МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
ИИЧ И.Е. Чернецкая
«31» 08 2023 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

«Методы оптимизации»

09.04.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2023

1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

1.1 ВОПРОСЫ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

Раздел (тема) дисциплины: «Постановка задачи»

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 4. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 5. Дайте определение поверхности уровня?
- 6. Дайте определение градиента и антиградиента дифференцируемой функции?
- 7. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 8. Дайте определение угловых миноров симметричной матрицы?
- 9. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 10. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 11. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 12. Какие точки называются стационарными?
- 13. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 14. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 15. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 16. Сформулируйте достаточные условие минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.

Раздел (тема) дисциплины: «Методы одномерной оптимизации»

- 1. Из каких этапов состоит большинство методов одномерного поиска?
- 2. Сформулируйте правило исключения интервалов.
- 3. Какое назначение метода дихотомии?
- 4. Какие основные принципы метода дихотомии?
- 5. Опишите метод дихотомии.
- 6. Как оценивается эффективность метода дихотомии?
- 7. Какого порядка метод дихотомии?
- 8. В чем заключаются преимущества и недостатки метода дихотомии?
- 11. Какая задача привела к открытию золотого сечения?
- 12. Выведите уравнение золотого сечения.
- 13. Приведите численное представление золотого сечения.
- 14 Укажите алгебраические свойства золотого сечения.
- 15. Как начинается поиск минимума в методе золотого сечения?
- 16. Как оценивается эффективность метода золотого сечения?
- 17. Какого порядка метод золотого сечения?
- 18. Какое назначение метода ломаных?
- 19. Опишите метод ломаных.
- 20. Какое назначение метода квадратичной интерполяции с тремя точками?
- 21. Опишите метод квадратичной интерполяции с тремя точками.
- 22. Как начинается поиск минимума в методе квадратичной интерполяции с тремя точками?
- 23. Какого порядка метод квадратичной интерполяции с тремя точками?
- 24. Какие преимущества и недостатки метода квадратичной интерполяции с тремя точками?
- 25. Какое назначение метода секущих ?

- 26. Опишите метод секущих. Какого порядка метод секущих?
- 27. Какие преимущества и недостатки метода секущих?
- 28. Какое назначение метода Ньютона-Рафсона?
- 29. Выведите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 30. Опишите метод Ньютона-Рафсона.
- 31. Какого порядка метод Ньютона-Рафсона?
- 32. Какие преимущества и недостатки метода Ньютона-Рафсона?

Раздел (тема) дисциплины: «Методы многомерной оптимизации»

- 1. Какие методы многомерной минимизации функций называются методами спуска?
- 2. Приведите формулы итерации метода спуска.
- 3. Составьте алгоритм метода спуска.
- 4. Дайте определение направления наискорейшего спуска. Опишите метод наискорейшего спуска.
- 5. По какому принципу задается направление шага в методе наискорейшего спуска?
- 6. Как вычисляется величина шага в методе наискорейшего спуска?
- 7. Как заканчиваются вычисления в методе наискорейшего спуска?
- 8. Какого порядка метод наискорейшего спуска?
- 9. Составьте алгоритм метода наискорейшего спуска.
- 10. Какова особенность траектории поиска для метода наискорейшего спуска?
- 11. Укажите достоинства и недостатки метода наискорейшего спуска.
- 12. Дайте определение сопряженных направлений.
- 14. Запишите итерационные формулы метода сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.

- 15. Опишите метод сопряженных градиентов для квадратичной функции многих переменных.
- 16. Запишите формулу Флетчера- Ривса.
- 17. Запишите итерационные формулы метода Флетчера - Ривса.
- 18. Опишите метод Флетчера - Ривса.
- 19. Как вычисляется величина шага в методе Флетчера - Ривса?
- 20. Как заканчиваются вычисления в методе Флетчера - Ривса?
- 21. Какого порядка метод Флетчера - Ривса?
- 22. Составьте алгоритм экономного метода Флетчера - Ривса.
- 23. Дайте определение рестарта в методе Флетчера - Ривса.
- 24. Раскройте роль рестартов в повышении эффективности метода Флетчера - Ривса.
- 24. В чем заключается основная идея метода Ньютона?
- 25. Представьте функцию многих переменных рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым второго порядка малости.
- 26. Выведите формулу метода Ньютона.
- 27. Приведите различные формулы метода Ньютона.
- 28. Запишите итерационные формулы метода Ньютона-Рафсонв.
- 29. Какой принцип задания направления шага в методе Ньютона?
- 30. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона?
- 31. Какого порядка метод Ньютона?
- 32. Укажите достоинства и недостатки метода Ньютона.
- 33. Приведите формулу метода Марквардта.
- 34. Какой принцип задания направления в методе Марквардта?
- 35. Как задаются параметры в методе Марквардта?
- 36. Запишите итерационные формулы метода Марквардта.
- 37. Опишите метод Марквардта.

