Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Чернецкая Ирина Евгеньевна
Должность: Заведующий кафедрой
Дата подписания: 24.10.2022 02:41:47
Уникальный программный ключ:
bdf214c64d8a381b0782ea566b0dce05e3f5ea2d

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
__________ И.Е. Чернецкая
«30» 06 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«Методы оптимизации»

09.04.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

1.1 Методологические основы оптимизации. Условия экстремума гладких функций

Вопросы и задачи для устного опроса

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?

- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.

Задачи для устного опроса

1. Найдите значение a, при котором достигает максимума функция $f(a) = \exp(-(x_1^2 + x_2^2)/2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + ax + 3a - 1 = 0$.

2. Требуется спроектировать емкость в виде прямого кругового цилиндра фиксированного объема V, имеющего наименьшую длину швов.

(а) Постройте графики целевой функции и функции ограничения.

(б) Проиллюстрируйте решение задачи графически.

3. Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной a. Объем призмы фиксирован и равен 1 см^3.

Указание к задаче: Объем призмы $V = SH$, где S– площадь основания, H – высота.

4. Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 6\sqrt{3}$ м^2. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания a и высота H), чтобы объем палатки был наибольший? Проиллюстрируйте решение задачи графически.

5. Требуется изготовить полотняный шатер, имеющий форму кругового конуса заданной вместимости $V = 9\pi/2$ м^3. Каковы должны быть размеры конуса (высота H и радиус основания R), чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

Указание: Площадь кругового сектора $S = \dfrac{Lr}{2}$, L – длина дуги, r — радиус сектора.

6. Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершенного с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны $V = 40\pi/3$ м^3. Найдите радиус R цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

Указание: Объем шара $V = 4\pi R^3/3$, площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

6. Требуется изготовить коническую воронку с образующей L, равной 20 м. Какова должна быть высота воронки H, чтобы ее объем был наибольшим?

7. Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), имеющей наименьшую длину швов. Основанием призмы является равносторонний треугольник с стороной a. Объем призмы фиксирован и равен 1 см^3.

Указание к задаче: Объем призмы $V = SH$, где S– площадь основания $S = \dfrac{a^2\sqrt{4}}{4}$, H – высота.

8. Из куска проволоки, длиной L требуется согнуть прямоугольник так, чтобы его площадь была наибольшей.

9. (задача Евклида). В заданный треугольник ABC с высотой H и основанием b вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

Указание к задаче: Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется $(H - h)/H = a/b$, где a и h –основание и высота параллелограмма.

10. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса

R и имеющего наибольшую пложадь S.

Указание к задаче: Условие, что прямоугольник вписан в окружность радиуса R, определяется $a^2 + b^2 = 4R^2$, где a и b – стороны прямоугольна.

11. В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежпт в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую цилиндром.

Указание к задаче: Условие, что прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр, определяется равенством $r/R = (H - h)/H$, где r, h – радиус основания и высота цилиндра; H, R – высота и радиус основания конуса.

Общие указания:

(а) ***Пирамида называется правильной****, если основание ее — правильный многоугольник и высота падает в центр основания. В правильной пирамиде все боковые ребра равны, а все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани называется* ***апофемой*** *правильной пирамиды.*

(б) ***Формула площади боковой поверхности*** *правильной пирамиды:*

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot L,$$

P — периметр основания; L — апофема (перпендикуляр, опущенный из вершины на ребро основания).

(в) ***Апофема*** *правильной пирамиды $L = \sqrt{H^2 + r^2}$, где H – высота пирамиды, r – радиус вписанной окружности в правильный многоугольник (основание правильной пирамиды).*

(г) ***Объем*** *V всякой пирамиды равен*

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где S — площадь основания, H — высота пирамиды.

12. Заданы следующие функции одной переменной:

(а) $f(x) = x^5 + x^4 - \dfrac{x^3}{3} + 2$;

(б) $f(x) = (2x+1)^2(x-4)$;

(в) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 10$;

(г) $f(x) = x^3 - 12x + 3, \quad -4 \le x \le 4$.

(д) $f(x) = x^5/5 - x^3/3 + 2$;
(е) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Для каждой из заданных функций найдите и классифицируйте стационарные точки (установите, оказывается ли стационарная точка точкой минимума, максимума или перегиба).

