Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Чернецкая Ирина Евгеньевна
Должность: Заведующий кафедрой
Дата подписания: 24.10.2022 02:41:47
Уникальный программный ключ:
bdf214c64d8a381b0782ea566b0dce05e3f5ea2d

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
«Юго-Западный государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
«Вычислительная техника»
И.Чер И.Е. Чернецкая
«30» 06 2022 г.

# ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
## для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

« Математическое моделирование нелинейных систем»

09.04.01 Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

# 1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ

## 1.1 Тема: Основные понятия математического моделирования

### 1.1.1 Вопросы для устного опроса

- 1. Что такое математическое моделирование?
- 2. Этапы математического моделирования.
- 3. Построение математической модели. Этапы построения математической модели. Понятие объекта, схемы замещения. Адекватность математической модели.
- 4. Пример построения математической модели.
- 5. Реализация математической модели. Содержание этапов реализации.
- 6. Пример реализации математической модели.

## 1.2 Тема: Нелинейные математические модели: динамическая система как основная математическая модель естествознания

### 1.2.1 Вопросы для устного опроса

- 1. Автономные и неавтономные динамические модели с непрерывным временем.
- 2. Редукция к локальной форме автономных и неавтономных моделей.
- 3. Равновесные решения: состояния равновесия и периодические рашения. Нерегулярные решения (квазипериодические и хаотические).
- 4. Дискретные нелинейные модели. Понятие отображение Пуанкаре.
- 5. Построение отображения Пуанкаре методом Хенона.
- 6. Построение стробоскопического отображения Пуанкаре неавтономных систем.
- 7. Автономные н неавтономные отображения.
- 8. Неавтономные математические модели с дискрентны временем.

## 1.3 Раздел (тема) дисциплины: Методы реализации математических моделей

### 1.3.1 Вопросы для устного опроса

- 1. Численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.
- 2. Понятие аппрокимации и простейшие схемы численного решения:
  - Явный и неявный методы Эйлера.
  - Метод трапеций.

  – Методы Рунге-Кутта и разностные методы.

- 3. Устойчивость численных схем.
  – Устойчивость явного и неявного методов Эйлера.
  – Устойчивость метода трапеций.

## 1.4 Раздел (тема) дисциплины: Введение в нелинейную динамику математических моделей

### 1.4.1 Вопросы для устного опроса

- 1. Расчет состояний равновесия автономных диннамических математических моделей.
- 2. Алгоритмы численного поиска периодических решений автомонмых и неавтономных моделей.
- 3. Устойчивость и бифуркации состояний равновесия автономных векторных полей.
- 4. Устойчивость и бифуркации периодических решений динамических моделей с непрерывным временем.
- 5. Гладкие и негладкие дискретные модели.
- 6. Устойчивость и бифуркации неподвижных точек и периодических движений дискретных систем.
- 7. Введение в теорию нелокальных бифуркаций инвариантных множеств .

### 1.4.2 Методический материал и задачи к теме «Введение в нелинейную динамику математических моделей»

**Системы с постоянной матрицей**

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = AX + B(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \tag{1}$$

$$X, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{2}$$

**Б. Алгоритм**

1. Решить задачу Коши на одном периоде:

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t), \quad X(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

тем самым рассчитать вектор $X(T, 0)$.

2. Рассчитать матрицу $F(T)$ численно решив уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

на одном периоде $0 \leqslant t \leqslant T$ или рассчитать $F(T)$ по формуле

$$F(T) = \mathrm{e}^{AT}.$$

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F(T))Q = X(T, 0)$$

относительно вектора начальных условий $Q$ для периодического решения $X_c(t)$.

4. Решить задачу Коши на одном периоде с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t), \quad X(0) = Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

5. Найти собственные значения матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0$$

и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

**C.Численная реализация алгоритма**

1. Выбрать шаг интегрирования $h = T/m$.
2. Рассчитать матрицу $\omega(A, h) = A^{-1}(\mathrm{e}^{Ah} - E)$.
3. Решить задачу Коши с условием $X(0) = 0$ для системы (15) численно:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A, h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = 0.$$

Здесь $X_k = X(t_k)$, $B_k = B(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

4. Рассчитать матрицу $F(T)$, решив матричное уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

численно по схеме

$$F_{k+1} = F_k + \omega(A, h)AF_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad F_0 = E.$$

Здесь $F_k = F(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F_m)Q = X_m, \quad F_m = F(T), \quad X_m = X(T, 0).$$

6. Решить численно задачу Коши с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A, h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = Q.$$

7. Рассчитать собственные значения матрицы $F(T)$ и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

**УПРАЖНЕНИЯ**

**1.** Найти периодическое решение системы дифференциальных уравнений и исследовать устойчивость

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t),$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \frac{V_m}{L} \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры: $R = 10$ Ом, $L = 0.1$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф, $R_L = 200$ Ом, $T = 2\pi/\Omega$, $T = 10^{-3}$ с, $V_m = 20$ В.

**2.** Найдите периодическое решение $x_c(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b(t), \quad b(t+T) \equiv b(t),$$

где $x \in \mathbb{R}$ и $b(t) = A_m \cos t$; $T = 2\pi$ – период периодического решения, $a$, $A_m = const$.

*Указания:* Пусть действительная матрица $A$ размерности $2 \times 2$ имеет два различных действительных или комплексных собственных значения $\lambda_1, \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(а) Матрица $e^{At}$ вычисляется по формуле

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2.$$

Здесь

$$Q_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \; Q_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где $E$—единичная матрица.

(б) Пусть собственные значения $(2 \times 2)$-матрицы $A$ комплексные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, где $\alpha, \beta$ — действительная и мнимые части. Тогда матрица $e^{At}$ вычисляется что формуле

$$e^{At} = \mathrm{e}^{\alpha t} \left[ E \cdot \cos \beta t + (A - \alpha E) \frac{\sin \beta t}{\beta} \right],$$

где $E$—единичная матрица.

**Системы переменной матрицей**

### Постановка задачи

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \tag{4}$$
$$X, B \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $A(t)$ — кусочно постоянная матрица

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T, \end{cases} \quad 0 < \tau < T. \tag{5}$$

**Алгоритм поиска периодического решения**

1. Решить задачу Коши на одном периоде:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad X(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

2. Рассчитать матрицу $F(T)$ численно решив уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = A(t)F(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T \end{cases}$$

на одном периоде $0 \leqslant t \leqslant T$ или рассчитать $F(T)$ по формуле

$$F(T) = \mathrm{e}^{A_2(T-\tau)}\mathrm{e}^{A_1\tau}.$$

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F(T))Q = X(T, 0)$$

относительно вектора начальных условий $Q$ для периодического решения $X_c(t)$.