- 38. Как вычисляется величина шага в методе Марквардта?
- 39. Какого порядка метод Марквардта?
- 40. В чем заключается основная идея метода Пауэлла?
- 41. Запишите итерационные формулы метода Пауэлла.
- 42. Опишите метод Пауэлла.
- 43. По какому принципу задается направление шага в методе Пауэлла?
- 44. Как вычисляется величина шага в методе Пауэлла?
- 45. Какого порядка метод Пауэлла?
- 46. Опишите метод Хука-Дживса.
- 47. По какому принципу определяется направление спуска в методе Хука-Дживса?
- 48. Как проводится исследующий поиск?
- 49. Как проводится поиск по образцу?
- 50. Какого порядка метод Хука-Дживса?
- 51. Составьте алгоритм метода Хука-Дживса.
- 52. Опишите метод деформируемого многогранника (поиска по симплексу).
- 53. Как задается координаты вершин многоогранника?
- 54. Как проводится операция «отражения»?
- 55. Опишите операцию «растяжения»?
- 56. Опишите операцию «редукции»?
- 57. Какого порядка метод деформируемого многогранника?
- 58. Составьте алгоритм деформируемого многогранника.
- 59. Укажите достоинства и недостатки метода деформируемого многогранника.

Раздел (тема) дисциплины: « Методы условной оптимизации»

- 1.Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.
- 2. Опишите метод штрафов.
- 3. Какая функция называется вспомогательной и как она строится?
- 4. Какая функция называется штрафной?
- 5. Как строится штрафная функция?
- 6. Составьте алгоритм условной минимизации методом штрафов.
- 7. Обсудите сходимость метода штрафов.
- 8. Укажите достоинства и недостатки метода штрафов.
- 9. Опишите метод барьерных функций.
- 10. Что такое обратная и логарифмическая штрафная функция?
- 11. Составьте алгоритм условной минимизации методом барьерных функций.
- 12. Как формулируется сходимость метода барьерных функций? Укажите достоинства и недостатки метода барьерных функций.
- 13. В чем состоит идея комбинированного метода штрафных функций.
- 14. Опишите стратегию поиска.
- 15. Составьте алгоритм условной минимизации комбинированным методом штрафных функций.
- 16. Укажите достоинства и недостатки метода комбинированного метода штрафных функций.

Шкала оценивания: балльная

Критерии оценки

Оценка **«6 баллов»** выставляется обучающемуся, если он демонстрирует глубокое знание содержания вопроса, дает точные определения основных понятий, аргументированно и логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ актуальными примерами (типовыми и нестандартными), в том числе самостоятельно найденными, не нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **«4 балла»** выставляется обучающемуся, если он владеет содержанием вопроса, но допускает некоторые недочеты при ответе, допускает незначительные неточности при определении основных понятий, недостаточно аргументированно и (или) логически стройно излагает учебный материал, иллюстрирует свой ответ типовыми примерами.

Оценка **«2 балла»** выставляется обучающемуся, если он освоил основные положения контролируемой темы, но недостаточно четко дает определение основных понятий и дефиниций, затрудняется при ответах на дополнительные вопросы, приводит недостаточное количество примеров для иллюстрирования своего ответа, нуждается в уточняющих и (или) дополнительных вопросах преподавателя.

