МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
« ____ » ______________ 2020 г.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория принятия решений»
для студентов направления 09.03.01
Информатика и вычислительная техника профиль
«Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Курск 2020 г.

УДК 519.81
Составители: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова

Рецензент
Зав. кафедрой комплексной защиты информационных систем, доктор физико-математических наук
В.П. Добрица

Принятие решений в условиях конфликта: методические указания к практическим занятиям по дисциплине „Теория принятия решений“/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова. Курск, 2020. 14 с.: табл. 5. Библиограф.: с. 14.

Приведены основные понятия теории стратегических игр. Рассмотрены методы решения матричных игр в чистых и смешанных стратегиях.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебнометодическим объединением по направлению Информатика и вычислительная техника.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника профиль „Вычислительные машины, комплексы, системы и сети“ очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель

Научиться идентифицировать и представлять конфликтную ситуацию. Освоить методы решения игр в чистых и смешанных стратегиях.

2. Стратегические игры

2.1. Математическая формулировка задачи принятия решений в условиях поведенческой неопределенности

Во многих областях человеческой деятельности приходится рассматривать проблему принятия решений в условиях неопределенности особого рода, когда имеется активная внешняя среда и конфликтная ситуация. Под конфликтной ситуацией понимается такая ситуация, в которой сталкиваются интересы двух и более сторон, преследующих разные цели. Причем результат любого действия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберут другие стороны. Поскольку в конфликтных ситуациях каждая сторона, как правило, не располагает достаточными сведениями о том, что задумала другая сторона, решение принимается в условиях неопределенности.

Исследованием методов принятия решений в конфликтных ситуациях занимается теория игр с выигрышами. Теория игр — это теория математического моделирования конфликтных ситуаций. Формализация конфликтных ситуаций заключается в том, что действия сторон считаются подчиненными определенным правилам, которые называются правилами игры. Эти правила предопределяют возможные альтернативы действий, которые называются стратегиями сторон.

Рассмотрим игры, в которых участвуют два игрока. Принцип оптимальности поведения игроков основывается на равновесной ситуации, нарушение которой не выгодно ни одному из игроков. Если равновесная ситуация соответствует только одной стратегии каждого из игроков, то такая ситуация называется седловой точкой, соответствующие ей оптимальные стратегии игроков — чистыми, а выигрыши игроков — ценой игры.

Постановка задачи выбора решения в антагонистической игре может быть представлена следующим логическим высказыванием

$$\langle B, X, F, K, X^* \in X \rangle, \tag{1}$$

где B – множество стратегий активной внешней среды;
X – множество стратегий игрока;
F – критерий оптимальности;
K – количественный скалярный показатель, характеризующий качество стратегий;
X^* – оптимальная (наиболее предпочтительная) стратегия, выделенная в результате анализа.

Логическое высказывание (1) означает, что с учетом стратегий B активной внешней среды из множества стратегий игрока A — X по показателям привлекательности K и критерию оптимальности F выделяется оптимальная стратегия X^*.

Применение одного из методов решения игры и использование критериев оптимальности позволяет выделять оптимальные стратегии. Критерии оптимальности основываются на использовании принципа максимина для своей стороны и принципа минимакса — для противодействующей.

Стратегические игры, в которых суммарный выигрыш всех игроков равен нулю, называются играми с нулевой суммой. Игра двух игроков с нулевой суммой относится к классу антагонистических. В таких играх выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Если игроки применяют в своих действиях одну из конечного набора стратегий, то игра относится к классу игр с чистыми стратегиями. Если игроки применяют более одной стратегии с определенными вероятностями, то игра рассматривается как игра в смешанных стратегиях. Игра двух игроков с нулевой суммой, которая представляется в виде платежной матрицы называется матричной игрой.

2.2. Представление задачи

Матричная игра описывается матрицей, которая называется платежной матрицей (или матрицей выигрышей). В платежной матрице строки соответствуют стратегиям первого игрока, который обычно обозначается как игрок A. Столбцы платежной матрицы определяют стратегии второго игрока, который обычно позиционируется как игрок B. Платежная матрица представляется в виде таблицы (таблица 1.