1.2 Численные методы одномерной минимизации

Вопросы для устного опроса

- 1. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая унимодальная функция на отрезке $[a, b]$. Оцените точность $\varepsilon(M)$ при определении минимума $f(x)$ методом равномерного поиска в результате вычисления M значений $f(x)$.
- 2. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 3. Покажите, что погрешность определения точки минимума функции $f(x)$ методом равномерного не превосходит величины $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.
- 4. Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой
$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$
- 5. Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой
$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
- 6. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют метод квадратичной интерполяции в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 7. Что такое золотое сечений отрезка? Чему равна величина Φ? Перечислите свойства золотого сечения отрезка, на которых базируется правило вычисления пробных точек в алгоритме минимизации.
- 8. Является ли условие $f'(x_*) = 0$ достаточным, для того чтобы число x_* было точкой минимума унимодальной, но невыпуклой функции $f(x)$?
- 9. Получите итерационную формулу метода Ньютона.
- 10. Получите итерационную формулу метода хорд.

- 11. Объясните работу алгоритма метода бисекции. Выполните одну итерацию.
- 12. Объясните работу алгоритма метода ломаных.
- 13. Известно, что увеличение константы Липшица L приводит к замедлению сходимости метода ломаных. Объясните почему с помощью геометрической иллюстрации.
- 15. Укажите класс функций, для которых точное определение точки минимума гарантировано в результате всего одной итерации метода Ньютона.

Задачи для устного опроса

1. Напишите программу вычисления машинного эпсилона masheps. Введите счетчик, который позволит узнать в конце программы, какой степенью двойки является masheps.

Указание. *Алгоритм может выглядеть следующим образом:*

$$masheps := 1$$
$$while \quad 1 + masheps > 1 \quad do$$
$$masheps := \frac{masheps}{2}$$

2. Методами *деления интервала пополам*, *золотого сечения*, *дихотомии*, *ломаных* решите задачу одномерной минимизации:

(1) $f(x) = x^3 - \sin x$, $L_0 = [0; 1]$;
(2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1$, $L_0 = [-1; 0]$;
(3) $f(x) = x \sin(1/x)$, $L_0 = [0.2; 1.0]$;
(4) $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $L_0 = [-6; -4]$.
(5) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, $L_0 = [1; 2]$;
(6) $f(x) = 10x \ln x - \dfrac{x^2}{2}$, $L_0 = [0.1; 1.0]$;
(7) $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^3}{3} + 2x$, $L_0 = [-2.5; -1.0]$;
(8) $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x$, $L_0 = [-0.5; 1.0]$.
(9) $f(x) = (x-1)^2 \sin x$, $L_0 = [-2.0; 3.0]$;
(10) $f(x) = x^4 + \mathrm{e}^x$, $L_0 = [0.0; 1.0]$.

Для каждого реализованного метода оценить число итераций, необходимое для определения точки минимума x_* с заданной точностью. ε ($\varepsilon \approx$

$\sqrt{masheps}$). Провести сравнение методов. Алгоритм метода ломаных проиллюстрировать графически.

Указания.

1. *В методе деления интервала пополам пробные точки* x_1, x_2 *вычисляются*

$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4,$$

где $L = b - a = |a - b|$ *— длина текущего интервала неопределенности.*

2. *В методе дихотомии* x_1, x_2 *вычисляются*

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2},$$
$$0 < \delta < 2\varepsilon.$$

3. *В методе золотого сечения* x_1, x_2 *вычисляются*

$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

Алгоритм метода ломаных

Шаг 1. Задать $[a, b]$, L, ε.

Шаг 2. Вычислить

$$x_0 = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a+b)], \quad y_0 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a-b)],$$
$$\varphi_{min} \leftarrow y_0.$$

Шаг 3.

$$\Delta = \frac{1}{2L}[f(x_0) - \varphi_{min}]$$

Шаг 4. Если $2L\Delta < \varepsilon$, то $x_{min} \leftarrow x_0$ и закончить поиск. Иначе, перейти к шагу 5.