Оценка **« 0 баллов»** выставляется обучающемуся, если он не владеет содержанием вопроса или допускает грубые ошибки, затрудняется дать основные определения, не может привести или приводит неправильные примеры, не отвечает на уточняющие и (или) дополнительные вопросы преподавателя или допускает при ответе на них грубые ошибки

2 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

2.1 ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

- 1. Как ставится задача оптимизации?
- 2. Что такое целевая функция?
- 3. Что такое допустимая точка и допустимое множество?
- 4. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?
- 5. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации целевой функции?
- 6. Какая задача называется задачей на условный экстремум?
- 7. Какая задача называется задачей на безусловный экстремум?
- 8. Какая точка называется точкой глобального (абсолютного) минимума?
- 9. Какая точка называется точкой локального (относительного) минимума?

- 10. Что называется поверхностью (линией) уровня?
- 11. Что называется градиентом и антиградиентом дифференцируемой функции?
- 12. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции?
- 13. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?
- 14. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно определенной?
- 15. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется положительно и отрицательно полуопределенной?
- 16. Какая квадратичная форма (матрица Гессе) называется неопределенной?
- 17. Какая функция называется выпуклой? Приведите примеры.
- 18. Какая функция называется строго выпуклой? Приведите примеры.
- 19. Какая функция называется сильно выпуклой?
- 20. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы?
- 21. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
- 22. Сформулируйте критерий положительной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 23. Сформулируйте критерий отрицательной определенности симметричной матрицы в терминах её угловых миноров.
- 24. Сформулируйте критерий положительной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 25. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.
- 26. Как ставится задача на безусловный экстремум?
- 27. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.
- 28. Какие точки называются стационарными?

- 29. Сформулируйте необходимые условия минимума (максимума) второго порядка.
- 30. Сформулируйте необходимое условие минимума (максимума) второго порядка в терминах главных миноров матрицы Гессе.
- 31. Сформулируйте достаточные условия экстремума второго порядка.
- 32. Сформулируйте достаточные условие минимума (максимума) второго порядка в терминах угловых миноров матрицы Гессе.
- 33. Опишите стратегию поиска глобального безусловного экстремума.
- 34. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая унимодальная функция на отрезке $[a, b]$. Оцените точность $\varepsilon(M)$ при определении минимума $f(x)$ методом равномерного поиска в результате вычисления M значений $f(x)$.
- 35. Интервал неопределенности минимума унимодальной функции.
- 36. Метод равномерного поиска.
- 37. Метод дихотомии.
- 38. Метод деления интервала пополам.
- 39. Золотое сечение и его свойства.
- 40. Метод золотого сечения.
- 41. Метод ломаных.
- 42. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции?
- 43. Покажите, что погрешность определения точки минимума функции $f(x)$ методом равномерного не превосходит величины $\varepsilon_n = \dfrac{b-a}{n}$.
- 44. Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой
$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

- 45. Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

- 46. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют метод квадратичной интерполяции в результате M вычислений, от конкретной функции?

- 47. Что такое золотое сечений отрезка? Чему равна величина Ф? Перечислите свойства золотого сечения отрезка, на которых базируется правило вычисления пробных точек в алгоритме минимизации.

- 48. Является ли условие $f'(x_*) = 0$ достаточным, для того чтобы число x_* было точкой минимума унимодальной, но невыпуклой функции $f(x)$?

- 49. Получите итерационную формулу метода Ньютона.

- 50. Получите итерационную формулу метода хорд.

- 51. Объясните работу алгоритма метода бисекции. Выполните одну итерацию.

- 52. Объясните работу алгоритма метода ломаных.

- 53. Известно, что увеличение константы Липшица L приводит к замедлению сходимости метода ломаных. Объясните почему с помощью геометрической иллюстрации.

- 54. Укажите класс функций, для которых точное определение точки минимума гарантировано в результате всего одной итерации метода Ньютона.

- 55. Дайте определение квадратичной функции.

- 56. Чему равны градиент и матрица Гессе квадратичной функции?

- 57. Выпишите матрицу Гессе A и градиент квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2 + x_3$.

- 58. Дайте определение производной по направлению.