Таблица 1 – Платежная матрица (матрица выигрышей)

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				
X	b_1	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_m
x_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1m}
$\ldots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{im}
$\ldots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	a_{n1}	$\cdots$	a_{nj}	$\cdots$	a_{nm}

Здесь $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество стратегий игрока A, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — множество стратегий игрока B, $\{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{nm}\}$ — множество выигрышей игрока A.

Матрица интерпретируется следующим образом. Если игрок A выбрал стратегию x_i, а игрок B применяет стратегию b_j, то выигрыш игрока A составит a_{ij}; выигрыш игрока A соответствует проигрышу игрока B.

3. Решение стратегических игр

3.1. Решение игр в чистых стратегиях

Пусть игрок A применяет свою первую стратегию x_1. Тогда независимо от того, какую стратегию использует игрок B для игрока A гарантируется минимальный выигрыш $\alpha_1 = \min\limits_{j=\overline{1,m}} a_{1j}$. Аналогичные рассуждения справедливы для стратегий $x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$: $\alpha_2 = \min\limits_{j=\overline{1,m}} a_{2j}, \ldots, \alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,m}} a_{ij}, \ldots, \alpha_n = \min\limits_{j=\overline{1,m}} a_{nj}$.

Очевидно, что минимальный гарантированный выигрыш игрока A представляет собой максимальное из значений $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, т.е. $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_i = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\limits_{j=\overline{1,m}} a_{ij}$. Величина α называется нижней ценой игры, а стратегия x_l, обеспечивающая выигрыш α, называется максиминной стратегией. Таким образом, если игрок A будет придерживаться стратегии x_l, то его выигрыш будет не меньше величины α.

Игрок B за счет выбора оптимальной стратегии должен стремиться к максимальному уменьшению своего проигрыша. В частности, если игрок B применяет стратегию b_1, то его максимальный проигрыш $\beta_1 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_{i1}$. Аналогичные рассуждения справедливы для стратегий $b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m$: $\beta_2 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_{i2}, \ldots, \beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_{ij}, \ldots, \beta_m = \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_{im}$.

Очевидно, что игрок B стремится минимизировать максимально возможный проигрыш. Величина $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \beta_j = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \max\limits_{i=\overline{1,n}} a_{ij}$ называется верхней ценой игры, а стратегия b_q, соответствующая выигрышу β, называется минимаксной стратегией. Таким образом, применяя соответственно максиминную стратегию, игрок A обеспечивает себе гарантированный выигрыш в размере α, а игрок B, используя минимаксную стратегию, уменьшает свой максимальный проигрыш до величины β.

Совокупность стратегий x_l и b_q, соответствующих седловой точке, составляет решение игры. Для игроков выгодно придерживаться оптимальных стратегий x_l и b_q. В том случае, если игрок B откажется от оптимальной стратегии b_q, то его проигрыш увеличивается. Аналогично в случае отказа игроком A от оптимальной стратегии x_l его выигрыш уменьшается.

Существует класс стратегических игр, для которых нижняя цена и верхняя цена равны между собой. Такие игры относятся к играм с седловой точкой. Седловая точка — это элемент матрицы $\|a_{ij}\|$, который одновременно является минимальным в строке и максимальным в столбце. Величина v, определяемая как $v = \alpha = \beta$, называется чистой ценой игры.

3.2. Решение стратегических игр в смешанных стратегиях

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его стратегий. Пусть для игрока A определены n стратегий $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ и полный набор вероятностей их использования $P = (p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$: p_i — вероятность применения x_i-й стратегии, $i = \overline{1, n}$. Для этих вероятностей справедливо: $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Аналогично для игрока B позиционированы m стратегий $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m$ и соответствующие вероятности их использования $Q = (q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_m)$, где q_j — вероятность применения стратегии b_j, $j = \overline{1, m}$. Для вероятностей справедливы следующие условия $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} q_j = 1$. Решение игры в чистых стратегиях является частным случаем игры в смешанных стратегиях: $P = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$; $Q = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

Стратегия называется активной, если вероятность ее применения не равна нулю. На первом шаге решения проверяется наличие седловой точки. При выполнении условия производится поиск решения в чистых стратегиях. Предположим, что игра не имеет седловой точки. Тогда следующий шаг предназначен для упрощения игры и состоит в уменьшении количества возможных стратегий.

