13

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«___» ________ 2014 г.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1
для студентов технических специальностей

Курск 2014

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики

Н.А. Моргунова

Функции нескольких переменных: Индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2014. 15 с.

Содержит теоретические упражнения, практические индивидуальные задания и контрольные вопросы, а также примеры решения индивидуальных заданий. Работа предназначена для студентов очного отделения технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ___________. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Теоретические упражнения

1. Для функции двух и трёх переменных введите понятие графика функции, линии и поверхности уровня. Найдите поверхности уровня функций и изобразите их графически:

а) $u = 3x - 2y + 4z$;

б) $u = x^2 + y^2 + z^2$;

в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

2. Введите определение предела функции нескольких переменных. Вычислите:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to -\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

3. Сформулируйте свойства непрерывных функций двух переменных, заданных в замкнутой области. Одно из них докажите.

4. В чём заключается геометрический смысл частных производных функции двух переменных? Проиллюстрируйте.

5. Применение полного дифференциала к приближённым вычислениям. Вычислите с использованием данной теории $1{,}02^3 \cdot 0{,}97^2$.

6. Дана функция $u = \arcsin \dfrac{x}{y}$. Исследуйте её на непрерывность в области определения D, является ли она равномерно непрерывной в области D?

7. Выведите необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.

8. Выведите формулу производной сложной функции:

а) в случае одной независимой переменной;

б) в случае нескольких независимых переменных.

9. Введите понятие дифференциала функции многих переменных. Для функции двух переменных выведите формулу для вычисления дифференциала n-го порядка.

10. Сформулируйте теорему об инвариантности формы полного дифференциала.

11. Выведите формулу для вычисления производной функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением $F(x, y(x)) = 0$, через частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$.

12. Выведите формулы для вычисления частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции, заданной неявно $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$.

13. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

14. Сформулируйте теорему о смешанных частных производных. Рассмотрите случай производных 2-го порядка от функций 2 переменных.

15. Выведите формулу для нахождения производной по направлению от функций 2-х переменных.

16. Запишите формулу Тейлора для функций 2-х переменных.

17. Докажите необходимые условия экстремума функции 2-х переменных.

18. Опишите достаточные условия экстремума функции 2-х переменных.

19. Какие задачи называются задачами отыскания условного экстремума функции $z = f(x, y)$. Экстремум функции Лагранжа.

20. Найдите условные экстремумы функций:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

б) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2}$;

в) $z = 4x + 3y$ при $x^2 + y^2 = 4$.

21. Сформулируйте определение оператора Лапласа. Запишите уравнение теплопроводности в пространстве.

22. Рассмотрите частные случаи уравнения теплопроводности в пространстве: уравнение теплопроводности в стержне, уравнение теплопроводности на плоскости.

23.Сформулируйте определение гармонической функции $u(x, y, z)$. Приведите пример.

24. Докажите, что функция $z = f(x,y)$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$:

а) $z = \ln\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$;

б) $z = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

2. Практические задания

2.1 Задание 1

Найти область определения функции $z = f(x,y)$. Задания представлены в табл.2.1.

Таблица 2.1

№ пп	Функция	№ пп	Функция
1	2	3	4
1	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$	16	$z = \arcsin\frac{x}{y}$
2	$z = \arcsin(x+y)$	17	$z = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$
3	$z = \ln(-x+y)$	18	$z = \arccos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{25}$
4	$z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$	19	$z = \sqrt{x^2+y^2-1} - \lg(25-x^2-y^2)$
5	$z = \sqrt{25x^2 + 25y^2 - 49}$	20	$z = \sqrt{x^2+y^2-49}$
6	$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$	21	$z = \frac{1}{\log_5(81-x^2-y^2)}$
7	$z = \sqrt{x+y}$	22	$z = \sqrt{(x^2+y^2-25)(49-x^2-y^2)}$
8	$z = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	23	$z = \sqrt{1+y-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-y-x^2}}$
9	$z = \frac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$	24	$z = \frac{1}{\log_4(1-x^2-y^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-64}}$
10	$z = \sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}$	25	$z = \sqrt{36x^2-y^2-4}$
11	$z = \sqrt{xy}$	26	$z = \arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4
12	$z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(9-x^2-y^2\right)}$	27	$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
13	$z=\log_3\left(x^2+y^2-1\right)+\sqrt{16-x^2-y^2}$	28	$z=\dfrac{1}{\log_7\left(36-x^2-y^2\right)}$
14	$z=\arccos\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	29	$z=\ln(-y+x)$
15	$z=\sqrt{1+y-x^2}-\sqrt{1-y-x^2}$	30	$z=\sqrt{\left(x^2+y^2-4\right)\left(25-x^2-y^2\right)}$