- 59. Какие направления дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?
- 60. Когда говорят, что в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
производится исчерпывающий спуск?
- 61. Покажите, что если в итерационном процессе
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha S_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$
выбор шага производится исчерпывающим спуском,
$$(\nabla f(\mathbf{x}_k), S_k) = 0.$$
- 63. В чем состоит идея метода наискорейшего градиентного спуска?
- 64. Сформулируйте идею метода сопряженных градиентов.
- 65. Метод Пауэлла.
- 66. Метод Флетчера-Ривса
- 67. Выпишите итерационную формулу метода Ньютона-Рафсона.
- 68. Сформулируйте общий принцип построения методов первого и второго порядков.
- 69. Сформулируйте стратегию построения алгоритма симплексного метода.
- 70. Опишите алгоритм отражения вершины в симплексном методе.
- 71. Зачем необходим и в чем заключается алгоритм редукции в симплексном методе.
- 72. Сформулируйте особенности минимизации методом Нельдера-Мида.
- 73. В чем состоит стратегия метода Хука-Дживса?
- 74. В чем состоит метод покоординатного поиска?
- 75. Какие алгоритмы случайного поиска вы знаете. В чем состоит стратегия методов случайного поиска?
- 76. Сформулируйте принципы построения алгоритмов условной оптимизации.

- 77. Какая функция называется штрафной?
- 78. Алгоритм поиска условного экстремума методом штрафных функций.
- 79. Какая функция называется барьерной?
- 80. Алгоритм поиска условного экстремума методом барьерных функций.

По вопросам 1-80 формируются вопросы в тестовой форме.

2.2 БАНК ВОПРОСОВ И ЗАДАНИЙ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

1. Что такое градиент $\nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции и каков его геометрический смысл?

2. Метод золотого сечения: как выбираются пробные точки x_1, x_2 на отрезке неопределенности $[a, b]$? 3. Сформулируйте достаточное условие безусловного минимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного минимума.
4. Постройте вспомогательную функцию $\varphi(x, s_k)$ для поиска услового минимума функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$, $x_1 + x_2 = 1$ методом штрафов.
5. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (и матрица Гессе A) называется положительно полуопределенной?
6. Запишите формулу метода Ньютона для минимизации функции одной переменной.
7. Что называется поверхностью уровня?
8. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ вычислить градиент в точке $x_* = (1, 0)^T$.
9. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ найдите матрицу Гессе.

10. Классифицировать матрицу Гессе

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Найдите экстремум функции $f(x) = 2x^8$.

12. Что называется угловыми минорами симметричной матрицы? 13. Какие векторы $s^1, s^2, ..., s^k$ называются сопряженными относительно матрицы A?

14. Дайте определение производной функции в точке x^k вдоль направления s^k.
15. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить цилиндр объемом V с наибольшей поверхностью S. Какими должны быть радиус основания R и высота цилиндра H?
16. Что такое матрица Гессе $H(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции многих переменных?

17. Чему равна длина интервала Δ_k, $k = 1, 2, ...$ неопределенности после 4-х итераций $(k = 4)$ методом дихотомии при заданном $\delta > 0$, если длина исходного интервала равна 16?
18. Запишите итерационную формулу метода наискорейщего градиентного спуска для минимизации квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.
19. Постройте вспомогательную функцию $\varphi(x, s_k)$ для поиска услового минимума функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, $x_1 = 1$.
20. Найдите экстремум функции $f(x) = x^7$. 21. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется положительно определенной?
22. Как выбираются пробные точки в методе золотого сечения?
23. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ и классифицировать ее.
24. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе функции $f(x) = x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2 + 5$ в точке $\mathbf{x} = (0, 0)$.

25. Постройте целевую функцию для задачи. Из всех прямоугольных треугольников, имеющих площадь равный S, требуется найти тот, периметр которого наименьший.

26. Сформулируйте необходимые условия экстремума первого порядка.

27. Какая точка называется стационарной?

29. Сформулируйте необходимое и достаточные условие минимума для функции одной переменной.

30. Найти экстремум функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ на множестве $\mathbb{R}^2$.

31. Запишите итерационную процедуру, лежащую в основе градиентных методов.