4. Решить задачу Коши на одном периоде с условием $X(0) = Q$:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t), \quad X(0) = Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

5. Найти собственные значения матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0$$

и провести анализ их расположения в комплексной плоскости относительно единичного круга.

**Алгоритм численной реализации**

1. Выбрать шаг интегрирования $h = T/m$.
2. Рассчитать матрицы $\omega(A_1, h) = A_1^{-1}(\mathrm{e}^{A_1 h} - E)$, $\omega(A_2, h) = A_2^{-1}(\mathrm{e}^{A_2 h} - E)$ .
3. Решить задачу Коши с условием $X(0) = 0$ для системы (15) численно:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A, h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = 0,$$
$$\omega(A, h) = \begin{cases} \omega(A_1, h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2, h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

Здесь $X_k = X(t_k)$, $B_k = B(t_k)$.

4. Рассчитать матрицу $F(T)$, решив матричное уравнение

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(0) = E, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T \end{cases}$$

численно по схеме

$$F_{k+1} = F_k + \omega(A, h)AF_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad F_0 = E,$$
$$\omega(A, h) = \begin{cases} \omega(A_1, h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2, h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

Здесь $F_k = F(t_k)$, $tk = k \cdot h$.

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$(E - F_m)Q = X_m, \quad F_m = F(T), \quad X_m = X(T, 0).$$

6. Решить численно задачу Коши с условием $X(0) = Q$ и тем самым рассчитать периодическое решение $X_c(t)$:

$$X_{k+1} = X_k + \omega(A, h)(AX_k + B_k), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad X_0 = Q,$$
$$\omega(A, h) = \begin{cases} \omega(A_1, h), & 0 \leqslant t_k < \tau; \\ \omega(A_2, h), & \tau \leqslant t_k \leqslant T, \end{cases} \quad tk = k \cdot h.$$

7. Расчет собственных значений матрицы $F(T)$

$$\det(F(T) - \lambda E) = 0.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Найти периодическое решение системы дифференциальных уравнений и исследовать устойчивость

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B, \quad A(t) = \begin{cases} A_1, & kT \leqslant t < kT + \tau; \\ A_2, & kT + \tau \leqslant t \leqslant (k+1)T, \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{V_m}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры: $R = 10$ Ом, $L = 0.1$ Гн, $C = 10^{-6}$ Ф, $R_L = 200$ Ом, $T = 2\pi/\Omega$, $T = 10^{-3}$ с, $V_m = 20$ В, $\tau = T/4$.

**Нелинейные математические модели**

Рассмотрим в качестве первого примера систему управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией первого рода [2-5], поведение которой описывается скалярным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k), \quad f(x) = -\lambda\, x, \quad \lambda > 0. \tag{7}$$

Моменты импульсации $t_k$ в (7) определяются [2-5]

$$t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $\Phi(x)$ — неубывающая функция (частотная модуляционная характеристика).

Величины $b_k$ в правой части (7) находятся как [2-5]

$$b_k = F(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $F(x)$ — невозрастающая функция (амплитудная модуляционная характеристика).

Функции $\Phi$, $F$ являются ограниченными и принимают положительные значения. В качестве модуляционных функций $\Phi$, $F$ в [2-5] выбрана функция Хилла:

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1+(x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1+(x/r)^p},$$

где $p = 1, 2, ....$ — показатель функции Хилла, определяющая крутизну модуляционных характеристик; $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $r$ — параметры, которые принимают положительные значения. Примеры функций $\Phi(x)$ и $F(x)$ показаны на рис. 2.

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (7) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках $t_k$, $k \geqslant 0$ (см. рис. 3).

**Предложение 1** *Величины скачков в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением*

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

**Доказательство.** В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (7) записывается в форме

$$\dot{x} = -\lambda\, x + b_k \delta(t - t_k). \tag{8}$$

Решение уравнения (8) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \tag{9}$$

где $x_\pm(t)$ — непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = -\lambda\, x$.

Подставляя (9) в (8) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$, имеем

$$\begin{gathered}\dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t-t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = -\lambda\, x_-(t) - \lambda[x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k\delta(t - t_k).\end{gathered}$$

Поскольку $\dot{x}_\pm(t) = -\lambda x_\pm(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^\pm) = \lim_{t \to t_k \pm 0} x_\pm(t).$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Запишем уравнение (7) в эквивалентной форме [6]

$$\dot{x} = -\lambda x. \tag{10}$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени $t_k$, $k \geqslant 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)).$$

В дальнейшем будем предполагать непрерывность $x(t)$ слева от точек разрыва $t = t_k$. В промежутках между точками разрыва (в интервалах непрерывности)

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ....$$

уравнение (10) имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda x,$$

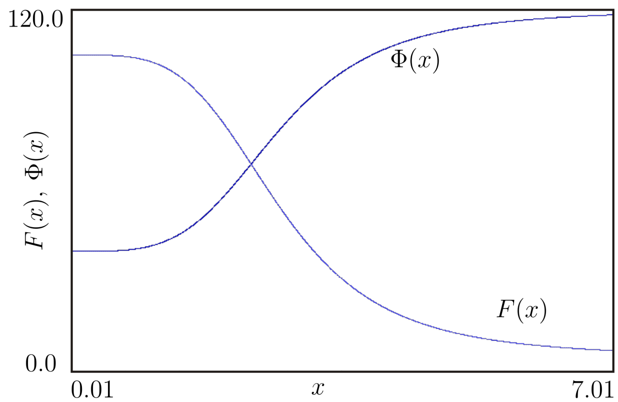



Рис. 1: Модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$: $\Phi(x)$ – частотная характеристика; $F(x)$ – амплитудная характеристика

