

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 17.12.2021 09:42:31

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1011e9bb75e943df4a4851fda56dd89

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 4 » 03 2019 г.



АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

Методические указания к лабораторной работе №4
по дисциплине «Вычислительная математика»
направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная
техника» и 09.03.04 «Программная инженерия»

Курск 2019

УДК 519.6

Составители Е.П. Кочура, В.М. Буторин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии И.Н. Ефремова

Аппроксимация производных конечными разностями: методические указания к лабораторной работе №4 по дисциплине «Вычислительная математика» для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.П. Кочура, В.М. Буторин. Курск, 2019. 12 с.

Содержит краткие теоретические сведения по теме лабораторной работы, цель выполнения работы, задание, пример выполнения лабораторной работы, требования к составлению отчета, список контрольных вопросов, таблицу индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.04 «Программная инженерия».

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 4.03.19. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 180.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет
305040, Курск, ул.50 лет Октября, 94.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

I. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Изучение основных определений и положений теории численного дифференцирования.
2. Изучение основных методов аппроксимации производных с помощью конечно-разностных соотношений.
3. Численное дифференцирование на ЭВМ с помощью разностей сложных функций и функций, заданных таблицей.

II. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Аппроксимация производных конечными разностями. Производной функции $y=f(x)$ называется предел:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2.1)$$

Для приближенного вычисления производной используется формула:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (2.2)$$

где Δx - некоторое конечное число.

Разностные соотношения, в которых **разность** между любыми значениями аргумента является **конечной** величиной, называются **конечными разностями**. Поэтому соотношение (2.2) также называют аппроксимацией производной с помощью конечных разностей.

Пусть известны значения функции $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$, вычисленные или заданные таблицей в точках $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. **Точки** $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ называются **узлами**, а разность между соседними значениями аргумента называется шагом $h_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$. Весь **набор узлов** называется **сеткой**. Если величина шага между узлами постоянна, то говорят, что узлы $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ образуют равномерную сеткой с шагом h .

Для вычисления производной y'_i в точке точки x_i по формуле (2.2) можно использовать левую разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad (2.3)$$

правую разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad (2.4)$$

центральную разность:

$$y'_i \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h}. \quad (2.5)$$

2. Погрешность численного дифференцирования. При численном дифференцировании с использованием приближенной формулы (2.2), например, по формулам (2.3-2.5), естественно возникает погрешность: $R(x,h)=y'(x)-y'_h(x)$, где $y'(x)$ - точное значение производной, $y'_h(x)$ - значение производной вычисленное по приближенной формуле при шаге h .

Величина погрешности зависит от точки x , в которой вычисляется производная, и от шага h , чем меньше шаг, тем естественно погрешность меньше. Обычно погрешность $R(x,h)$ записывают одним из способов:

$$R(x, h) = \psi(x, h) \cdot h^k = O(h^k) = \varphi(x) \cdot h^k + O(h^{k+1}). \quad (2.6)$$

где, $\varphi(x) \cdot h^k$ - называется главной частью погрешности аппроксимации, т.к. в формуле (2.6) это слагаемое при $h \ll 1$ будет гораздо больше второго, а величина k называется порядком погрешности или порядком точности аппроксимации относительно шага h .

С помощью разложения в ряд Тейлора получены следующие оценки погрешности для формул (2.3-2.5):

$$\begin{aligned} y'_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), && \text{левая разность;} \\ y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), && \text{правая разность;} \\ y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \cdot h} + O(h^2), && \text{центральная разность.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из этих формул следует, что центральная разность имеет самый высокий порядок точности, а именно, второй порядок по h .

3. Аппроксимирующие формулы для любого порядка точности.