Если элементы k-й строки платежной матрицы больше либо равны элементам s-й строки и среди элементов k-й строки имеется один или более элементов, которые строго больше элементов s-й строки, т.е. $a_{kj} \geq a_{sj}$, $j = \overline{1, m}$, то для игрока A стратегия x_k лучше стратегии x_s, и, следовательно, стратегия x_s может быть исключена (вычеркнута) из платежной матрицы.

Для игрока B если $a_{ir} \leq a_{iz}$, $i = \overline{1, n}$, то стратегия b_r обеспечивает меньший проигрыш по сравнению со стратегией b_z, и, следовательно, стратегию b_z целесообразно исключить из рассмотрения.

Кроме того, если имеются дублирующие стратегии x_k и x_z, для которых справедливо $a_{kj} = a_{zj}$, $j = \overline{1, m}$ или b_r и b_z, для которых выполняется $a_{ir} = a_{iz}$, $i = \overline{1, n}$, то следует оставить только одну, например, x_k для игрока A или b_r — для игрока B.

В результате таких преобразований игра упрощается, размер платежной матрицы сокращается. Оптимальные стратегии находятся для преобразованной матрицы. При вычислении этих стратегий можно использовать метод линейного программирования либо итерационный алгоритм.

3.3. Итерационный метод решения матричной игры в смешанных стратегиях

Итерационный метод позволяет получить приближенное решение матричной игры в смешанных стратегиях. Суть метода состоит в том, что производится имитация игры, предполагающая последовательный выбор стратегий каждым из игроков. Выбор стратегии игроком A основан на достижении максимального выигрыша, а игрок B исходит из условия выбора той стратегии, которая обеспечивает минимизацию проигрыша. Каждому игроку поочередно предоставляется право выполнить ход, совокупность двух ходов противников образует партию, по окончанию каждой из партии вычисляются статистические оценки нижней и верхней цен игры, а также среднее значение цены игры. Имитация игры осуществляется на специальной таблице, имеющей следующую форму (таблица 2)

