Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 26.01.2021 18:31:04
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
« ____ » _______________ 2020 г.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теория принятия решений»
для студентов направления подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника профиль «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Курск 2020 г.

УДК 519.81
Составители: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова

Рецензент
Зав. кафедрой комплексной защиты информационных систем, доктор физико-математических наук
В.П. Добрица

Принятие решений в условиях неопределенности: методические указания к практическим занятиям по дисциплине „Теория принятия решений“/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.В. Дегтярев, Е.Н. Иванова. Курск, 2020. 18 с.: ил. 2, табл. 6. Библиограф.: с. 18.

Приведены методы выбора оптимальных решений в условиях различной степени неопределенности. Рассмотрены понятия оценочной функции и функции реализации. Показаны примеры выбора определенной стратегии применением нескольких критериев.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебнометодическим объединением по направлению Информатика и вычислительная техника.

Предназначены для студентов направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника профиль „Вычислительные машины, комплексы, системы и сети“ очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель

Освоить методы выбора оптимальных решений в условиях различной степени неопределенности. Научиться применять критерии выбора альтернативы поведения при полной неопределенности.

2. Математическая формулировка задачи принятия решений в условиях неопределенности

В реальных условиях лицо, принимающее решение (ЛПР), почти всегда делает выбор в условиях дефицита информации, т.к. любые ситуации, требующие принятия решения, содержат, как правило, большое число неопределенных факторов, которые оказывают влияние как на формальную постановку задачи, так и на средства ее решения. Недостаток информации может быть обусловлен различными причинами, имеющими политическую, социальную, организационную, техническую, природную, персональную или иную основу.

Неопределенные факторы можно разбить на три группы. Первая — это факторы, людям попросту не известные или от них не зависящие. Они связаны с принципиальной неизвестностью или недостаточной изученностью внешних обстоятельств, которые могут повлиять на выбор. Совокупность таких объективных обстоятельств принято называть „природой“, которая в данном контексте выступает в качестве нейтрального, не обладающего „разумом“ участника, безразличного к действиям ЛПР. Но состояние „природы“ может существенно повлиять на исход проводимой ЛПР операции. Соответствующие ситуации называются играми с природой, или статистическими играми.

Вторую группу составляет неопределенность человека, который может вести себя непоследовательно, противоречиво, допускать ошибки, зависеть от других лиц (партнеров, противников и т.д.), чьи действия он не может полностью учесть или предвидеть. Обычно подобные действия осуществляются в условиях, когда неизвестно, какие ответные действия могут предпринять соперники (противники или союзники). Наиболее простой ситуацией, в которой проявляется такого рода неопределенность, является конфликтная ситуация, где сталкиваются интересы разных сторон. Такие и подобные им задачи изучает теория игр.

В третью группу входит неопределенность целей, которые могут различаться и не совпадать друг с другом. Например, конструкторы, проектируя вычислительную машину, должны учитывать ее целевое назначение, заданные показатели скорости, емкости памяти, факторы экономичности и технологичности производства, эксплуатации компьютера и многие другие обстоятельства.

Постановка задачи выбора решения в играх с пассивной средой или „природой“ может быть представлена следующим логическим высказыванием

$$\langle S, X, F, K, X^* \in X \rangle, \qquad (1)$$

где S – множество состояний пассивной среды („природы“);
X – множество всех альтернатив (или пространство решений), которые подвергаются анализу с использованием критерия оптимальности;
F – критерий оптимальности альтернатив для условий природной неопределенности;
K – количественный скалярный показатель, характеризующий привлекательность или качество альтернатив в этих условиях;
X^* – оптимальная (наиболее предпочтительная) альтернатива, выделенная в результате анализа.

Логическое высказывание (1) означает, что с учетом состояния пассивной среды S из множества альтернатив X

по значениям скалярного показателя качества альтернатив K критерия оптимальности F выделяется оптимальная альтернатива X^*.

3. Методы принятия решений в условиях неопределенности

3.1. Представление задачи

Рассмотрим задачу принятия решения в условиях неопределенности, когда задано множество альтернатив X и множество возможных исходов Y. Особенностью таких задач является предположение о неизвестном в момент принятия решения значении параметра неопределенности среды. Гарантировать наступление определенного исхода $y \in Y$ при выборе решения $x \in X$ невозможно. Будем считать, что наша система предпочтений связана с оценкой „полезностей“ исходов y – $k \in K$. Выбор альтернативы осуществляется с единственной целью — получить исход y, принадлежащий множеству элементов из Y с максимальной оценкой „полезности“ k.

Анализ задачи начинается с формирования платежной матрицы или матрицы решений (таблица 1).

