшей?

(а)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

(б)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

(в)

$$f(R_*) = \min_R f(R), \quad f(R) = 2\pi R^2 + \frac{V}{R}, \quad H = \frac{V}{2\pi R^2}.$$

110. Какая точка называется точкой локального минимума?

(а) $x_* \in D$ — точка локального минимума функции, $f(x)$, если

$$f(x_*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

(б) $x_* \in D$ — точка локального (относительного) минимума минимума функции, $f(x)$, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $x \in D$ и $||x^* - \mathbf{x}|| < \varepsilon$, то $f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x})$.
(в) Утверждения (а) и (б) неверны.

111. Найдите минимум функции $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ методом Ньютона, если $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$.

(а) $\mathbf{x}_* = (1/2, 1)^T$.

(б) $\mathbf{x}_* = (1/2, 1/4)^T$.

(в) $\mathbf{x}_* = (-1/2, 1)^T$.

112. При построении штрафных функций последовательность чисел s_k формируется как:

(а) возрастающая.
б) убывающая.
(в) убывающая, члены которой образуют сходящийся числовой ряд.

113. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции n переменных?

(а) не более чем за n шагов.
(б) не более чем за $2n$ шагов.
(в) итерационный процесс не оканчивается за конечное число шагов.

114. Найдите экстремум функции $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

- (а) Не имеет экстремума.
- (б) Имеет минимум в точке $x_* = 0$.
- (в) Имеет максимум в точке $x_* = 0$..

115. Сформулируйте достаточные условия локального максимума функции многих переменных.

- (а) Если $\nabla f(x_*) = 0$, то x_* – точка локального максимума.
- (б) Если $\nabla f(x_*) = 0$ и матрица Гессе $H(x_*) > 0$, то x_* – точка локального максимума.
- (в) Если $\nabla f(x_*) = 0$ и матрица Гессе $H(x_*) < 0$, то x_* – точка локального максимума.

116. Сформулируйте критерий Сильвестра проверки достаточных условий безусловного максимума.

- (а) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе были строго положительны.
- (б) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе чередовались, начиная с отрицательного.
- (в) Необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров определителя матрицы Гессе были строго отрицательны.

118. Как находится отношение Φ для выбора пробных точек методом золотого сечения?.

- (а) Из решения уравнения $1 - \Phi + 1/\Phi = 0$, $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
- (б) Из решения уравнения $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, $\Phi = \pm\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
- (в) Из решения уравнения $\Phi^2 + \Phi - 1 = 0$, $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

119. Как выбираются параметры α_k для минимизации скалярной функции $f(x)$ методом Ньютона-Рафсона?

- (а) Из решения задачи минимизации $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha\dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \to \min$.

- (б) Из решения задачи $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha\dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}\right) \to \max.$
- (в) Из решения задачи $\varphi_k(\alpha) = f\left(x_k - \alpha\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) \to \min.$

120. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции $f(x)$?

- (а) Не зависит, главное чтобы была унимодальной.
- (б) Зависит от величины производной в окрестности точки минимума.
- (в) Не зависит, если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

121. Дана задача: $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to$, $g_1(x) = x_1 - 1 > 0$. Запишите для этой задачи штрафную функцию, используя логарифмический штраф.

- (а) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1 + 1]$.
- (б) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[x_1 - 1]$.
- (в) $\psi(x, s_k) = -s_k \ln[-x_1]$.

122. Проверьте знакоопределенность квадратичной формы $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$.

- (а) Положительно определенная.
- (б) Отрицательно определенная.
- (в) Отрицательно полуопредленная.

123. Вычислите градиент функции $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 + x_1x_2 + x_1^2x_2$ в точке $x_* = (1, 1)^T$.

- (а)

$$\nabla f(x_*) = (11, 5)^T.$$

- (б)

$$\nabla f(x_*) = (10, 6)^T.$$

- (в)

$$\nabla f(x_*) = (11, 6)^T.$$

124. Какая задача называется задачей на условный экстремум с ограничениями типа равенств?

- (а)

$$f(x_*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

- (б)

$$f(x_*) = \min_{x \in D} f(x), \quad D = \{x : g_i(x) = 0, i = 1, 2, ..., m, m < n\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

- (в)

$$f(x_*) = \min_{x \in D} f(x), \quad D \leqslant \{x : g_i(x) = 0, i = 1, 2, ..., m, m < n\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

.

125. Точность определения точки минимума методом золотого сечения на отрезке $[a, b]$ после k итераций определяется равенством:

- (а) $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a)$.
- (б) $\varepsilon_k = (b-a)/2^{k+1}$.
- (в) $\varepsilon_k = (b-a-\delta)/2^{k+1} = \delta/2$.

126. Найдите уравнение для линии уровня функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, проходящей через точку $x_* = (1, 1)$.

- (а) $x_1^2 + x_2^2 = 1$..
- (б) $x_1^2 + x_2^2 = 2$.
- (в) $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$.