Аппроксимацию производных конечными разностями в общем случае можно рассматривать как замену производной от функции $y'=f'(x)$ производной от аппроксимирующей функции $\varphi'(x)$, $\varphi(x) \approx f(x)$, где в качестве аппроксимирующей функции используется интерполяционный

многочлен: $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$, $\varphi'(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$. Поэтому увеличивая

степень интерполяционного многочлена n мы будем увеличивать порядок точности аппроксимации производной.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при равномерном распределении узлов были получены следующие формулы для

аппроксимации производной с помощью центральных разностей второго и четвертого порядка точности:

$$y'_i = \frac{1}{2 \cdot h}(y_{i+1} - y_{i-1}) - y^{(3)}(\xi) \cdot \frac{h^2}{6}, \quad (2.8)$$

$$y'_i = \frac{1}{12 \cdot h}(y_{i-2} - 8 \cdot y_{i+1} + 8 \cdot y_{i-1} - y_{i-2}) + y^{(5)}(\xi) \cdot \frac{h^4}{30},$$

где, $y^{(k)}(\xi)$ - значение “к”-той производной в некоторой точке на отрезке $[x_{i-2}, x_{i+2}]$.

В крайних точках таблицы или в крайних узлах нельзя использовать соотношения для центральных разностей (2.8). В этих точках используются односторонние формулы численного дифференцирования:

$$y'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + 0(h^2), \quad (2.9)$$

$$y'(x_n) = \frac{1}{2 \cdot h}(3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}) + 0(h^2).$$

4. Выбор оптимального шага при численном дифференцировании.

Полная погрешность численного дифференцирования определяется не только погрешностью используемой формулы численного дифференцирования, но и погрешность возникающей при вычислениях по этим формулам. Например, при вычисления по первой формуле (2.8) абсолютная предельная погрешность будет равна

$$\bar{\Delta}(y') = \bar{\Delta}\left[\frac{1}{2 \cdot h}(y_{i+1} - y_{i-1})\right] = \frac{1}{2 \cdot h}(\bar{\Delta}y_{i+1} + \bar{\Delta}y_{i-1}) \leq \frac{\bar{\Delta}y}{h}, \quad (2.10)$$

$$\bar{\Delta}y_{i+1} \leq \bar{\Delta}y, \quad \bar{\Delta}y_{i-1} \leq \bar{\Delta}y;$$

где $\bar{\Delta}y$ - абсолютная предельная погрешность вычислений значений функции y из-за ошибок округления.

Так как величина $\bar{\Delta}y$ в формуле (2.10) является абсолютной предельной погрешностью входных данных, а $\bar{\Delta}(y')$ - абсолютной предельной погрешностью результата, то согласно определения абсолютного числа обусловленности δ_{Δ} для задачи численного дифференцирования из (2.10) имеем:

$$\delta_{\Delta} = \bar{\Delta}(y') / \bar{\Delta}y = 1/h,$$

т.е. задача плохо обусловлена, т.к. при $h \rightarrow 0$ число обусловленности стремится к бесконечности.

Полная абсолютная погрешность вычисления производной $R(y'_i)$ будет равна сумме погрешности (2.10) и погрешности формулы (2.8):

$$R(y'_i) = \frac{\bar{\Delta}(y)}{h} + |y^{(3)}(\xi)| \frac{h^2}{6}. \quad (2.11)$$

Первое слагаемое (погрешность вычислений) при уменьшении шага увеличивается, а второе слагаемое (погрешность самой формулы) уменьшается. Естественно будет такой шаг при котором полная погрешность будет минимальной., такой шаг называется оптимальным, **Оптимальный шаг** $h_{\text{опт}}$ определяется из условия минимума полной погрешности $R(y'_i)$, т.е. из решения уравнения $R'_h(y'_i)=0$, где значок h - говорит о том , что производная берется по h . Например, для формулы центральных разностей (2.8) из соотношения (2.11) имеем:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3 \cdot \bar{\Delta}(y)}{|y^{(3)}(\xi)|}}. \quad (2.12)$$

Естественно для каждой формулы численного дифференцирования будет своя формула для вычисления оптимального шага.