Шаг 5.

$$x_1^L = x_0 - \Delta, \quad x_1^R = x_0 + \Delta, \quad \varphi \leftarrow \frac{1}{2}[f(x_0) + \varphi_{min}),$$

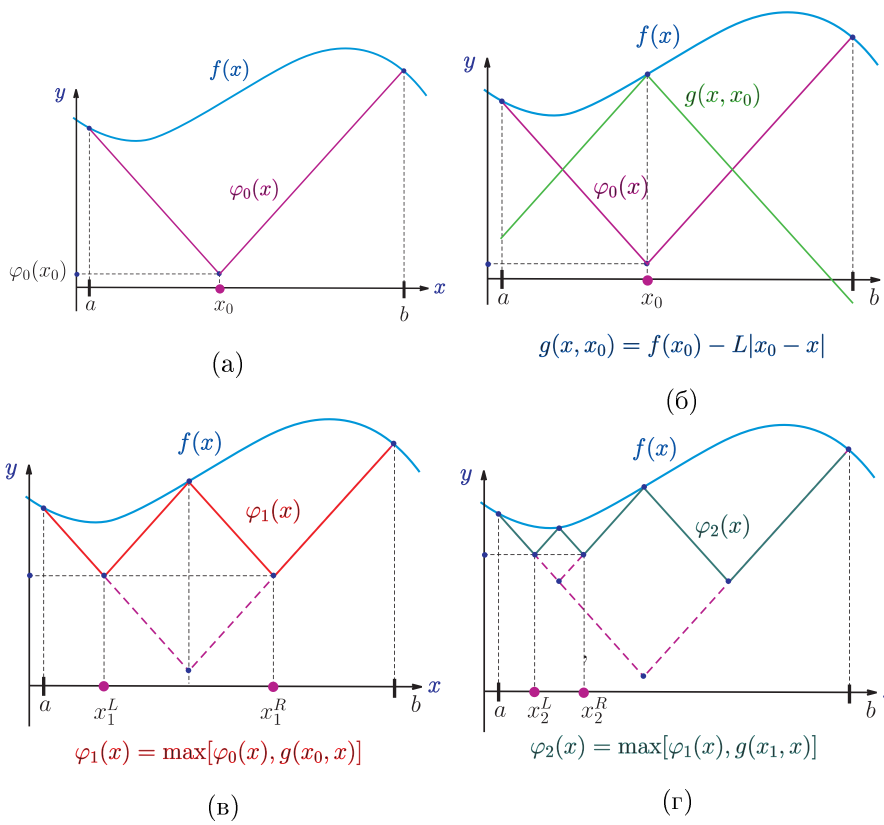


Рис. 1: Иллюстрация алгоритма метода ломанных

Шаг 6.

Если $f(x_1^L) < f(x_1^R)$, то $x_0 \leftarrow x_1^L$. Иначе $x_0 \leftarrow x_1^R$.

$\varphi_{min} \leftarrow \varphi$.

Перейти к **шагу 3.**

1.3 Раздел (тема) дисциплины: Численные методы безусловной минимизации функции многих переменных

Вопросы для устного опроса

- 1. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 2. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 3. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 4. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 5. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 6. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?
- 7. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 8. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 9. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 10. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 11. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 12. Опишите стратегию численного поиска безусловного экстремума.
- 13. Дайте определение квадратичной функции.
- 14. Чему равны градиент и матрица Гессе квадратичной функции?
- 15. Выпишите матрицу Гессе A и градиент квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2 + x_3$.
- 16. Дайте определение производной по направлению.
- 17. Какие направления дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?

- 18. Когда говорят, что в итерационном процессе

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

производится исчерпывающий спуск?

- 19. Покажите, что если в итерационном процессе

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

выбор шага производится исчерпывающим спуском,

$$(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0.$$

- 20. В чем состоит идея метода наискорейшего градиентного спуска?
- 21. Сформулируйте идею метода сопряженных градиентов.
- 22. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 23. Сформулируйте общий принцип построения методов первого и второго порядков.
- 24. Сформулируйте стратегию построения алгоритма симплексного метода.
- 25. Опишите алгоритм отражения вершины в симплексном методе.
- 26. Зачем необходим и в чем заключается алгоритм редукции в симплексном методе.
- 27. Сформулируйте особенности минимизации методом Нельдера-Мида.
- 28. В чем состоит стратегия метода Хука-Дживса?
- 29 В чем состоит метод покоординатного поиска?
- 30 Какие алгоритмы случайного поиска вы знаете. В чем состоит стратегия методов случайного поиска?