2.2 Задание 2

Определить вид линии уровня функции. Задания представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ пп	Функция	№ пп	Функция
1	2	3	4
1	$z=e^{xy}$	16	$z=\dfrac{x}{y}$
2	$z=\ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	17	$z=x+y+3$
3	$z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$	18	$z=x^2+y^2+64$
4	$z=2x+y$	19	$z=x^2-y^2$
5	$z=x^2-y^2-25$	20	$z=\sqrt{xy}$
6	$z=(1+x+y)^2$	21	$z=\dfrac{x}{2y}$
7	$z=arctg\,\dfrac{y}{x}$	22	$z=\sqrt{\dfrac{x}{3y}}$
8	$z=e^{x^2-2x+y^2}$	23	$z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$
9	$z=\cos\left(\pi\cdot\left(\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}\right)\right)$	24	$z=\sqrt{7x-2y^2}$
10	$z=\sqrt{5x-y^2}$	25	$z=x^2-y^2-81$
11	$z=\arccos\dfrac{6y}{x}$	26	$z=\log_2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$
12	$z=5^{\sqrt{x^2-y^2}}$	27	$z=4x+y+1$

Продолжение таблицы 2.2

1	2	3	4
13	$z=\dfrac{7}{x^2+y^2}$	28	$z=3^{\sqrt{x^2-y^2}}$
14	$z=\sqrt{8x-y^2}$	29	$z=\arccos\dfrac{8y}{x}$
15	$z=5x+3y$	30	$z=\sin\left(\pi\cdot\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}\right)\right)$

2.3 Задание 3

Данные (f(x,y), x_0, y_0) к заданиям 2.3.1÷2.3.5 взять по своему номеру из табл. 2.3.

2.3.1 Для функции z = f(x,y) найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

2.3.2 Найти полный дифференциал функции z = f(x,y).

2.3.3 Найти градиент функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

2.3.4 Найти производную функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$ по направлению вектора (1; 2).

2.3.5 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Таблица 2.3

№ пп	Функция	x_0	y_0	№ пп	Функция	x_0	y_0
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$z=\ln\left(y^3-3e^x\right)$	0	3	16	$z=\sin\left(x^2-6y\right)$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\dfrac{\pi}{24}$
2	$z=\ln\left(xy-y\right)$	4	2	17	$z=\cos\left(x^2-y^3\right)$	0	$\dfrac{\sqrt{3\pi}}{3}$
3	$z=\arcsin\sqrt{x\cdot y}$	1	0,5	18	$z=e^{3x^2+y^2}$	5	4
4	$z=\arcsin x\cdot\cos 6y^2$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{6}$	19	$z=tg(3x)\cdot\cos\left(5y^2\right)$	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{\sqrt{10\pi}}{10}$

Продолжение таблицы 2.3

1	2	3	4	5	6	7	8
5	$z=e^{-2x}\cdot\sin 7y$	3	$\frac{\pi}{14}$	20	$z=tg\frac{y^2}{x}$	6	$\sqrt{5\pi}$
6	$z=\sqrt{2x^2+5y^4}$	2	–3	21	$z=tg\left(x^2y^5\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1
7	$z=e^{x^2-3y^2}$	–1	2	22	$z=arctg\sqrt{xy}$	–1	–1
8	$z=\cos\left(xy^3\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	1	23	$z=x^3\cdot 6^y\cdot\sin 3$	3	2
9	$z=\ln\left(x^2-2y^4\right)$	7	2	24	$z=\ln\left(x^3+4y\right)$	e	0
10	$z=arctg\left(x^3y\right)$	2	$\sqrt{3}$	25	$z=\ln\sqrt{x^3y}$	1	e^2
11	$z=\sin\sqrt{\frac{y}{x^5}}$	2	$\frac{8\pi^2}{9}$	26	$z=\arcsin x^3\cdot\sin 4y$	1	$\frac{\pi}{8}$
12	$z=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{xy}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	27	$z=e^{5x+3y^2-6}$	7	0
13	$z=5^{3x+4y}$	–3	5	28	$z=\arccos\sqrt{xy}$	3	0,5
14	$z=\cos 3x\cdot\sin 6y$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{36}$	29	$z=\cos\sqrt{\frac{x}{y^5}}$	$\frac{\pi^2}{16}$	1
15	$z=\log_3\left(y+xy^3\right)$	26	1	30	$z=\lg\left(3x+y^3\right)$	0	10