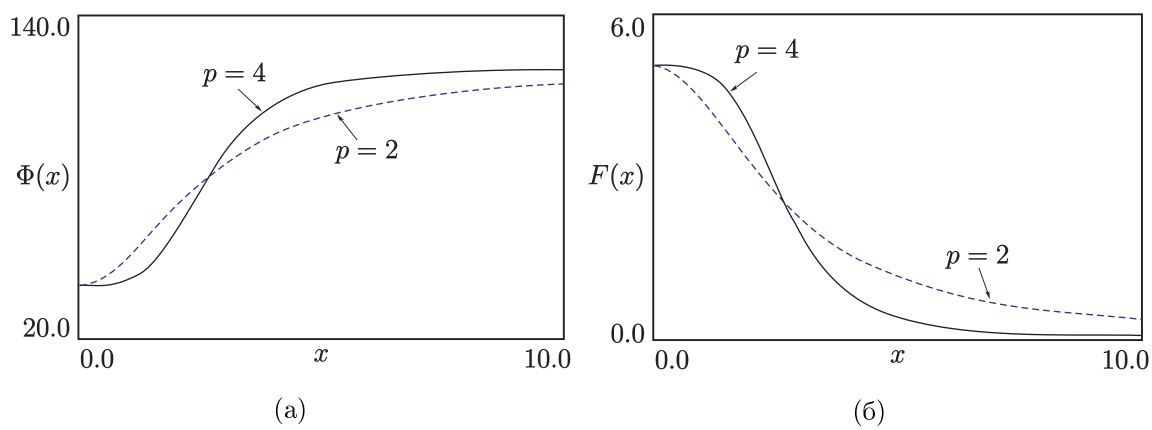



Рис. 2: Модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$ при разных значениях показателях $p$ функции Хилла: (а) — частотная модуляционная характеристика $\Phi(x)$; (б) амплитудная модуляционная характеристика $F(x)$

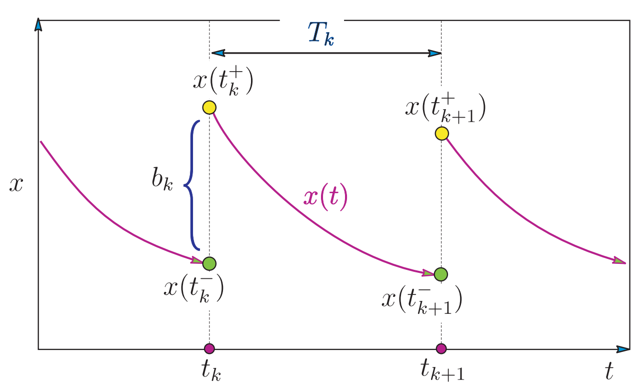



Рис. 3: Решение уравнения (10), где $t_k$ и $t_{k+1}$ — точки разрывов

решение которого с начальным условием $x(t_k) = x(t_k^+)$ находится

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_k^+)}\, x(t_k^+).$$

Отсюда для $t = t_{k+1}^{+}$

$$x(t_{k+1}^{-}) = \mathrm{e}^{-\lambda(t_{k+1}-t_k^{+})}\, x(t_k^{+}) \tag{11}$$

или

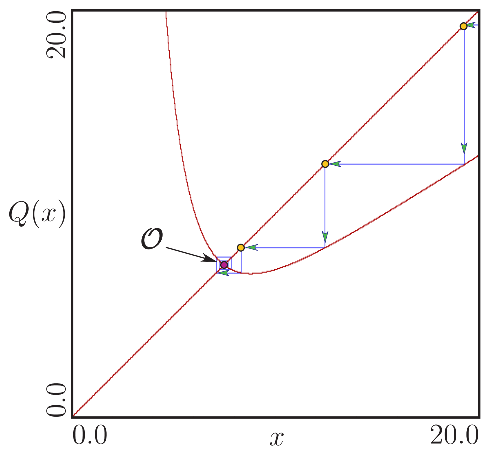
$$x(t_{k+1}^{-}) = \mathrm{e}^{-\lambda T_k}\, x(t_k^{+}), \quad T_k = \Phi(x(t_k^{-})),$$

где $x(t_k^{+})$ ( см. рис. 3):

$$x(t_k^{+}) = x(t_k^{-}) + b_k, \quad b_k = F(x(t_k^{-})).$$

Подставляя выражение для $x(t_k^{+})$ в (11), получим

$$x(t_{k+1}^{-}) = \mathrm{e}^{-\lambda T_k}\,(x(t_k^{-}) + b_k), \quad T_k = \Phi(x(t_k^{-})), \quad b_k = F(x(t_k^{-})). \tag{12}$$



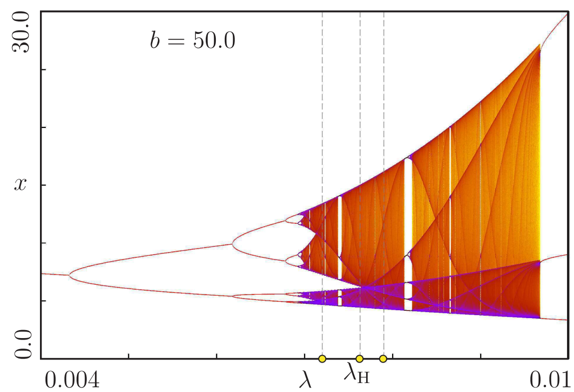




Рис. 4: (а) Отображение (13). (б) Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода

Обозначим $x_k = x(t_k^{-})$. Тогда отображение , порождаемое уравнением (10), записывается [6]

$$\begin{gathered} x_{k+1} = Q(x_k), \\ Q(x) = \mathrm{e}^{-\lambda\Phi(x)}\,(x + F(x)), \\ \Phi(x) = k_1 + k_2\frac{(x/r)^p}{1+(x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1+(x/r)^p}. \end{gathered} \tag{13}$$

Параметры: $k_1 = 40$, $k_2 = 80$, $k_3 = 0.0001b$, $k_4 = 5b$, где $2 < b < 100$, $r = 2.7$, $p = 4$, $0.003 < \lambda < 0.038$. В качестве варьируемых выберем $\lambda$ и $b$. Таким образом, дифференциальное уравнение (7) с разрывным решением сводится к гладкому отображению (13).

**Задача 1.1.** Математическая модель релейной системы:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = G(\mathbf{x}), \quad G(\mathbf{x}) = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b}, & \xi > 0, \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b}, & \xi < 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \xi(x_1, x_2) = q + C'\mathbf{x} = x_1 - \vartheta x_2 + q,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -\vartheta \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \lambda_1/\lambda_2.$$

Параметры: $\lambda_1 = -0.8857$, $\lambda_1 = -0.1249$, $q = 3.2388$. Знак штрих «$'$» здесь и далее обозначает транспонирование матрицы.