Задачи для устного опроса

1. Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции (выполните 2 итерации)

$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$, при начальном приближении $x_0 = (0, 0)^T$;

2. Решите задачу 1 численно

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где

$$\alpha_k = \frac{(\Gamma_k, \Gamma_k)}{(A\Gamma_k, \Gamma_k)}, \quad \Gamma_k = Ax_k - b.$$

Алгоритм
$\varepsilon \leftarrow 10^{-12}$;
$x \leftarrow x_0$;
REPEAT
$x_0 \leftarrow x$;
$\Gamma_0 \leftarrow Ax_0 - b$;
$\alpha_0 = \dfrac{(\Gamma_0, \Gamma_0)}{(A\Gamma_0, \Gamma_0)}$;
$x \leftarrow x_0 - \alpha_0(Ax_0 - b)$;
UNTIL $||\Gamma_0|| < \varepsilon$;

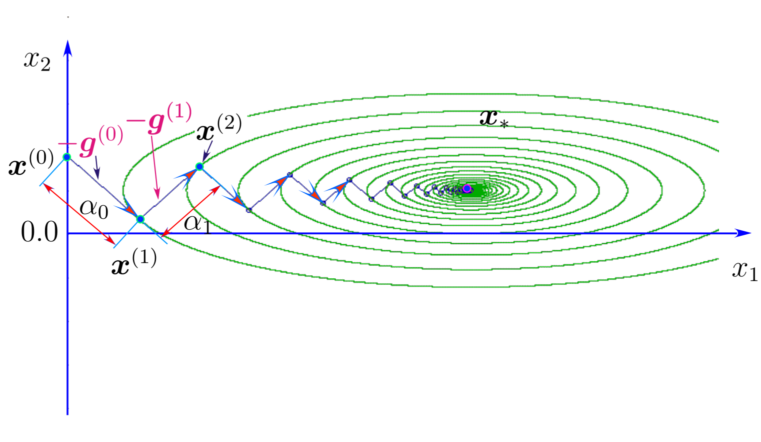


Рис. 2:

2. Применить метод наискорейшего градиентного спуска для минимизации скалярной квадратичной функции

$f(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx + c$, где $a > 0, b, c$ – произвольные константы.

3.Сформулируйте теоретическое обоснование сходимости градиентного метода с постоянным шагом $\alpha_k = \alpha$ для функции $f(x)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

Т.е. найдите такие α, для которых последовательность $x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...,$ определяемая формулой (1), сходится к точке минимума функции $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$.

4. Проверьте полученное условие сходимости численно для заданных значений a, b, (c): $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$. Оцените скорость сходимости в зависимости от величины α.

5. Решить задачу минимизации функции

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \mathbf{b}^T\boldsymbol{x}$$

методом наискорейшнго градиентного спуска. Построить линии уровня с указанием траектории движения. Варианты:

$$A = \begin{bmatrix} N & -N \\ -N & M+1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3N-1 \\ 5N+3 \end{bmatrix}.$$

Параметр N равен номеру студента в списке группы.

6. Решить численно задачу минимизации квадратичной функции методом сопряженных градиентов. Построить график функции и линии уровня.

Алгоритм метода сопряженных градиентов для минимизации квадратичной функции

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\alpha_k = -\frac{(\Gamma_k, S_k)}{(AS_k, S_k)}, \quad \Gamma_k = Ax_k - b,$$

На первой итерации $S_0 = -\Gamma_0$. Начиная со второй итерации, направление поиска S_k, $k = 1, 2, ...$ находится по формуле:

$$S_k = -\Gamma_k + \beta_{k-1}S_{k-1}, \quad S_0 = -\Gamma_0, \quad k = 1, 2, ...,$$

где

$$\beta_{k-1} = \frac{(AS_{k-1}, \Gamma_k)}{(AS_{k-1}, S_{k-1})}.$$

Псевдокод алгоритма

Задать x_0, ε;
1. $x \leftarrow x_0$; $\Gamma_0 \leftarrow Ax_0 - b$;
$S \leftarrow -\Gamma_0$; $k \leftarrow 0$;
REPEAT
2. $x_0 \leftarrow x$;
3. $\Gamma_0 \leftarrow Ax_0 - b$;
4. $S_0 \leftarrow S$;
5. Выбрать направление S поиска:

If $k = 0$ Then

$$S \leftarrow S_0$$

Else Begin

$$\beta \leftarrow \frac{(AS_0, \Gamma_0)}{(AS_0, S_0)};$$

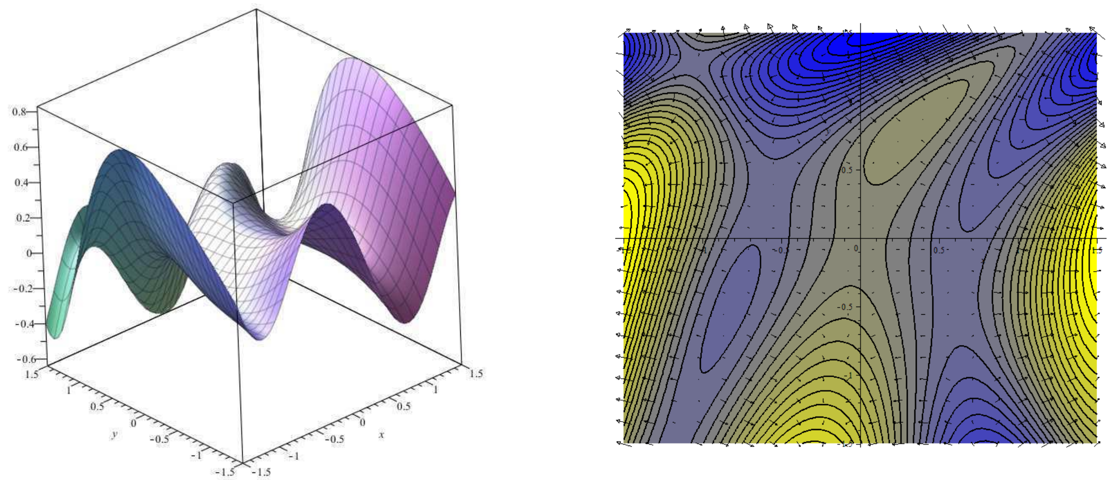
$$S \leftarrow -\Gamma_0 + \beta S_0$$

End;

6. Рассчитать шаг α:
$$\alpha \leftarrow \frac{(\Gamma_0, \Gamma_0)}{(A\Gamma_0, \Gamma_0)};$$
7. Рассчитать x:
$$x \leftarrow x_0 + \alpha S;$$
8. $k \leftarrow k + 1$;
UNTIL $||\Gamma_0|| < \varepsilon$;

7. Варианты заданий

1. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$;
2. $f(x_1, x_2) = 64x_1^2 + 64x_1x_2 + 126x_2^2 - 10x_1 + 30x_2 + 13$;
3. $f(x_1, x_2) = 129x_1^2 - 256x_1x_2 + 129x_2^2 - 51x_1 - 149x_2 - 27$;
4. $f(x_1, x_2) = 254x_1^2 + 506x_1x_2 + 254x_2^2 + 50x_1 + 130x_2 - 111$;
5. $f(x_1, x_2) = 151x_1^2 - 300x_1x_2 + 151x_2^2 + 33x_1 + 99x_2 + 48$;
6. $f(x_1, x_2) = 85x_1^2 + 168x_1x_2 + 85x_2^2 + 29x_1 - 51x_2 + 83$;
7. $f(x_1, x_2) = 211x_1^2 - 420x_1x_2 + 211xx_2^2 - 192x_1 + 52x_2 - 25$;
8. $f(x_1, x_2) = 194x_1^2 + 376x_1x_2 + 19x_2^2 + 31x_1 - 229x_2 + 4$;
9. $f(x_1, x_2) = 45x_1^2 - 88x_1x_2 + 45x_2^2 + 102x_1 + 268x_2 - 21$;
10. $f(x_1, x_2) = 99x_1^2 + 196x_1x_2 + 99x_2^2 - 95x_1 - 9x_2 + 9$;



(б)

(а)

Рис. 3: Пример:(а) – график функции $f(x_1, x_2) = \sin(0.5x_1^2 - 0.25x_2^2 + 3)\cos(2x_1 + 1 - e^{x_2})$ (б) – линии уровня и поле градиентов

Методы второго порядка: Метод Ньютона-Рафсона

1. Решить численно задачу минимизации квадратичной функции методом Ньютона-Рафсона: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$, $x_0 = (0, 0)^T$.