2.4 Задание 4

Для функции $z=N\cdot x^n+\left(N+8\right)\cdot y^m+\left(2N-3\right)\cdot x^{m+1}\cdot\ln y$ найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

где m – число гласных букв в фамилии,
n – число согласных букв в фамилии,
N – номер варианта по списку.

2.5 Задание 5

Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z=(3+P_3)\cdot\frac{1}{x}+(P_4+1)\cdot\frac{x}{y}+2\cdot P_5\cdot y,$$

где P_3, P_4, P_5 – остатки от деления Вашего номера на числа 3, 4, 5, соответственно.

3. Примеры решения задач

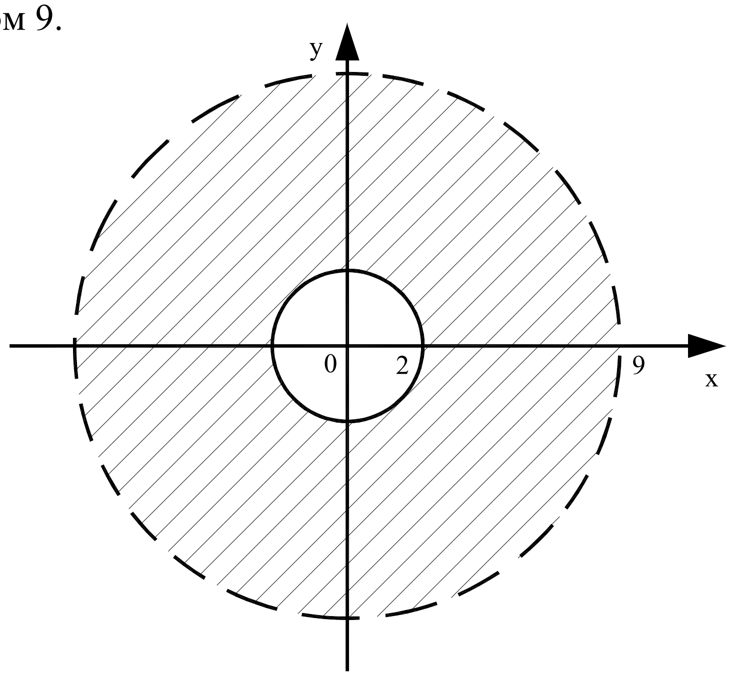
3.1 Решение задания 1

Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} - \lg\left(81 - x^2 - y^2\right)$.

<u>Решение:</u>

$$D(z): \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \ge 0, \\ 81 - x^2 - y^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ x^2 + y^2 < 81. \end{cases}$$

Первое неравенство системы представляет собой внешнюю область окружности с центром в точке (0;0) и радиусом 2, включая границу. Второе неравенство системы представляет собой круг без границы, с центром в точке (0;0) и радиусом 9.



3.2 Решение задания 2

Определить вид линии уровня функции $z = \ln\sqrt{xy}$.

<u>Решение:</u>

$$D(z): \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Линии уровня $z = C$ определяются уравнением $\ln\sqrt{xy} = C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} = e^C \ \Leftrightarrow xy = e^{2C} \Leftrightarrow y = \dfrac{e^{2C}}{x}$. Это гипербола, расположенная в первой и третьей координатных четвертях.

3.3 Решение задания 3

3.3.1 Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.2 Найти полный дифференциал функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.3 Найти градиент функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.4 Найти производную функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y =25 по направлению вектора (1; 2).

3.3.5 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

Решение:

3.3.1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x) = -\log_5 y \cdot \sin x \Big|_{(\frac{\pi}{6};25)} = -\log_5 25 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = -2 \cdot \dfrac{1}{2} = -1;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5}\Big|_{(\frac{\pi}{6};25)} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

3.3.2 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot dy = -1 \cdot dx + \dfrac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot dy.$

3.3.3 $gradz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \vec{j} = -1 \cdot \vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot \vec{j}.$

3.3.4 $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \cos\beta;$

$$\cos\alpha = \frac{x_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\beta = \frac{y_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{15}}{250 \cdot \ln 5}.$$

3.3.5 Уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$(x - x_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;\, y_0)} + (y - y_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;\, y_0)} = z - z_0.$$

Вычислим предварительно z_0, подставив координаты $(x_0; y_0)$ в формулу функции.