**Задача 1.2.** Модель релейной системы с колебательной линейной частью:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = G(\mathbf{x}), \quad G(\mathbf{x}) = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b}, & \xi > 0, \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b}, & \xi < 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}, \quad \xi(x_1, x_2) = q + C'\mathbf{x} = \vartheta x_1 - x_2 + q,$$

$$C = \begin{bmatrix} \vartheta \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

Параметры: $\alpha = -0.3842$, $\beta = 0.266$, $q = 0.4852$.

1. Получите уравнения для расчета $T$-периодического решения с двумя пересечениями поверхности разрыва.

2. Проверьте выполнение условия трансверсальности пересечения.

3. Получите выражение для расчета матрицы монодромии $F(T)$.

4. Напишите программу численного решения уравнения периодов методом Ньютона -Рафсона.

5. Напишите программу расчета периодического решения и анализа локальной устойчивости.

6. Рассчитайте фазовый портрет динамической системы.

**Задача 1.3.** Регулятор температуры в помещении, описывается уравнением

$$C\frac{d\theta}{dt} = -K\theta + W\varphi(\varepsilon).$$

Здесь $\theta$ — температура печи; $C$ – теплоемкость печи; $W$ — мощность, подводимая к печи со стороны нагревателя; $K\theta$ — мощность теплоотдачи во внешнюю среду; $\varepsilon = \theta_{\mathrm{ref}} - \theta$ — ошибка, где $\theta_{\mathrm{ref}}$ — постоянный задающий сигнал; $\varphi(\varepsilon)$ — релейная функция с гистерезисом $\chi_0$, принимающая постоянные значения $+1$ и $0$.

Получите уравнение периодов для расчета предельного цикла с одним импульсом на периоде. Исследуйте локальную устойчивость предельного цикла.

**Задача 1.4.** Исследуйте устойчивость $T$-периодического движения математической модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\mathcal{K}}{T \cdot s + 1}. \tag{16}$$

Параметры линейной части и модулятора уточните у преподавателя.

*Указание:* Периодическое решение найдите методом уравнений периодов.

*Указания:*

**(а)** Решение системы линейных дифференциальных уравнений $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ с условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$:

$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_s\} - \mathbf{x}_s$, $\mathbf{x}_s = A^{-1}\mathbf{b}$, $\det A \neq 0$.

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$-векторы, $A$—$(n \times n)$-матрица.

**(б)** Пусть действительная матрица $A$ размерности $2 \times 2$ имеет два различных действительных или комплексных собственных значения $\lambda_1, \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

**(в)** Матрица $\mathrm{e}^{At}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2.$$

Здесь

$$Q_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2},\ Q_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где $E$—единичная матрица.

**(г)** Пусть собственные значения $(2 \times 2)$-матрицы $A$ комплексные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, где $\alpha, \beta$ — действительная и мнимые части. Тогда матрица $e^{At}$ вычисляется что формуле

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[E \cdot \cos\beta t + (A - \alpha E)\frac{\sin\beta t}{\beta}\right],$$

где $E$—единичная матрица.

**Алгоритм расчета периодического решения**

Пусть $t_k$, $k = 1, ..., m$ — моменты переключения релейного элемента на периоде $T$ периодического решения $\mathbf{x}_c(t+T) \equiv X_c(t)$. Для определенности будем считать, что в момент времени $t = t_k$ с ростом $t$ функция $\xi(\mathbf{x}_c(t))$ меняет знак с «+» на «−», а в момент времени $t = t_{k+1}$ — с минуса «−» на плюс «+».

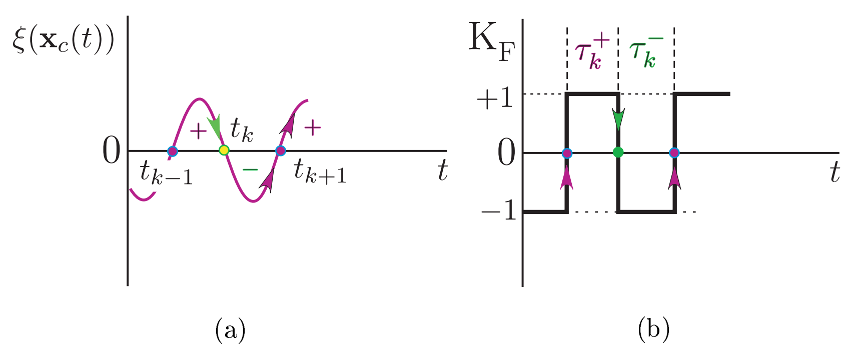



Рис. 5: (а) Направления пересечений поверхности разрыва. (б) Выходной сигнал релейного элемента. Здесь $\tau_k^+ = t_k - t_{k-1}$, $\tau_k^- = t_{k+1} - t_k$ длительности положительного и отрицательного импульсов, соответственно.

Введем следующие обозначения (см. Рис. 5): $\tau_k^+ = t_k - t_{k-1}$ – ширина положительного импульса, $\tau_k^- = t_{k+1} - t_k$ – ширина отрицательного импульса, $K_\mathrm{F}$ — выходной сигнал релейного элемента.

Задачу поиска $\mathbf{x}_c(t)$ можно свести к задаче расчета моментов переключения $t_k$, $k = \overline{1,m}$ релейного элемента, где $m$ – число переключений на периоде $T$:

$$\xi_k(t_1, t_2, ...., t_m) = q + C'\widehat{\mathbf{x}}_c(t_k) = 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Здесь $\widehat{\mathbf{x}}_c(t)$– периодическое решение при заданных $t_k$, $k = 1, m$.