32. Сформулируйте достаточное условие безусловного максимума функции многих переменных. Приведите критерий Сильвестра для проверки достаточного условия безусловного максимума. 33. Чему равна длина интервала $\Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots.$ неопределенности после 3-х итераций $(k = 3)$ методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 1? 34. Постройте вспомогательную функцию $\varphi(x, s_k)$ для поиска условного минимума функция $f(x) = x^2,\ x \geqslant 1$ с применением обратной штрафной функции. 35. Как выбираются пробные точки $x_1,\ x_2$ в методе дихотомии?
36. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется отрицательно определенной?
37. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$.
38. Постройте целевую функцию для задачи. Требуется изготовить коническую воронку с образующей равной L. Каков должен быть радиус R основания конуса, чтобы объем воронки был наибольшим?
39. Чему равна величина шага исчерпывающего спуска в градиентном методе, если функции $f(x)$ квадратичная?
40. Как записывается итерационный процесс метода сопряженных градиентов для минимизации неквадратичных функций?

41. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая производная отрицательна, то эта точка является точкой максимума или минимума.

42. Как формируется параметр s_k штрафа в методе барьерных функций?
43. Как можно свести задачу максимизации к задаче минимизации?
44. Что называется главными минорами симметричной матрицы?
45. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции n переменных?

46. Как можно записать приращение дважды непрерывно-дифференцируемой функции с помощью градиента и матрицы Гессе этой функции?

47. Что называется поверхностью (линией) уровня?

48. Сформулируйте критерий отрицательной полуопределённости симметричной матрицы в терминах её главных миноров.

49. Как в методе дихотомии определяется число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε на отрезке $[a, b]$?

50. Как выбираются пробные точки x_1, x_2 в методе деления интервала пополам?

51. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется отрицательно полуопределенной?

52. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2$.

53. Для функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$ вычислить антиградиент в точке $\mathbf{x}^* = (0, 1)^T$.

54. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции $f(x)$ квадратичная.

55. Сформулируйте задачу безусловной оптимизации. Из всех прямоугольников, имеющих периметр равный P, найдите тот, площадь которого наибольшая.

56. Чему равна длина интервала неопределенности при использовании метода золотого сечения, если реализовано 4 итераций, а длина исходного интервала равна 16?

57. Если в стационарной точке функции одной переменной вторая и третья производные равны нулю, а четвертая производная отрицательна, то эта точка являетсяли точкой экстремума?

58. За какое число шагов метод сопряженных направлений позволяют найти точку минимума квадратичной функции двух переменных?

59. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$ и классифицировать ее.

60. Найдите минимум функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ методом Ньютона, если начальная точка $\mathbf{x}_0 = (1, 2)^T$.

61. Какие направления вектора S_k дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функции $f(\mathbf{x})$ называются направлениями убывания?

62. Какая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется сильно выпуклой?

63. Найдите экстремум функции $f(x) = x^9$.

64. Чему равна длина интервала Δ_k, $k = 1, 2, ...$. неопределенности после 4-х итераций ($k = 4$) методом золотого сечения, если длина исходного интервала равна 16?

65. Как выбираются пробные точки в методе дихотомии?

66. Что называется матрицей Гессе дважды дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$?

67. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = x_1^2 + x_1x_2$.

68. Запишите итерационный процесс метода Марквардта.

69. Как формируется параметр s_k штрафа в методе внешних штрафов?

70. Найти точку минимума функции $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ методом Ньютона из начальной точки $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$.

71. Какая квадратичная форма $x^T Ax$ (матрица Гессе A) называется отрицательно полуопределенной?

(а) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax< 0$.

(б) Если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \leqslant 0$.

(в) Если для любого вектора x выполняется неравенство $x^T Ax \leqslant 0$ и существует вектор $x = 0$, для которого $x^T Ax = 0$.

72. Когда говорят, что в итерационном процессе $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $x, s \in \mathbb{R}^n$ производится исчерпывающий спуск?

(а) Если величина шага α_k находится из решения задачи одномерной минимизации

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha} \Phi_k(\alpha), \quad \Phi_k(\alpha) = f(x^k + \alpha s^k).$$

(б). Если величина шага α_k находится из условия

$$f(x^{k+1}) < f(x^k).$$

(в) Если величина шага α_k выбирается постоянной.

73. Найти матрицу Гессе $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$.

$$\text{(а)} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

74. Для функции $f(x) = x_1^3 + x_2^4 + x_1 x_2$ вычислить градиент в точке $x_* = (0,1)^T$.

$$\text{(а)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad \nabla f(x_*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

75. Дайте определение поверхности уровня функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(а) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция $f(x)$ и градиент $\nabla f(x)$ принимают постоянные значения.