Таблица 1 – Матрица решений (платежная матрица)

Альтернативы X	Состояния природы S				
	s_1	$\cdots$	s_j	$\cdots$	s_m
x_1	k_{11}	$\cdots$	k_{1j}	$\cdots$	k_{1m}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	k_{i1}	$\cdots$	k_{ij}	$\cdots$	k_{im}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	k_{n1}	$\cdots$	k_{nj}	$\cdots$	k_{nm}

Здесь $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество альтернатив, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ — множество возможных состояний среды, которые характеризуются законами распределения вероятностей, $K = \{k_{11}, k_{12}, \ldots, k_{ij}, \ldots, k_{nm}\}$ — множество, состоящее из численных показателей „полезности“ выбора альтернативы для определенного состояния природы $k_{ij} = F(x_i, s_j)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ (будем предполагать, что каждый исход оценивается числом, отражающим его „полезность“).

Заданная матрица интерпретируется следующим образом. Если мы выбрали решение x_i, то могут реализоваться различные исходы, характеризующиеся показателями „полезности“, из соответствующей строки матрицы: $k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{im}$. Какой именно исход реализуется, зависит от значения параметра „природной“ неопределенности s_j.

Подходы к принятию решения зависят от степени неопределенности состояний природы. Можно выделить три случая степени неопределенности состояний природы:

1. Заданы вероятности нахождения природы в каждом из состояний.
2. Вероятности состояний природы неизвестны, однако можно сделать предположение относительно их значений.
3. Вероятности состояний природы неизвестны и невозможно сделать предположения об их распределении.

В первом и во втором случаях имеют дело с принятием решения в условиях неполной информации или статистической неопределенности. В третьем случае решение принимается в условиях полной неопределенности.

Принятие решения в условиях неопределенности состоит в формировании одностолбцовой матрицы решений и сведении задачи к случаю полной определенности. Эта процедура выполняется с помощью применения различных оценочных функций, в качестве которых могут использоваться функция максимума (минимума) математического ожидания, среднего значения по критерию и другие.

3.2. Принятие решений в условиях статистической неопределенности

Рассмотрим задачу принятия решения в общем случае, когда имеется n альтернатив и m исходов. Будем предполагать существование функции $y = F(x, s)$ – функции реализации, которая ставит в соответствие каждой паре вида (x, s), где x – альтернатива, s – состояние среды, исход y.

Каждый исход оценивается вещественным числом k и требует максимизировать (минимазировать) эту оценку. При этом функция реализация преобразуется в соответствующую целевую функцию, которую следует максимизировать (минимизировать) по x.

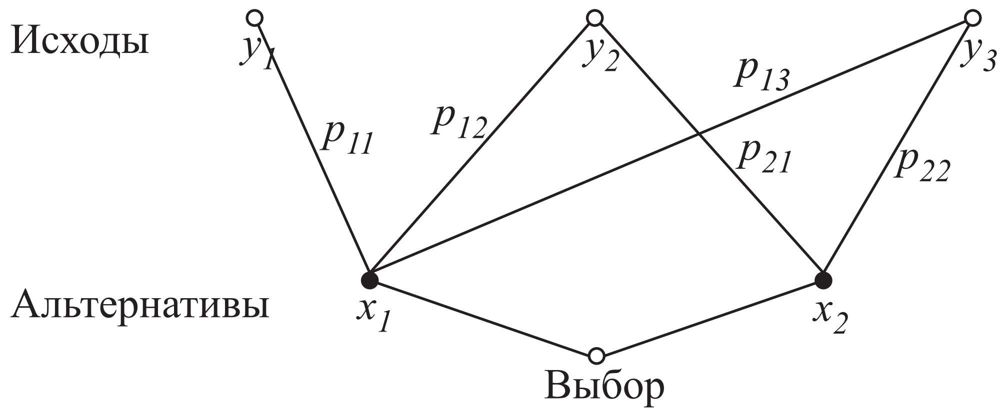

Рисунок 1 – Граф связей альтернатив и исходов

Построим граф связей альтернатив и исходов (рисунок 1). Вершинами этого графа являются альтернативы и исходы. Дугами соединяем те вершины, вероятность перехода между которыми не равна нулю. В качестве „состояний природы“ возьмем множество возможных согласно графу связей альтернатив и исходов отображений $s_l : X \to Y$, $l = 1, \ldots, z$. В случае конечных множеств X и Y будем иметь $S = \prod\limits_{j=1}^{n} s_j$, где s_j – количество стрелок, исходящих из альтернативы x_j, на графе связей альтернатив и исходов (на рисунке 1 $s_1 = 3$, $s_2 = 2$, $S = 6$). Таким образом, каждое „состояние среды“s_j соответствует такому подграфу графа связей альтернатив и исходов (будем называть его подграфом состояния), в котором из каждой альтернативы x_i исходит только одна стрелка, указывающая, какой исход будет реализован при выборе альтернативы x_i (S – максимальное возможное число таких подграфов). Следовательно, выбор „состояния среды“ s_j и альтернативы x_i полностью определяет исход – обозначим его через $y_j(x_i)$. Далее, каждому состоянию среды s_j соответствует вероятность его наступления (вероятность реализации соответствующего подграфа состояния): где $P(s_j) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_i(y_j(x_i))$ – вероятность наступления исхода y_j при выборе альтернативы x_i. Таким образом, для вычисления $P(s_j)$ достаточно перемножить числа, стоящие около стрелок, составляющих подграф состояния s_j. Теперь таблица, представляющая функцию реализации, может быть построена.