1. При заданных моментах $t_k$, $k = 1, m$ выходной сигнал релейного элемента:

$$K_{\mathrm{F}}(t) = \begin{cases} +1, & t_{k-1} < t \leqslant t_k, \\ -1, & t_k < t \leqslant t_{k+1}. \end{cases}$$

Тогда системы (14), (15) становятся линейными:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{18}$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}\, K_{\mathrm{F}}(t) = \begin{cases} +\mathbf{b}, & t_{k-1} < t \leqslant t_k, \\ -\mathbf{b}, & t_k < t \leqslant t_{k+1}. \end{cases} \tag{19}$$

Периодическое решение такой системы легко находится. Пусть $m = 2$, тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}\, K_{\mathrm{F}}(t) = \begin{cases} +\mathbf{b}, & t_0 < t \leqslant t_1, , \\ -\mathbf{b}, & t_1 < t \leqslant t_2 = t_0 + T. \end{cases}$$

В области $t_0 < t \leqslant t_1$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}(t_0) = Q.$$

Решение

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}(Q + \mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s, \quad \mathbf{x}_s = A^{-1}\mathbf{b}$$

Отсюда для $t = t_1$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathrm{e}^{A(t_1-t_0)}(Q + \mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s \tag{20}$$

или

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathrm{e}^{A\tau^+}(Q + \mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s \quad \tau^+ = t_1 - t_0.$$

В области $t_1 < t \leqslant t_2$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathrm{e}^{A(t_1-t_0)}(Q + \mathbf{x}_s) - \mathbf{x}_s.$$

Решение

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_1)}(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_s) + \mathbf{x}_s$$

Для $t = t_2$

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathrm{e}^{A(t_2-t_0)}(Q + \mathbf{x}_s) - 2\mathrm{e}^{A(t_2-t_1)}\mathbf{x}_s + \mathbf{x}_s \tag{21}$$

или

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathrm{e}^{A\tau^+ + \tau^-}(Q + \mathbf{x}_s) - 2\mathrm{e}^{A\tau^-}\mathbf{x}_s + \mathbf{x}_s \quad \tau^- = t_2 - t_1, \quad \tau^+ + \tau^- = t_2 - t_0 = T.$$

Из условия периодичности $\mathbf{x}(t_0+T)=\mathbf{x}(t_2)=Q$ получим

$$Q=\mathrm{e}^{A(t_2-t_0)}(Q+\mathbf{x}_s)-2\mathrm{e}^{A(t_2-t_1)}\mathbf{x}_s+\mathbf{x}_s$$

или

$$Q=\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}(Q+\mathbf{x}_s)-2\mathrm{e}^{A\tau^-}\mathbf{x}_s+\mathbf{x}_s.$$

Отсюда вектор начальных условия $Q$ для периодического решения линейной системы (18) удовлетворяет системе линейных уравнений

$$(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})Q=(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s.$$

Решение легко находится

$$Q=(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s. \tag{22}$$

2. Расчет $\widehat{\mathbf{x}}_c(t_k)$ для заданных моментов $t_k$, $k=1,m$, $m=2$. Подставив (22) в (20) и обозначив $\mathbf{x}(t_1)=\widehat{\mathbf{x}}_c(t_1)$, имеем

$$\mathbf{x}(t_1)=\widehat{\mathbf{x}}_c(t_1)=\mathrm{e}^{A\tau^+}(Q+\mathbf{x}_s)-\mathbf{x}_s=$$
$$\mathrm{e}^{A\tau^+}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s-(E-\mathrm{e}^{A\tau^+})\mathbf{x}_s)$$

Аналогично подставив (22) в (21), получим

$$\mathbf{x}(t_2)=\widehat{\mathbf{x}}_c(t_2)=\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}Q+(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s=$$
$$=\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s+[\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E]\mathbf{x}_s.$$

3. После подстановки выражений для $\widehat{\mathbf{x}}_c(t_k)$, $k=1,2$ в (17), получим систему нелинейных уравнений относительно $\tau^+$, $\tau^-$:

$$\xi_1(t_1,t_2)=\xi_1(\tau^+,\tau^-)=q+C'\widehat{\mathbf{x}}_c(t_1)=0,$$
$$\xi_2(t_1,t_2)=\xi_1(\tau^+,\tau^-)=q+C'\widehat{\mathbf{x}}_c(t_2)=0,$$

где

$$\widehat{\mathbf{x}}_c(t_1)=\mathrm{e}^{A\tau^+}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s-(E-\mathrm{e}^{A\tau^+})\mathbf{x}_s),$$
$$\widehat{\mathbf{x}}_c(t_2)==\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s+[\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E]\mathbf{x}_s.$$

Окончательно:

$$\xi_1(\tau^+,\tau^-)=q+C'\mathrm{e}^{A\tau^+}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s-C'(E-\mathrm{e}^{A\tau^+})\mathbf{x}_s)=0,$$
$$\xi_2(\tau^+,\tau^-)=q+C'\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}(E-\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)})^{-1}(\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E)\mathbf{x}_s+$$
$$+C'[\mathrm{e}^{A(\tau^++\tau^-)}-2\mathrm{e}^{A\tau^-}+E]\mathbf{x}_s=0.$$

**Алгоритм**

1. Расчет вектора начальных условий $Q$ периодического решения системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=A\mathbf{x}+\mathbf{b}(t),$$
$$\mathbf{b}(t)=\mathbf{b}\,K_{\mathrm{F}}(t)=\begin{cases}+\mathbf{b}, & t_{k-1}<t\leqslant t_k,,\\ -\mathbf{b}, & t_k<t\leqslant t_{k+1}.\end{cases}$$

2. Расчет $\widehat{\mathbf{x}}_c(t_k)$, $k = 1, m$
3. Получение уравнений периодов:

$$\xi_k(t_1, t_2, ...., t_m) = q + C'\widehat{\mathbf{x}}_c(t_k) = 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

4. Численное решение уравнений периодов.

**Исследование локальной устойчивости периодического решения**

Локальная устойчивость периодического решения определяется собственными значениями $\rho_1, \rho_2$ матрицы монодромии $F(T)$

$$\det(F(T) - \rho E) = 0,$$

где

$$F(T) = \prod_{k=1}^{m} M_{m+1-k} \cdot \mathrm{e}^{A(t_{m+1-k} - t_{m-k})},$$

$$M_k = E + A_k^- = (E - A_k^+)^{-1}, \quad A_k^{\pm} = \frac{\Delta G_k \left(\dfrac{\partial \xi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)'}{\dfrac{d\xi}{dt}^{\pm}}, \quad t = t_k, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_c,$$

$$\Delta G_k = G_k^+ - G_k^-, \quad G_k^{\pm} = G(\mathbf{x}_c(t_k \pm 0)), \quad \frac{d\xi}{dt}^{\pm} = \left(\frac{\partial \xi(\mathbf{x}_c(t_k))}{\partial \mathbf{x}}\right)' G_k^{\pm}.$$

*В выражении для $A_k^{\pm}$ числитель дроби — квадратная матрица, знаменатель — скаляр.*

Для $m = 2$ формула принимает вид

$$F(T) = M_2 \cdot \mathrm{e}^{A(t_2 - t_1)} \cdot M_1 \cdot \mathrm{e}^{A(t_1 - t_0)} = M_2 \cdot \mathrm{e}^{A\tau^-} \cdot M_1 \cdot \mathrm{e}^{A\tau^+}$$

$$M_1 = E + A_1^-, \quad M_2 = E + A_2^-.$$

## 1.5 Раздел (темы) дисциплины: Математическое моделирование нелинейной динамики биологических и технических систем

### 1.5.1 Вопросы для устного опроса

- 1. Математические модели импульсных и непрерывных автоматических систем: модели регуляции тестостерона и системы автоматического управления наркозом при общей анестезии.
- 2. Бифуркация Неймарка-Саккера.
- 3. Число вращения.
- 4. Двумерный тор и замнутая инвариантная кривая.
- 5. Резонанс на замкнутой инвариантной кривой.
- 6. «Border-collision» в негладких дискретных моделях.