(б) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \mathrm{const}$.

(в) Это множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых функция принимает постоянное значение: $f(x) = c$, $c = \text{const}$, а матрица Гессе является положительно-определенной.

76. Как сводится задача максимизации к задаче минимизации?

- (а)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D}(-f(x)).$$

- (б)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} \frac{1}{f(x)}.$$

.

- (в)

$$f(x_*) = \max_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D}(-f^2(x)).$$

.

77. Какая функция называется строго выпуклой?

- (а) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$.
- (б) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$.
- (в) Если для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$.

78. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ вычислите градиент в точке $x_* = (1, 1)^T$.

- (а) $\nabla f(x_*) = (1, 1)^T$.
- (б) $\nabla f(x_*) = (0, 1)^T$.
- (в) $\nabla f(x_*) = (0, 1)^T$.

79. Число итераций n, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a, b]$, в методе деления интервала пополам оценивается:

- (а) формулой
$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$
.
- (б) условием
$$\frac{b-a-\delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2} \leqslant \varepsilon$$
.
- (в) условием
$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon$$
.

80. Пробные точки в методе золотого сечения определяются как

(а)
$$x_1 = a + L/4, \quad x_2 = b - L/4, \quad L = b - a.$$
(б)
$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}.$$
(в)
$$x_1 = a + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b-a), \quad x_2 = a + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b-a).$$

81. Проверить знакоопределенность матрицы Гессе квадратичной функции $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$.

(а) $H > 0$.
(б) $H < 0$.

(в) $H \geqslant 0$.

82. Производная функции в точке x^k вдоль направления s^k определяется как

(а) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = \dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{||\nabla f(x^k)||}$.

(б) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), s^k)}{(||\nabla f(x^k)||)^2}$.

(в) $\dfrac{\partial f(x^k)}{\partial s^k} = -\dfrac{(\nabla f(x^k), \nabla f(x^k))}{||\nabla f(x^k)||}$.

83. Как называется одним словом задача максимизации и минимизации функции?

(а) Задачей безусловной оптимизации.
(б) Задачей поиска условного оптимума.
(в) Задачей поиска экстремума.

84. Как записывается итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона для минимизации функции многих переменных?

(а)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = -H(x^k)^{-1}\nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(б)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = H(x^k)^{-1}\nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

(в)

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$
$$s^k = -H(x^k)\nabla f(x^k), \quad f(x^k + \alpha_k s^k) = \min_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k).$$

85. Найти безусловный экстремум функции $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ на множестве $\mathbb{R}^2$.

(а) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ имеет максимум.
(б) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ не имеет экстремума.
(в) В точке $x_* = (-3/16, -1/8)$ функция $f(x)$ имеет минимум.

86. Для функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^4 + x_1x_2$ вычислить антиградиент в точке $\mathbf{x}^* = (0,1)^T$.

$$\text{(а)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(б)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{(в)} \quad \nabla f(x_*) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

87. Проверить, является ли точка $x_* = (1,1)^T$ точкой безусловного минимума функции $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

(а) В точке $x_* = (1,1)$ функция $f(x)$ имеет безусловный максимум.
(б) В точке $x_* = (1,1)$ функция $f(x)$ имеет безусловный минимум.
(в) Точка $x_* = (1,1)$ не является точкой локального минимума или локального максимума.

88. Какая точка называется точкой глобального минимума?

(а) Если

$$f(x_*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in D, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

(б) Если существует $\varepsilon > 0$, такое, что если $x \in D$ и $||x^* - \mathbf{x}|| < \varepsilon$, то $f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x})$.

(в) Утверждения (а) и (б) неверны.

89. Если в стационарной точке x_* функции одной переменной $f(x)$ вторая производная отрицательна, то:
(а) x_* – точка максимума.
(б) x_* – точка минимума.
(в) в точке x_* функция имеет разрыв.

90. Какая ставится задача поиска безусловного экстремума?

$$\text{(а)} \quad x_* = \min_{x \in D} f(x) \quad \left(x_* = \max_{x \in D} f(x) \right), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\text{(б)} \quad x_* = \min_{x \in D} f(x), \quad D \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\text{(в)} \quad x_* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \left(x_* = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right).$$

91. Для функции $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + x_1^3x_2$ вычислите градиент в точке $x_* = (1,0)^T$.