Таблица 2 – Имитация конечной матричной игры

<table>
<tr><th rowspan="2">N</th><th rowspan="2">I</th><th colspan="6">Номера стратегий игрока B</th><th rowspan="2">J</th><th colspan="6">Номера стратегий игрока A</th><th rowspan="2">$\overline{v}$</th><th rowspan="2">$\underline{v}$</th><th rowspan="2">v^*</th></tr>
<tr><th>b_1</th><th></th><th>b_r</th><th>b_j</th><th></th><th>b_m</th><th>x_1</th><th></th><th>x_k</th><th>x_i</th><th></th><th>x_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x_z</td><td>a_{z1}</td><td></td><td>$\underline{a_{zr}}$</td><td>a_{zj}</td><td></td><td>a_{zm}</td><td>b_r</td><td>a_{1r}</td><td></td><td>$\overline{a_{dr}}$</td><td>a_{ir}</td><td></td><td>a_{nr}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_d</td><td>$a_{z1}+$
a_{d1}</td><td></td><td>$a_{zr}+$
a_{dr}</td><td>$a_{zj}+$
a_{dj}</td><td></td><td>$a_{zm}+$
a_{dm}</td><td>b_t</td><td>$a_{1r}+$
a_{1t}</td><td></td><td>$a_{dr}+$
a_{dt}</td><td>$a_{ir}+$
a_{it}</td><td></td><td>$a_{nr}+$
a_{nt}</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Первый столбец N содержит целые числа, которые идентифицируют номера имитируемых партий. Во втором столбце I указывается стратегия игрока A, которая была выбрана им в текущей партии. В первой партии эта стратегия выбирается произвольным способом. Предположим, что в первой партии выбрана стратегия x_z. Тогда в следующих m столбцах необходимо указать значение проигрыша игрока B при применении им соответственно стратегий b_1, . . . , b_j, . . . , b_m, при условии, что игроком A уже выбрана стратегия x_z. Очевидно, что игроком B будет выбрана такая стратегия b_r, которой соответствует минимальное из значений a_{zj}, $j = \overline{1, m}$. Это минимальное значение подчеркивается, а стратегия b_r, выбранная в первой партии игроком B, указывается в следующем столбце J. Следующие n столбцов содержат выигрыш игрока A при применении им соответственно стратегий $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, при условии, что игроком B в текущей партии уже выбрана стратегия b_r, Очевидно, что игроком A будет выбрана такая стратегия x_d, которая максимизирует выигрыш игрока A. Это максимальное значение надчеркивается. В столбце $\underline{v}$ указывается оценка нижней цены игры: для первой партии эта величина совпадает с подчеркнутым элементом платежной матрицы a_{zr}. В столбце $\overline{v}$ приводится оценка верхней цены игры: для первой партии эта величина совпадает с надчеркнутым элементом платежной матрицы a_{dr}. В последнем столбце v^* записывается средняя цена игры, определяемая как $v^* = (\overline{v} + \underline{v})/2$. При розыгрыше второй партии во втором столбце указывается стратегия x_d, выбранная игроком A в первой партии, а в следующих m столбцах — величина накопленного игроком B проигрыша соответственно для стратегий $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m$, при условии, что игрок A выбрал во второй партии стратегию x_d. Величина накопленного проигрыша игрока B для стратегии b_j равна сумме значения элемента первой строки, находящегося в столбце b_j, и значения элемента платежной матрицы a_{dj}. Среди накопленных проигрышей находится минимальный, который подчеркивается. Предположим, что минимальный накопленный проигрыш соответствует стратегии b_t, — эта стратегия выбирается игроком B во второй партии. В следующих n столбцах указывается накопленный за две партии выигрыш игрока A при использовании им соответственно стратегий $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, при условии, что игроком B выбрана стратегия b_t. Максимальный накопленный выигрыш надчеркивается, а соответствующая стратегия выбирается для ее применения игроком A в третьей партии. При вычислении $\underline{v}$ подчеркнутое значение накопленного проигрыша игрока B делится на номер текущей партии. Аналогично определяется $\overline{v}$ — как результат деления надчеркнутого значения на номер текущей партии. Выход из итерационного процесса производится либо при достижении фиксированного значения N, либо по величине невязки для средней цены игры v^*. По окончании итерационного процесса производится расчет оценок вероятностей применения стратегий:

$$p_i^* = K_{x_i}/N,\ i = \overline{1,\ n},\ q_j^* = K_{b_j}/N,\ j = \overline{1,\ m},$$

где K_{x_i}, K_{b_j} — количество применений соответственно стратегий x_i, $i = \overline{1,\ n}$ и b_j, $j = \overline{1,\ m}$ в процессе имитации игры.

4. Решение матричных игр

4.1. Пример решения матричной игры в чистых стратегиях

Задача.

Пусть игра задана платежной матрицей — таблица 3.

Таблица 3 – Платежная матрица игры

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B				α_i
	b_1	b_2	b_3	b_4	
x_1	1	3	0	5	0
x_2	3	4	2	3	2
x_3	0	-1	2	4	-1
β_j	3	4	2	4	2

Решение.

Нижняя цена игры:

$\alpha = \max(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3) = \max(0;\ 2;\ -1) = 2.$

Верхняя цена игры:

$\beta = \min(\beta_1;\ \beta_2;\ \beta_3;\ \beta_4) = \min(3;\ 4;\ 2;\ 4) = 2.$

Чистая цена игры:

$\alpha = \beta = 2.$

Оптимальная стратегия игрока A — x_2; оптимальная стратегия игрока B — b_3.

4.2. Пример решения матричной игры в смешанных стратегиях

Задача.

Пусть игра задана платежной матрицей — таблица 4.

Таблица 4 – Платежная матрица игры

Стратегии игрока A	Стратегии игрока B			α_i
	b_1	b_2	b_3	
x_1	1	6	4	0
x_2	3	1	2	1
x_3	6	-1	2	-1
β_j	6	6	4	

Решение.