### 1.5.2 Методический материал и задачи к теме «Математическое моделирование нелинейной динамики биологических и технических систем»

## Задача 2.1. Дискретные модели гибридных систем

1. Рассмотрите уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

1.1. Постройте отображение в форме

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^+), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\text{т.е. } x(t_{k+1}^+) = Q(x(t_k^+)),\ x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)),\ t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)).$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для $p = 4$, $b = 50.0$ и $0.0042 < \lambda < 0.0086$.

1.3. Составить алгоритм численного расчета неподвижной точки и анализа ее локальной устойчивости. Постройте итерационные диаграммы для ситуаций $0 < \rho < 1$, $-1 < \rho < 0$, $\rho < -1$. Объясните наблюдаемую динамику.

2. Исследовательская задача.

## Задача 2.2. Кусочно-гладкие дискретные модели импульсных систем

Рассмотрите модель системы управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени $t_k$, $k \geqslant 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b \cdot F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)),$$

где $F(x)$, $\Phi(x)$ кусочно-линейные функции [3]:

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & 0 \leqslant x < \Delta_1, \\ -a_\mathrm{F} x + b_\mathrm{F}, & \Delta_1 \leqslant x < \Delta_2, \\ F_2, & x > \Delta_2, \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1, & 0 \leqslant x < \Delta_1, \\ -a_\Phi x + b_\Phi, & \Delta_1 \leqslant x < \Delta_2, \\ \Phi_2, & x > \Delta_2. \end{cases}$$

$$a_\mathrm{F} = \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2 - \Delta_1},\ a_\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta_2 - \Delta_1},\ b_\mathrm{F} = \frac{F_1\Delta_2 - F_2\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1},\ b_\Phi = \frac{\Phi_1\Delta_2 - \Phi_2\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}.$$

Параметры: $\Delta_1 = 1.5$; $\Delta_2 = 4$; $F_1 = 3.0$; $F_2 = 5.0$; $\Phi_1 = 60.0$; $\Phi_2 = 100.0$; $1 < b < 10$; $0.003 < \lambda < 0.038$.

1. Постройте математическую модель в форме кусочно-гладкого отображения [9,10].

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^-), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_\mathcal{L}(x), & 0 \leqslant x < \Delta_1, \\ Q_\mathcal{M}(x), & \Delta_1 \leqslant x < \Delta_2, \\ Q_\mathcal{R}(x), & x > \Delta_2, \end{cases}$$

где $Q_\mathcal{L}$, $Q_\mathcal{M}$, $Q_\mathcal{R}$ — гладкие функции.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде.

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде.

4. Определите характер потери устойчивости. Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

5. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации $\lambda$. Объясните, что происходит при насыщении модулятора.

### Задача 2.3. Дискретные модели широтно-импульсных систем

1. Постройте стробоскопическое отображение для математической модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\mathcal{K}}{T \cdot s + 1}. \tag{23}$$

Параметры системы уточните у преподавателя.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде (1-цикла или неподвижной точки отображения).

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде. Рассчитайте область устойчивости 1-цикла по коэффициенту усиления цепи обратной связи.

4. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации коэффициента усиления. Определите, как меняется динамика при потере устойчивости 1-цикла. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

**Бифуркационный анализ двумерных нелинейных моделей**

Рассмотрим двумерное отображение

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

которое для малых $|\alpha|$ имеет неподвижную точку

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)$$

с мультипликаторами

$$\rho_{1,2} = |\rho(\alpha)|\mathrm{e}^{\pm i\theta(\alpha)}, \quad |\rho(0)| = 1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \pi,$$

т.е. при бифуркационном значении параметра

$$\alpha = \alpha_0 = 0$$

комплексно-сопряженные мультипликаторы $\rho_{1,2}$ расположены на границе единичной окружности.

**Определение**. *Бифуркация неподвижной точки, при которой комплексно-сопряженная пара мультипликаторов попадает на границу единичной окружности, т.е. $\rho_{1,2} = \mathbf{e}^{\pm i\theta_0}$ называется бифуркацией Неймарка-Саккера (Neimark-Sacker bifurcation). Бифуркация реализуется только, если $n \geqslant 2$*

**Анализ бифуркации Неймарка-Саккера основывается на следующей теореме.**

**Теорема**. *Пусть двумерное отображение*

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

*имеет для малых значений параметра $|\alpha|$ неподвижную точку*

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)$$

*с мультипликаторами*

$$\rho_{1,2} = |\rho(\alpha)|\mathbf{e}^{\pm i\theta(\alpha)}, \quad |\rho(0)| = 1, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad 0 < \theta_0 < \pi.$$

*Пусть выполнены следующие условия*

$$r'(0) \neq 0, \quad r(0) = |\rho(0)|, \quad (r(\alpha) = |\rho(\alpha)|),$$
$$\mathbf{e}^{\pm i\, k\theta_0} \neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

*Тогда существует окрестность неподвижной точки $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, в которой рождается единственная замкнутая инвариантная кривая при прохождении параметром $\alpha$ бифуркационного значения $\alpha_0 = 0$.*

**Пример**

Ряд задач из биологии и экологии может быть сведен к анализу логистического отображения с задержкой

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - y_k); \quad y_{k+1} = x_k, \quad x_k > 0, \quad y_k > 0.$$

Отображение имеет неподвижную точку $(0, 0)$ для всех значений параметра $\alpha$. При $\alpha > 1$ возникает нетривиальная неподвижная точка с координатами

$$x = y = 1 - \alpha^{-1}.$$

Матрица Якоби, вычисленная в нетривиальной неподвижной точке, имеет вид

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы Якоби определяются выражением

$$\rho_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - \alpha}.$$

Если $\alpha > 5/4$, то мультипликаторы комплексные и $|\rho_{1,2}|^2 = \rho_1\rho_2 = \alpha - 1$ и $r(\alpha) = |\rho_{1,2}| = \sqrt{\alpha - 1}$.