Алгоритм Ньютона-Рафсона

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H(x_k)^{-1}\nabla f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где α_k рассчитывается численно путем решения задачи одномерной минимизации

$$\varphi_k(\alpha_k) = \min \varphi_k(\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \varphi_k(\alpha) = f(x_k - \alpha H(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)).$$

УКАЗАНИЕ:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

1.4 Раздел (тема) дисциплины: Численные методы условной оптимизации

Вопросы и задачи для устного опроса

- 1.Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 2. Какая функция называется штрафной? Приведите примеры.
- 3. Объясните алгоритм поиска условного экстремума методом штрафных функций.
- 4. Какая функция называется барьерной? Приведите примеры.
- 5. Объясните алгоритм поиска условного экстремума методом барьерных функций.
- 6. Методом барьерных функций найти условный минимум (использовать логарифмическую штрафную функцию) $f(x) = x^2 - 8x$, $x - 1 \leqslant 0$.
- 7. Методом штрафных функций найти условный максимум $f(x) = x$, $2 - x \leqslant 0$
- 8. Методом штрафных функций найти условный максимум

  $f(x) = 2x_2 - 8x$, $x - 1 \leqslant 0$.
- 9. Постройте вспомогательную функцию для решения задачи минимизации функции методом штрафов:

  $f(x) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5$, $2x_1 - x_2 = 6$.
- 10. Постройте вспомогательную функцию для решения задачи минимизации функции методом штрафов: $f(x) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2$, $2x_1 - x_2 \leqslant 2, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$.

2 КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 Вопросы к экзамену

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?

- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?
- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?
- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.

- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?
- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условие минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.
- 34. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая унимодальная функция на отрезке $[a, b]$. Оцените точность $\varepsilon(M)$ при определении минимума $f(x)$ методом равномерного поиска в результате вычисления M значений $f(x)$.
- 35. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 36. Покажите, что погрешность определения точки минимума функции $f(x)$ методом равномерного не превосходит величины $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.
- 37. Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой
$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

- 38. Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- 39. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют метод квадратичной интерполяции в результате M вычислений, от конкретной функции?

- 40. Что такое золотое сечений отрезка? Чему равна величина Ф? Перечислите свойства золотого сечения отрезка, на которых базируется правило вычисления пробных точек в алгоритме минимизации.

- 41. Является ли условие $f'(x_*) = 0$ достаточным, для того чтобы число x_* было точкой минимума унимодальной, но невыпуклой функции $f(x)$?

- 42. Получите итерационную формулу метода Ньютона.

- 43. Получите итерационную формулу метода хорд.

- 44. Объясните работу алгоритма метода бисекции. Выполните одну итерацию.

- 45. Объясните работу алгоритма метода ломаных.

- 46. Известно, что увеличение константы Липшица L приводит к замедлению сходимости метода ломаных. Объясните почему с помощью геометрической иллюстрации.

- 47. Укажите класс функций, для которых точное определение точки минимума гарантировано в результате всего одной итерации метода Ньютона.

- 48. Дайте определение квадратичной функции.

- 49. Чему равны градиент и матрица Гессе квадратичной функции?

- 50. Выпишите матрицу Гессе A и градиент квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2 + x_3$.

- 51. Дайте определение производной по направлению.

- 52. Какие направления дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?
- 53. Когда говорят, что в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
производится исчерпывающий спуск?
- 54. Покажите, что если в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
выбор шага производится исчерпывающим спуском,
$$(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0.$$
- 55. В чем состоит идея метода наискорейшего градиентного спуска?
- 56. Сформулируйте идею метода сопряженных градиентов.
- 57. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 58. Сформулируйте общий принцип построения методов первого и второго порядков.
- 59. Сформулируйте стратегию построения алгоритма симплексного метода.
- 60. Опишите алгоритм отражения вершины в симплексном методе.
- 61. Зачем необходим и в чем заключается алгоритм редукции в симплексном методе.
- 62. Сформулируйте особенности минимизации методом Нельдера-Мида.
- 63. В чем состоит стратегия метода Хука-Дживса?
- 64. В чем состоит метод покоординатного поиска?
- 65 Какие алгоритмы случайного поиска вы знаете. В чем состоит стратегия методов случайного поиска?
- 66. Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 67. Какая функция называется штрафной? Приведите примеры.

- 68. Объясните алгоритм поиска условного экстремума методом штрафных функций.
- 69. Какая функция называется барьерной? Приведите примеры.
- 70. Объясните алгоритм поиска условного экстремума методом барьерных функций.