Если величина абсолютной предельной погрешности вычислений значений y определяется погрешностью округления (машинным эpsilon) $\bar{\Delta}(y)=\varepsilon_\mu |y|$, то можем записать:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{3 \cdot \varepsilon_\mu |y|}{|y^{(3)}(\xi)|}}. \quad (2.13)$$

Обычно на практике полагают, что $\frac{|y|}{|y^{(k)}(\xi)|} \approx 1$.

5. Улучшение аппроксимации с помощью метода Рунге -Ромберга.

Пусть $y'(x)$ - точное значение производной, а $y'_h(x)$ -значение производной, вычисляемое по формуле численного дифференцирования, имеющей порядок точности k относительно шага h . Следовательно можем записать:

$$y'(x) = y'_h(x) + \varphi(x) \cdot h^k + 0(h^{k+1}). \quad (2.14)$$

Запишем это же соотношение для шага $h_1=ph$:

$$y'(x) = y'_{ph}(x) + \varphi(x) \cdot (p \cdot h)^k + 0((ph)^{k+1}). \quad (2.15)$$

Вычитая из (2.15) соотношение (2.14) имеем

$$\varphi(x) \cdot h^k = \frac{y'_h(x) - y'_{ph}(x)}{p^k - 1} + 0(h^{k+1}). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.14) получаем

$$y'(x) = y'_h(x) + \frac{y'_h(x) - y'_{ph}(x)}{p^k - 1} + O(h^{k+1}). \quad (2.17)$$

Формула (2.17) позволяет по результатам двух расчетов производной с шагом h и шагом ph по одной и той же формуле, имеющей порядок точности k , найти ее уточненное значение с порядком точности $k+1$. Данный прием называется методом Рунге-Ромберга.

III. ЗАДАНИЕ

1. Написать формулу для вычисления с помощью центральных разностей 2-го порядка точности производную от функции, заданной дискретно, из таблицы заданий.

Оценить $h_{\text{опт}}$, полагая, что $|y|/|y^{(n)}| \approx 1$, а $\varepsilon_{\mu} = 10^{-10}$. Улучшить аппроксимацию в заданных узлах с помощью метода Рунге-Ромберга.

3. Написать программу и рассчитать на ЭВМ производную этой функции в заданных узлах.

IV. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вычислить с помощью центральных разностей второго порядка точности производную от функции, заданной дискретно:

i	0	1	2	3	4	5
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	3	5	6	3	-1	-2

Уточнить производную в центральных узлах $i=2,3$.

Порядок выполнения работы

1. Для аппроксимации производной в узлах $i=2,3$ применяем формулу центральных разностей (2.8) второго порядка точности с шагом $h=0.1$:

$$y'_{i,h} = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}), \quad i = 2,3. \quad (4.1)$$

Для аппроксимации производной в узлах $i=0,1$ и $i=4,5$ применяем формулы (2.9) для крайних узлов таблицы:

$$y'_{0,h} = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2),$$

$$y'_{1,h} = \frac{1}{2h}(-3y_1 + 4y_2 - y_3),$$

$$y'_{4,h} = \frac{1}{2h}(3y_4 - 4y_3 + y_2),$$

$$y'_{5,h} = \frac{1}{2h}(3y_5 - 4y_4 + y_3).$$

(4.2)

2. Оцениваем величину $h_{\text{опт}}$. Согласно (2.13) с учетом, что $|y|/|y^{(n)}| \approx 1$ и $\varepsilon_{\mu} = 10^{-10}$ имеем $h_{\text{опт}} \sim 10^{-3}$. Согласно таблицы $h > h_{\text{опт}}$, поэтому для уточнения значений производной в узлах 2 и 3 можно применять метод Рунге-Ромберга.

3. Положим $p=2$, т.к. при $p>2$ мы выйдем за пределы таблицы. Для $p=2$ определяем шаг: $h_1=2h$.