Следовательно, в точке $\alpha = \alpha_0 = 2$ нетривиальная неподвижная точка теряет устойчивость, когда комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга.

Мультипликаторы в бифуркационной точке $\alpha = \alpha_0 = 2$ равны

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{j\sqrt{3}}{2} = \mathbf{e}^{\pm j\theta_0}.$$

Здесь

$$\theta_0 = \arctan\frac{\rho_j}{\rho_r} = \arctan\sqrt{3} = \pi/3.$$

Проверим условие невырожденности, учитывая, что $\theta_0 = \pi/3$

$$r(\alpha) = \sqrt{\alpha - 1}, \quad r'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha - 1}}, \quad r'(\alpha_0) = r'(2) = \frac{1}{2} \neq 0,$$
$$\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{3}} \neq 1, \quad \mathbf{e}^{j\frac{2\pi}{3}} \neq 1, \quad \mathbf{e}^{j\pi} \neq 1, \quad \mathbf{e}^{j\frac{4\pi}{3}} \neq 1.$$

Следовательно, в системе из неподвижной точки рождается замкнутая инвариантная кривая $T$.

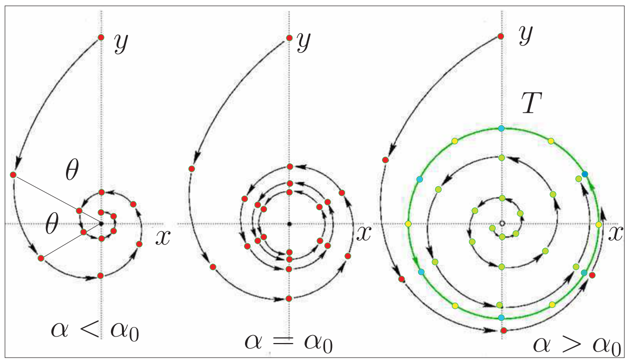



Рис. 6:

Движение на замкнутой инвариантной кривой определяется *числом вращения* $w$:

$$w = \frac{\theta}{2\pi} \mod 1.$$

Когда оно иррационально, замкнутая кривая всюду плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична. В случае, если $w$ — рациональное число:

$$w = \frac{p}{q},$$

где $p$, $q$ — целые числа, то говорят, что имеет место резонанс $p : q$, так как через $q$ итераций траектория замыкается на замкнутой инвариантной кривой.

**Задача. Выполните бифуркационный анализ отображения**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ by - cx + x^2 \end{pmatrix}.$$

**Бифуркационный анализ импульсных**

**Задача 3.2.1. Выполните анализ бифуркации Неймарка-Сакера в модели широтно-импульсной системы**

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda_1} \cdot (x_k - 1) + 2\mathrm{e}^{\lambda_1(1-z_k)} - 1; \quad y_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda_2} \cdot (y_k - 1) + 2\mathrm{e}^{\lambda_2(1-z_k)} - 1,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

где $z_k$ $(0 \leqslant z_k \leqslant 1)$:

$$z_k = \begin{cases} 0, & s_k^- < 0; \\ \dfrac{\alpha\Gamma}{2P}\varphi_k + \dfrac{1}{2}, & s_k^- \geqslant 0 \quad \text{and} \quad s_k^+ \leqslant 0; \\ 1, & s_k^+ > 0, \end{cases} \tag{24}$$

$$\varphi_k = \frac{q}{\Gamma} + x_k - \vartheta y_k, \quad s_k^- = \frac{q}{\Gamma} + x_k - \vartheta y_k + \frac{P}{\alpha\Gamma},$$
$$s_k^+ = \frac{q}{\Gamma} + x_k - \vartheta y_k - \frac{P}{\alpha\Gamma}.$$

Параметры модели уточнить у преподавателя.

### Задача 3.2.2. Исследование бифуркаций в негладких системах

Рассмотрите кусочно-гладкое отображение, описывающее поведение системы управления с широтно-импульсной модуляцией первого рода (ШИМ-1):

$$x_{k+1} = Q(x_k), \tag{25}$$
$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = a \cdot x - a + 1, & x < q - P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = a \cdot x, & x > q; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = a \cdot x - a + a^{1-z}, & q - P/\alpha \leqslant x \leqslant q, \end{cases}$$
$$z = \frac{q - x}{P}\alpha, \quad a = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad 0 < a < 1.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$, $P = 0.4$, $q = 0.8$, $\alpha > 0$.

Задание

**1.** Воспроизведите диаграммы, изображенные на рис. 7(а)–(г). Объясните бифуркационные переходы, изображенные на рис.7(а) с помощью итерационных диаграмм.

.

**2.** Рассчитайте итерационные диаграммы отображения (25) для значений коэффициента усиления $\alpha = 2.6$, $\alpha = 3.6$, $\alpha = 3.8$, $\alpha = 4.0$, $a = 4.5$, $\alpha = 5.0$, $\alpha = 6.0$ . Обсудите наблюдаемую динамику. Какой процесс (неподвижная точка, цикл, нерегулярные колебания) будет устанавливаться в каждом случае при прошествии достаточно большого времени?

**3.** Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость при: $\alpha = 2.6$, $\alpha = 3.6$, $\alpha = 3.8$, $\alpha = 4.0$, $a = 4.5$, $\alpha = 4.6$.

**4.** Выполните бифуркационный анализ кусочно-гладкого отображения

$$x_{k+1} = Q(x_k), \tag{26}$$
$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = a \cdot x - a + 1, & x < q - P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = a \cdot x + a - 1, & x > q + P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = a \cdot x - a + 2a^{1-z} - 1, & q - P/\alpha \leqslant x \leqslant q + P/\alpha, \end{cases}$$
$$z = \frac{q - x}{2P}\alpha + \frac{1}{2}, \quad a = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad 0 < a < 1.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$, $P = 0.4$, $q = 0.8$, $\alpha > 0$.

- (а) Рассчитайте бифуркационную диаграмму при $3.0 < \alpha < 6.0$ .
- (б) Найдите неподвижную точку методом уравнений периодов.
- (в) Исследуйте устойчивость неподвижной точки при вариации $\alpha$.
- (г) Определите тип бифуркации при потере устойчивости неподвижной точки.