Нижняя цена игры:
$\alpha = \max(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3) = \max(0;\ 1;\ -1) = 1.$
Верхняя цена игры:
$\beta = \max(\beta_1;\ \beta_2;\ \beta_3) = \min(6;\ 6;\ 4) = 4.$
Чистая цена игры не может быть определена, так как $\alpha \neq \beta$, следовательно, решения в чистых стратегиях нет. Для поиска решения в смешанных стратегиях воспользуемся итерационным методом. Ограничимся первыми 15-тью итерациями. В таблице 5 приведена пошаговая имитация игры.

Таблица 5 – Пошаговая имитация игры

N	I	Номера стратегий игрока B			J	Номера стратегий игрока A			$\overline{v}$	$\underline{v}$	v^*
		b_1	b_2	b_3		x_1	x_2	x_3			
1	x_2	3	$\underline{1}$	2	b_2	$\overline{6}$	1	-1	0	6	3
2	x_1	$\underline{4}$	7	6	b_1	$\overline{7}$	4	5	3,5	2	2,75
3	x_1	$\underline{5}$	13	10	b_1	8	7	$\overline{11}$	3,7	2	2,85
4	x_3	11	12	13	b_1	9	10	$\overline{17}$	4,03	2,75	3,39
5	x_3	17	$\underline{11}$	14	b_2	15	11	$\overline{16}$	3,2	2,2	2,7
6	x_3	23	$\underline{10}$	12	b_2	$\overline{21}$	12	15	3,5	1,67	2,58
7	x_1	24	$\underline{16}$	16	b_2	$\overline{24}$	13	17	3,43	2,28	2,85
8	x_1	25	22	$\underline{20}$	b_3	$\overline{28}$	15	19	3,5	2,5	3,0
9	x_1	26	28	$\underline{24}$	b_3	$\overline{32}$	14	21	3,56	2,67	3,12
10	x_1	$\underline{27}$	34	28	b_1	$\overline{33}$	17	27	3,3	2,7	3,0
11	x_1	$\underline{28}$	40	32	b_1	$\overline{34}$	20	33	3,09	2,55	2,82
12	x_1	$\underline{29}$	46	36	b_1	35	23	$\overline{39}$	3,25	2,41	2,83
13	x_3	$\underline{35}$	45	38	b_1	36	26	$\overline{45}$	3,46	2,69	3,08
14	x_3	41	44	$\underline{40}$	b_3	40	28	$\overline{47}$	3,36	2,86	3,11
15	x_3	47	43	$\underline{42}$	b_3	44	30	$\overline{49}$	3,27	2,8	3,04

Анализ результатов итерационного метода (таблица 5) позволяет найти оценки вероятностей применения стратегий игрока A:
$p(x_1) = 8/15 = 0,53$; $p(x_2) = 1/15 = 0,07$; $p(x_3) = 6/15 = 0,40$;
игрока B:
$p(b_1) = 7/15 = 0,47$; $p(b_2) = 4/15 = 0,27$; $p(b_3) = 4/15 = 0,27$.
Цена игры $v = 3,04$.

5. Контрольные вопросы

1. Когда возникает конфликтная ситуация?
2. Что такое стратегии игроков? Чем отличаются чистые стратегии от смешанных?
3. Как математически представляются матричные игры?
4. Что такое верхняя и нижняя цены игры? Что такое седловая точка?
5. Что значит, решить игру?
6. В чем состоит упрощение игры?
7. В чем суть итерационного метода решения игры?
8. В чем отличие игр с пассивной „средой“ от стратегических игр?
9. Как проявляется неопределенность в стратегических играх?

6. Литература

1. Горбунов, В.М. Теория принятия решений [Текст]: учебное пособие / В.М. Горбунов. — Томск: Национальный исследовательский томский политехнический университет, 2010. — 67 с.
2. Петровский, А.Б. Теория принятия решений [Текст]: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.Б. Петровский. — М.: Издательский центр „Академия“, 2009. — 400 с. — (Университетский учебник. Сер. „Прикладная математика и информатика“).
3. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах [Текст]: Учебник. — М.: Логос, 2000. — 296 с.