91. Как определяется число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a,b]$, в методе золотого сечения?

93. Какая точка называется стационарной?

94. Выпишите матрицу A квадратичной функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - x_2$$

.

95. Дана задача: $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2 \to$, $g_1(x) = x_1 - 1 > 0$. Запишите для этой задачи штрафную функцию, используя логарифмический штраф.

96. Проверьте знакоопределенность квадратичной формы $f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$.

97. Найдите экстремум функции $f(x) = x^3 - 27x + 5$

98. Зависит ли точность определения точки минимума, которую гарантируют методы дихотомии, золотого сечения в результате M вычислений, от конкретной функции $f(x)$?)

99. Как выбираются пробные точки x_1, x_2 в методе дихотомии?

100. Запишите итерационный процесс метода сопряженных градиентов, если функции $f(x)$ квадратичная.

Шкала оценивания результатов тестирования: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения- 60 баллов (установлено положением П 02.016).

Максимальный балл за тестирование представляет собой разность двух чисел: максимального балла по промежуточной аттестации для данной формы обучения (36 или 60) и максимального балла за решение компетентностно-ориентированной задачи (6).

Балл, полученный обучающимся за тестирование, суммируется с баллом, выставленным ему за решение компетентностно-ориентированной задачи. Общий балл по промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по дихотомической шкале следующим образом:

Соответствие 100 бальной и дихотомический шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

2.3 КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Компетентностно-ориентированная задача №1.

Решите задачу минимизации $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - 10$ методом сопряженных градиентов. Начальное приближение выберите произвольно.

Компетентностно-ориентированная задача №2.

Выполните одну итерацию методом наискорейшего градиентого спуска для $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1$. Начальное приближение выберите произвольно.

Компетентностно-ориентированная задача №3.

Ящик имеет форму правильной четырехугольной призмы заданного объема V. Каковы размеры ящика $(a,\ H)$, если известно, что он имеет наименьшую полную поверхность?

Компетентностно-ориентированная задача №4.

Найдите условный минимум $f(x) = x^2 - 8x \to \min,\ x - 1 \leqslant 0$.

Компетентностно-ориентированная задача №5.

Цистерна имеет форму прямого круглого цилиндра, завершенного с одной стороны полушарием. Вместимость цистерны $V = 20\pi/3$ м^3. Найдите радиус R цилиндра, при котором цистерна будет иметь наименьшую полную поверхность.

Компетентностно-ориентированная задача №6.

Требуется поставить палатку в форме правильной четырехугольной пирамиды, имеющей боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 4\sqrt{3}\quad$ м^2. Каковы должны быть размеры палатки (сторона основания a и высота H), чтобы объем палатки был наибольший?

Компетентностно-ориентированная задача №7.

Требуется изготовить коническую воронку с образующей 18 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

Компетентностно-ориентированная задача №9.

Требуется изготовить открытую банку цилиндрической формы объемом 0.5 м^3. При каком радиусе основания расход листового материала на ее изготовление будет наименьшим?

Компетентностно-ориентированная задача №10.

Функция $f(\boldsymbol{x}) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2$ имеет три стационарные точки $\boldsymbol{x}_{1*} = (0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_{2*} = (1,1)^T$ и $\boldsymbol{x}_{3*} = (-1,-1)^T$. Определить, какая из них является точкой локального минимума. Для проверки достаточных условий экстремума используйте собственные значения матрицы Гессе.

Компетентностно-ориентированная задача №11.

Из прямоугольного жестяного листа со сторонами a и b делают ящик, вырезая равные квадраты по углам. Какова должна быть сторона у вырезанных квадратов, чтобы ящик имел максимальный объем?

Компетентностно-ориентированная задача №12.

Методом штрафов решите задачу

$$f(x) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \to \max,$$
$$2x_1 + 3x_2 = -6.$$

Компетентностно-ориентированная задача №13.

Найдите минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 2$ методом Ньютона, если начальная точка $(1,2)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №14.

Найдите минимум функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 20x_2 + 1$ методом сопряженных градиентов, если начальная точка $(1,1)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №15.

Оцените сходимость метода наискорейщего градиентного спуска сопряженных при минимизации функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$, если начальная точка $(0,0)^T$.