Для узлов 0,1 и 4,5 при шаге $h_1=2h$ нужно пользоваться формулами (4.2)

$$y'_{0,h} = \frac{1}{4h}(-3y_0 + 4y_2 - y_4), \quad y'_{1,2h} = \frac{1}{4h}(-3y_1 + 4y_3 - y_5),$$

$$y'_{4,2h} = \frac{1}{4h}(3y_4 - 4y_2 + y_0), \quad y'_{5,2h} = \frac{1}{2h}(3y_5 - 4y_3 + y_1).$$

Для узлов $i=2,3$ формула (4.1) запишется в виде:

$$y'_{i,2h} = \frac{1}{4h}(y_{i+2} - y_{i-2}), \quad i = 2,3. \quad (4.3)$$

Так как формула (4.1) второго порядка точности, то $k=2$. Подставляем (4.1) и (4.3) в формулу (2.17) получаем окончательную формулу:

$$\bar{y}'_i = y'_{i,h} + \frac{y'_{i,h} - y'_{i,2h}}{2^2 - 1}, \quad i = 2,3; \quad (4.4)$$

где $\bar{y}'_{i,h}$ - уточненное значение производной.

4. Примеры программ на Mathcad и на Delphy (в консольном режиме) для вычисления производной для функции заданной дискретным образом имеет следующий вид:

$$x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h := x_1 - x_0$$

$$yh(x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2 \cdot h}\right) \cdot (-3 y_0 + 4 \cdot y_1 - y_2) \\ \left(\frac{1}{2 \cdot h}\right) \cdot (-3 y_1 + 4 \cdot y_2 - y_3) \\ \frac{y_3 - y_1}{2 \cdot h} \\ \frac{y_4 - y_2}{2 \cdot h} \\ \left(\frac{1}{2 \cdot h}\right) \cdot [(3 y_4 - 4 \cdot y_3) + y_2] \\ \left(\frac{1}{2 \cdot h}\right) \cdot [(3 y_5 - 4 \cdot y_4) + y_3] \end{bmatrix} \quad yh2(x) := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4 \cdot h}\right) \cdot (-3 y_0 + 4 \cdot y_2 - y_4) \\ \left(\frac{1}{4 \cdot h}\right) \cdot (-3 y_1 + 4 \cdot y_3 - y_5) \\ \frac{y_4 - y_0}{4 \cdot h} \\ \frac{y_5 - y_1}{4 \cdot h} \\ \left(\frac{1}{4 \cdot h}\right) \cdot [(3 y_4 - 4 \cdot y_2) + y_0] \\ \left(\frac{1}{4 \cdot h}\right) \cdot [(3 y_5 - 4 \cdot y_3) + y_1] \end{bmatrix}$$

$$yhh(x) := yh(x) + \frac{yh(x) - yh2(x)}{2^2 - 1}$$

$$yh(x) = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ -10 \\ -35 \\ -45 \\ 5 \end{pmatrix} \quad yh2(x) = \begin{pmatrix} 40 \\ -2.5 \\ -10 \\ -17.5 \\ -60 \\ -32.5 \end{pmatrix} \quad yhh(x) = \begin{pmatrix} 20 \\ 40.833 \\ -10 \\ -40.833 \\ -40 \\ 17.5 \end{pmatrix}$$

program lab4;

{Вычисление производных для дискретной функции.}

{y[i]- функция, x[i] - аргумент}

{yh[i] производная в узлах x_i ($i=0, \dots, 5$), yt-уточненное значение}

var h,yt : real;

var x,y,yh : array[0..5] of real;

var i,k : integer;