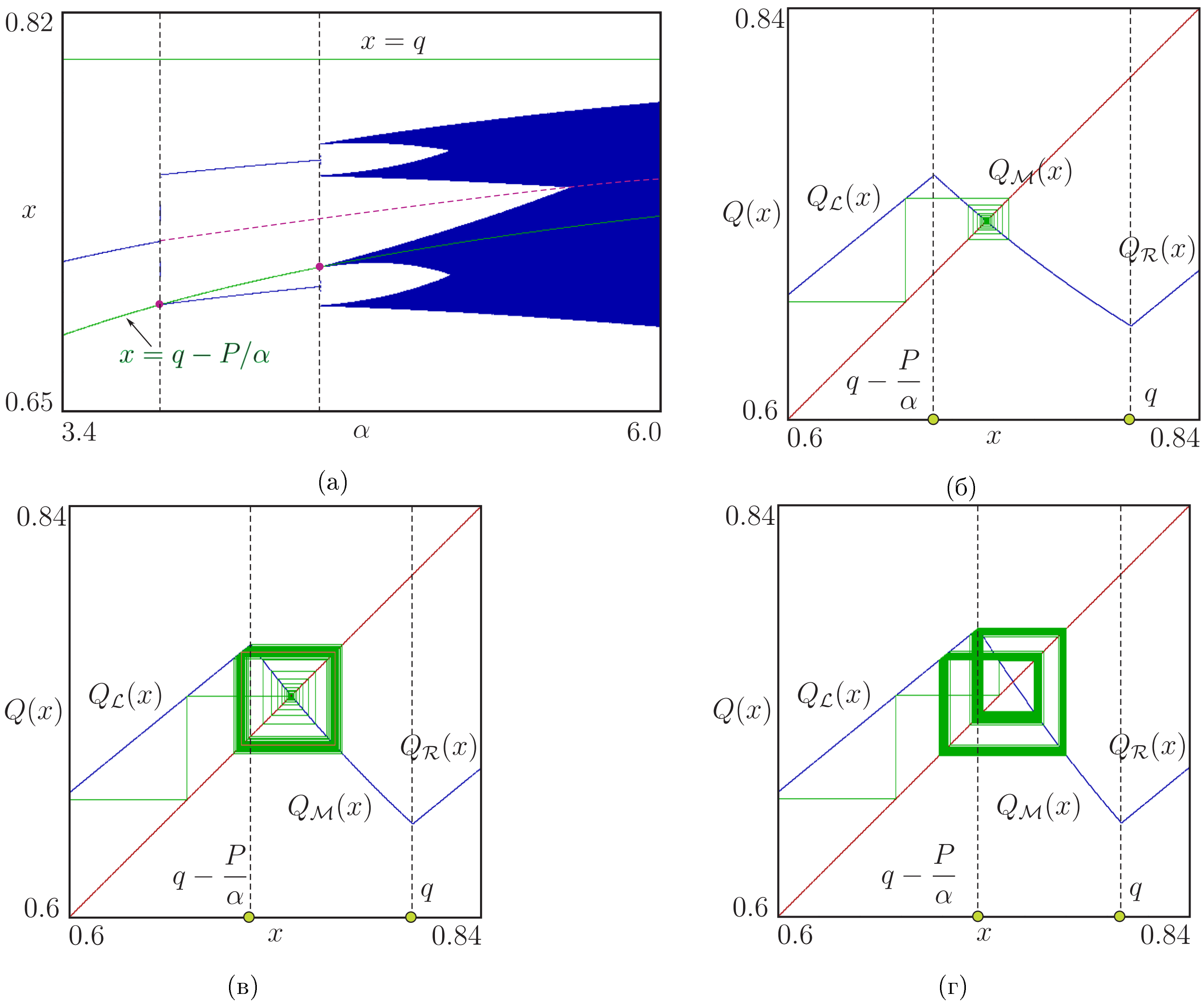



Рис. 7: (а) Бифуркационная диаграмма $3.4 < \alpha < 6.0$. (б) Итерационная диаграмма при коэффициенте усиления $\alpha = 3.5$. (в) Итерационная диаграмма при коэффициенте усиления $\alpha = 4.25$. (г) Итерационная диаграмма при $\alpha = 4.8$

# 2 КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

## 2.1 Вопросы к зачету

– 1. Что такое математическое моделирование?

– 2. Этапы математического моделирования.

– 3. Построение математической модели. Этапы построения математической модели. Понятие объекта, схемы замещения. Адекватность математической модели.

– 4. Пример построения математической модели.

– 5. Реализация математической модели. Содержание этапов реализации.

– 6. Автономные и неавтономные динамические модели с непрерывным временем.

– 7. Редукция к локальной форме автономных и неавтономных моделей.
– 8. Равновесные решения: состояния равновесия и периодические рашения. Нерегулярные решения (квазипериодические и хаотические).
– 9. Дискретные нелинейные модели. Понятие отображение Пуанкаре.
– 10. Построение отображения Пуанкаре методом Хенона.
– 11. Построение стробоскопического отображения Пуанкаре неватономных систем.
– 12. Автономные н неавтономные отображения.
– 13. Неавтономные математические модели с дискрентны временем.
– 14. Численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений.
– 15. Понятие аппрокимации и простейшие схемы численного решения:
  * Явный и неявный методы Эйлера.
  * Метод трапеций.
  * Методы Рунге-Кутта и разностные методы.
– 16. Устойчивость численных схем.
  * Устойчивость явного и неявного методов Эйлера.
  * Устойчивость метода трапеций.
– 17. Расчет состояний равновесия автономных диннамических математических моделей.
– 18. Алгоритмы численного поиска периодических решений автомонмых и неавтономных моделей.
– 19. Устойчивость и бифуркации состояний равновесия автономных векторных полей.
– 20. Устойчивость и бифуркации периодических решений динамических моделей с непрерывным временем.
– 21. Гладкие и негладкие дискретные модели.
– 22. Устойчивость и бифуркации неподвижных точек и периодических движений дискретных систем.
– 23. Седло-узловая бифуркация .
– 24. Вилообразная бифуркация .
– 25. Бифуркация удвоения периода.
– 24. Бифуркация Неймарка-Саккера.
– 25. Введение в теорию нелокальных бифуркаций.
– 26. Понятие о border-collision бифуркациях в кусочно-гладких дискретных моделях.
– 27. Локальные border-collision бифуркации.
– 28. Методы анализа border-collision бифуркаций.