Компетентностно-ориентированная задача №16.

Найдите значение a, при котором достигает максимума функция

$$f(a) = \mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2},$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 4a - 2 = 0$.

Компетентностно-ориентированная задача №17.

В заданный треугольник ABC с высотой H и основанием b вписать параллелограмм наибольшей площади, стороны которого параллельны двум сторонам треугольника.

Указание к задаче: Условие, что параллелограмм вписан в треугольник, определяется $(H-h)/H = a/b$, где a и h –основание и высота параллелограмма.

Компетентностно-ориентированная задача №18.

Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (0,0)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_* = (-1,-1)^T$ точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2$.

Компетентностно-ориентированная задача №19.

Найти безусловный экстремум функции $f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$.

Компетентностно-ориентированная задача №20.

Выведите итерационную формулу Ньютона (требующую только операции умножения и сложения) для вычисления $x = 1/a$, где a — заданное действительное число.

Компетентностно-ориентированная задача №21.

Покажите, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε определения точки минимума на отрезке $[a,b]$, в методе золотого сечения оценивается формулой

$$n \geqslant \ln \frac{2\varepsilon}{b-a} / \ln \Phi, \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Компетентностно-ориентированная задача №22.

Покажите, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой

$$n \geqslant \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}.$$

Компетентностно-ориентированная задача №23.

Требуется спроектировать емкость в виде прямой призмы (без крышки), на изготовление которой будет затрачено наименьшее количество листового материала. Основанием призмы является квадрат с стороной a. Объем призмы фиксирован и равен 10 мм^3.

Компетентностно-ориентированная задача №24.

Проверить, являются ли точки $\boldsymbol{x}_* = (2,0,1)^T$ и $\boldsymbol{x}_* = (0,0,0)^T$ точками безусловного экстремума функции: $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

Компетентностно-ориентированная задача №25.

В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр так, что основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Найдите наибольшую возможную часть объема конуса, занятую таким цилиндром.

Шкала оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи: в соответствии с действующей в университете балльно-рейтинговой системой оценивание результатов промежуточной аттестации обучающихся осуществляется в рамках 100-балльной шкалы, при этом максимальный балл по промежуточной аттестации обучающихся по очной форме обучения составляет 36 баллов, по очно-заочной и заочной формам обучения - 60 (установлено положением П 02.016). Максимальное количество баллов за решение компетентностно-ориентированной задачи - 6 баллов. Балл, полученный обучающимся за решение компетентностно-ориентированной задачи, суммируется с баллом, выставленным ему по результатам тестирования. Общий балл промежуточной аттестации суммируется с баллами, полученными обучающимся по результатам текущего контроля успеваемости в течение семестра; сумма баллов переводится в оценку по дихотомической шкале:

Соответствие 100 бальной и дихотомической шкал

Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по дихотомической шкале
100-50	зачтено
49 и менее	не зачтено

Критерии оценивания решения компетентностно-ориентированной задачи (нижеследующие критерии оценки являются примерными и могут корректироваться): 6-5 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует глубокое понимание обучающимся предложенной проблемы и разностороннее ее рассмотрение; свободно конструируемая работа представляет собой логичное, ясное и при этом краткое, точное описание хода решения задачи (последовательности (или выполнения) необходимых трудовых действий) и формулировку доказанного, правильного вывода (ответа); при этом обучающимся предложено несколько вариантов решения или оригинальное, нестандартное решение (или наиболее эффективное, или наиболее рациональное, или оптимальное, или единственно правильное решение); задача решена в установленное преподавателем время или с опережением времени. 4-3 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует понимание обучающимся предложенной проблемы; задача решена типовым способом в установленное преподавателем время; имеют место общие фразы и (или) несущественные недочеты в описании хода решения и (или) вывода (ответа). 2-1 балла выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует поверхностное понимание обучающимся предложенной проблемы; осуществлена попытка шаблонного решения задачи, но при ее решении допущены ошибки и (или) превышено установленное преподавателем время. 0 баллов выставляется обучающемуся, если решение задачи демонстрирует непонимание обучающимся предложенной проблемы, и (или) значительное место занимают общие фразы и голословные рассуждения, и (или) задача не решена.