begin

```

writeln('Введите шесть значений величины x');
  readln (x[0],x[1],x[2],x[3],x[4],x[5]);
writeln('Введите шесть значений величины y');
  readln (y[0],y[1],y[2],y[3],y[4],y[5]);
writeln('Введите значение номер узла, где производится
уточнение производной');
  readln (k);
  h:=x[1]-x[0];
  for i:=0 to 5 do begin
    if (i>0) and (i<5) then yh[i]:= (y[i+1]-y[i-1])/(2*h) (4.1)
    else begin
      if i=0 then yh[0]:= (-3*y[0]+4*y[1]-y[2])/(2*h); (4.2)
      if i=5 then yh[5]:= (3*y[5]-4*y[4]+y[3])/(2*h); (4.2)
    end;
  end;
  yt:=(y[k+2]-y[k-2])/(4*h); (4.3)
  yt:=yh[k]+(yh[k]-yt)/(2*2-1); (4.4)
writeln('Значения производных в шести заданных узлах');
writeln('yh[0]=',yh[0], 'yh[1]=',yh[1], 'yh[2]=',yh[2],
'yh[3]=',yh[3], 'yh[4]=',yh[4], 'yh[5]=',yh[5]);
writeln('Уточненное значение производной в узле с номером k');
writeln('yh[k]=',yt);
end.

```

6. Заполняем таблицу

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_{h_i}	25	30	-10	-35	-45	5
y_{h2_i}	40	-2.5	-10	-17.5	-60	-32.5
y_{hh_i}	20	40.833	-10	40.833	-40	17.5

V. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Название лабораторной работы.
 2. Индивидуальное задание.
 3. Теоретическая часть.
 4. Ответы на контрольные вопросы.
 5. Текст программы.
 6. Результаты расчета.
- Пункты 1-5 должны быть оформлены до начала лабораторной работы.

VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определение конечной разности.
2. Что такое правая, левая, центральная разность?
3. Определение узла и сетки.
4. Определение погрешности аппроксимации производной.
5. Что такое порядок точности (погрешности)?
6. Порядок точности правой, левой и центральной разности.
7. Метод Рунге-Ромберга.
8. Определение главной части погрешности аппроксимации.
9. Определение конечной разности для функции двух переменных.
10. Абсолютное число обусловленности численного дифференцирования.
11. Оптимальный шаг при численном дифференцировании.

VII. ТАБЛИЦА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В последней колонке число k указывает номер узла, в котором необходимо улучшить точность аппроксимации производной.

№	x y	Табличные значения $f(x)$						k
		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	
1.	x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0
	y	0.03	0.04	0.03	0.01	0.0	-0.1	
2.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	5
	y	-0.5	-0.2	0	0.1	0.05	0	
3.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	2
	y	0.7	0.5	0.7	0.8	0.9	0.12	
4.	x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	3
	y	-0.6	-0.5	-0.3	0	0.4	1	
5.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	1
	y	0.8	0.5	0.4	0.5	0.6	0.9	
6.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	4
	y	0.0	0.1	0.0	-0.1	-0.2	0.0	
7.	x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0
	y	-0.03	-0.04	-0.03	-0.01	-0.01	-0.1	
8.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	5
	y	0.3	0.2	0	-0.1	-0.05	0	

№	x y	Табличные значения f(x)						k
		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	
9.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	2
	y	-0.7	-0.5	-0.7	-0.8	-0.9	-0.12	
10.	x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	3
	y	0.6	0.5	0.3	0	-0.4	-1	
11.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	1
	y	-0.8	-0.5	-0.4	-0.5	-0.6	-0.9	
12.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	4
	y	0.0	-0.1	0.0	0.1	0.2	0	
13.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	2
	y	0.2	0.3	0.5	0.5	0.2	-0.2	
14.	x	0.15	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	1
	y	-0.2	-0.4	-0.6	-0.5	-0.45	-0.44	
15.	x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	3
	y	0.0	1	0.0	-1	0.0	1	
16.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	4
	y	0.3	-0.1	0.5	0.1	0.2	0.4	
17.	x	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0
	y	-0.13	0.04	-0.13	0.01	-0.21	-0.01	
18.	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	5
	y	-0.3	0.25	0.2	-0.2	-0.05	0.3	
19.	x	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	2
	y	0.7	0.5	-0.75	0.8	0.9	0.12	
20.	x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	3
	y	-0.6	-0.5	-0.2	0.1	0.4	1.5	