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \log_5 25 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}.$$

То есть, имеем $\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot (-1) + (y - 25) \cdot \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} = z - \sqrt{3};$

$$-x + \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot y - z - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \ln 5} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

$$\frac{x - \frac{\pi}{6}}{-1} = \frac{y - 25}{\frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}} = \frac{z - \sqrt{3}}{-1};$$

$$\frac{6x - \pi}{-6} = \frac{50 \cdot \ln 5 \cdot (y - 25)}{\sqrt{3}} = \frac{z - \sqrt{3}}{-1}.$$

3.4 Решение задания 4

Для функции $z = 42 \cdot x^5 + 50 \cdot y^3 + 81 \cdot x^4 \cdot \ln y$ найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 210 \cdot x^4 + 324 \cdot x^3 \cdot \ln y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 150 \cdot y^2 + \frac{81 \cdot x^4}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(210 \cdot x^4 + 324 \cdot x^3 \cdot \ln y\right)'_x = 840 \cdot x^3 + 972 \cdot x^2 \cdot \ln y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(150 \cdot y^2 + \frac{81 \cdot x^4}{y}\right)'_y = 300 \cdot y - \frac{81 \cdot x^4}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(210 \cdot x^4 + 324 \cdot x^3 \cdot \ln y\right)'_y = \frac{324 \cdot x^3}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(150 \cdot y^2 + \frac{81 \cdot x^4}{y}\right)'_x = \frac{324 \cdot x^3}{y}.$$

3.5 Решение задания 5

Пусть $N = 42$, тогда $P_3 = 0$, $P_4 = 2$, $P_5 = 2$. Тогда заданная в условии функция примет вид: $z = \frac{3}{x} + \frac{3x}{y} + 4y$. Исследуем её на локальный экстремум.

Решение:

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x}{y^2} + 4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{y^2}$. Найдём критические точки, решая систему

$$\begin{cases} -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{y} = 0, \\ 4 - \frac{3x}{y^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} = 0, \\ 4 - \frac{3x}{y^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}, \\ 4 - \frac{3}{x^3} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}825, \\ x = 0{,}909. \end{cases}$$

Исследуем функцию $z(x, y)$ на экстремум в точке $(0{,}909; 0{,}825)$, применяя достаточный признак. Найдём значения вторых производных в этой точке.

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0{,}909;0{,}825)} = \frac{6}{0{,}909^3} = 7{,}988;$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0{,}909;0{,}825)} = -\frac{3}{0{,}825^2} = -4{,}408;$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0{,}909;0{,}825)} = \frac{6 \cdot 0{,}909}{0{,}825^3} = 9{,}713.$$

Дискриминант $D = A \cdot C - B^2 = 7{,}988 \cdot 9{,}713 - (-4{,}408)^2 = 58{,}157$. Так как $D > 0$, $A > 0$, то в точке $(0{,}909;0{,}825)$ имеется локальный минимум $z_{\min} = \frac{3}{0{,}909} + \frac{3 \cdot 0{,}909}{0{,}825} + 4 \cdot 0{,}825 = 9{,}906$.

4. Контрольные вопросы

1. Что называется функцией нескольких переменных?
2. Что называется областью определения функции двух переменных?
3. Что называется областью изменений или множеством значений функции двух переменных?
4. Что такое частная производная?
5. Что называется линией уровня функции $z = f(x, y)$?
6. Что называется поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$?
7. Что понимается под d-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$?
8. Что называется двойным пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$?
9. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$?
10. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной на множестве точек E?
11. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
12. Как формулируется теорема о смешанных производных?
13. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
14. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.
15. Сформулируйте достаточный признак дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
16. Что называется линеаризацией функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$?
17. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
18. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?
19. Что называется производной по направлению вектора для функции двух переменных? для функции трех переменных?

20. Запишите формулу Тейлора для функции двух переменных.
21. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
22. Что называется условным экстремумом функции двух переменных $z = f(x, y)$?

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007.416с.
2. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011.-608с.
3. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.2 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. - М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2009.432с.