127. Что регулярный симплекс?

- (а) Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ с n вершинами, которые равноудалены друг от друга.

- (б) Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ с $n+1$ вершинами, которые равноудалены друг от друга.
- (в) Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{n-1}$ с n вершинами, которые равноудалены друг от друга.

128. Можно ли применить метод золотого сечения для определения точки локального максимума?

- (а) Можно.
- (б) Можно, но надо изменить знак перед функцией на противоположный.
- (в) Нельзя.

15. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона для минимизации скалярной функции $f(x)$. Можно ли использовать метод Ньютона нахождения точки локального максимума?

- (а) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$. Нельзя.
- (б) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$. Можно.
- (в) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_0)}$. Для нахождения точки локального максимума надо поменять знак перед функцией на противоположный: $-f(x)$.

Шкала оценивания результатов тестирования: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения- 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи.

Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по 5-балльной шкале или дихотомической шкале шкале следующим образом:
Соответствие 100 бальной и 5-балльной шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по 5-балльной шкале
100-85	отлично
84-70	хорошо
69-50	удовлетворительно
49 и менее	неудовлетворительно

2.3 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Компетентностно-ориентированная задача №1.

Решите задачу минимизации $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ методом сопряженных градиентов. Начальное приближение выберите произвольно.

Компетентностно-ориентированная задача №2.

Выполните одну итерацию методом наискорейшего градиентого спуска для $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Начальное приближение выберите произвольно.

Компетентностно-ориентированная задача №3.

Ящик имеет форму правильной четырехугольной призмы заданного объема V. Каковы размеры ящика $(a,\ H)$, если известно, что он имеет наименьшую полную поверхность?

Компетентностно-ориентированная задача №4.

Найдите условный минимум $f(x) = x^2 - 4x \to \min,\ x - 1 \leqslant 0$.

Компетентностно-ориентированная задача №5.

Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершенного с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны $V = 40\pi/3$ м^3. Найдите радиус R цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

Указание: Объем шара $V = 4\pi R^3/3$, площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

Компетентностно-ориентированная задача №6.

Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 6\sqrt{3}$ м^2. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания a и высота H), чтобы объем палатки был наибольший?

Компетентностно-ориентированная задача №7.

Требуется изготовить коническую воронку с образующей 36 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

Компетентностно-ориентированная задача №9.

Требуется изготовить открытую банку цилиндрической формы объемом 1 м^3. При каком радиусе основания расход листового материала на ее изготовление будет наименьшим?

Компетентностно-ориентированная задача №10.

Функция $f(\boldsymbol{x}) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$ имеет три стационарные точки $\boldsymbol{x}_{1*} = (0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_{2*} = (1,1)^T$ и $\boldsymbol{x}_{3*} = (-1,-1)^T$. Определить, какая из них является точкой локального минимума. Для проверки достаточных условий экстремума используйте собственные значения матрицы Гессе.

Компетентностно-ориентированная задача №11.

Из прямоугольного жестяного листа со сторонами a и b делают ящик, вырезая равные квадраты по углам. Какова должна быть сторона у вырезанных квадратов, чтобы ящик имел максимальный объем?

Компетентностно-ориентированная задача №12.

Методом штрафов решите задачу

$$f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 = -6.$$

Компетентностно-ориентированная задача №13.

Найдите минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 2$ методом Ньютона, если начальная точка $(1, 2)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №14.

Найдите минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 20x_2 + 1$ методом сопряженных градиентов, если начальная точка $(1, 1)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №15.

Оцените сходимость метода наискорейщего градиентного спуска сопряженных при минимизации функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$, если начальная точка $(0, 0)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №16.

Найдите значение a, при котором достигает максимума функция

$$f(a) = \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2},$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 4a - 2 = 0$.

Компетентностно-ориентированная задача №17.

В заданный треугольник ABC с высотой H и основанием b вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

Указание к задаче: Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется $(H - h)/H = a/b$, где a и h –основание и высота параллелограмма.

Компетентностно-ориентированная задача №18.

Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (-1,-1)^T$ точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

Компетентностно-ориентированная задача №19.

Найти безусловный экстремум функции $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$.

Компетентностно-ориентированная задача №20.

Выведите итерационную формулу Ньютона (требующую только операции умножения и сложения) для вычисления $x = 1/a$, где a — заданное действительное число.

Компетентностно-ориентированная задача №21.

Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Компетентностно-ориентированная задача №22.

Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой

$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

Компетентностно-ориентированная задача №23.

Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной a. Объем призмы фиксирован и равен 10 мм^3.

Компетентностно-ориентированная задача №24.

Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (2, 0, 1)^T$ и $\boldsymbol{x}_* = (0, 0, 0)^T$ точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

Компетентностно-ориентированная задача №25.

В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую таким цилиндром.

Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи (нижеследующие критерии оценки являются примерными и могут корректироваться): 6-5 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени. 4-3 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа). 2-1 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время. 0 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и голословные рассуждения, и (или) задача не решена.