Установленная выше возможность представления задачи принятия решения в условиях риска в форме функции реализации означает, что статистическую неопределенность, проявляющуюся в неоднозначной (вероятностной) связи между средством и результатом, всегда можно интерпретировать как существование некоторой среды, оказывающей влияние на результат. Методологическое значение этого факта состоит в том, что достаточно широкий класс задач принятия решений может быть приведен к указанной стандартной форме – функции реализации. Многие практические задачи принятия решений непосредственно формулируются в форме функции реализации. Это, прежде всего, такие задачи, где реально существует среда, влияющая на результат принятия того или иного решения. В качестве примера могут быть указаны задачи принятия оптимальных проектных решений в условиях технологического разброса параметров изделия.

В качестве оценочной функции может использоваться функция максимума (минимума) математического ожидания, дисперсии, среднего арифметического значения критерия и др.

3.3. Принятие решений в условиях полной неопределенности

В случае, когда либо распределение параметра s неизвестно, либо параметр неопределенности s изменяется неизвестным образом, но не является случайным, мы имеем дело с принятием решения в условиях полной неопределенности.

В такой ситуации информация о факторе неопределенности s обычно имеет вид $s \in S$, где S – некоторое множество. Для однозначного решения задачи выбора альтернативы x информации недостаточно, можно определить вектор x как функцию s:

$$x = x(s). \tag{2}$$

Формула (2) позволяет отобразить множество неопределенности природных факторов S на множество $G_x \subset X$, которое можно назвать множеством неопределенности решений x. Выбор конкретного элемента из множеств G_x может основываться на введении различных разумных гипотез о поведении среды или критериев оптимальности при выборе решения.

Одна из важнейших гипотез разумного поведения это гипотеза антагонизма. Она состоит в предположении, что среда ведет себя „наихудшим“(для лица, принимающего решение) образом. В этом случае рассчитывается критерий Вальда, который рекомендует выбирать тот вариант поведения, при котором в худших условиях выигрыш максимален:

$$W(x^*) = \max_{x_i} \min_{s_j} k_{ij}. \tag{3}$$

Такой подход к принятию решения является крайне пессимистичным. Принцип выбора оптимальной альтернативы x^* на основе решения задачи (3) называется принципом гарантированного результата или принципом максимина. Число $W(x^*)$ называется гарантированной оценкой, а сам элемент x^* – гарантирующим решением.

Если значения k_{ij} отражают не „полезность“ альтернативы, а, наоборот – „потери“, то исходная задача (3) преобразуется в задачу минимизации, а максиминный критерий превращается в минимаксный:

$$F(x^*) = \min_{x_i} \max_{s_j} k_{ij}. \tag{4}$$

Следующий вариант поведения основан на критерии минимального сожаления, предложенном Сэвиджем (критерий минимаксного риска Сэвиджа):

$$F(x^*) = \min_{x_i} \max_{s_j} r_{ij}. \tag{5}$$

Данный критерий применяется не к исходной матрице решений, а к матрице сожалений или рисков. Матрица рисков $R = \|r_{ij}\|$ дает наиболее наглядную картину неопределенности ситуации, так как из матрицы рисков видно, чем рискует ЛПР, выбирая ту или иную альтернативу. Риском r_{ij} при выборе альтернативы x_i при условии нахождения природы в состоянии s_j, называется разность между выигрышем, который был бы получен, если бы состояние природы s_j было бы известно, и выигрышем, который будет получен, выбирая альтернативу x_i в условиях отсутствия информации о состоянии природы:

$$r_{ij} = \max_{l=\overline{1,n}} k_{lj} - k_{ij}, \tag{6}$$

если k_{ij} – „доход“;

$$r_{ij} = k_{ij} - \min_{l=\overline{1,n}} k_{lj}, \tag{7}$$

если k_{ij} – „потери“;

Величина риска – это размер платы за отсутствие информации о состоянии природы.

Критерий минимального сожаления состоит в применении минимаксного критерия (независимо от того, какой характер имели элементы k_{ij} – „доходы“ или „потери“) к матрице сожалений $\|r_{ij}\|$.

Критерий Сэвиджа, как и критерий Вальда – критерий крайнего пессимизма. Однако, при использовании этого критерия пессимизм проявляется в том, что снижается не минимальный выигрыш, а максимальная потеря выигрыша.

Критерий, который охватывает ряд различных подходов к принятию решения – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного – это критерий Гурвица. Согласно этому критерию необходимо выбирать такую альтернативу, которая обеспечивает компромиссное решение между оптимизмом и пессимизмом. Если k_{ij} – „доход“, то выбирается решение из условия

$$F(x^*) = \max_{i=\overline{1,n}} \left\{ \alpha \max_{j=\overline{1,m}} k_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=\overline{1,m}} k_{ij} \right\}, \tag{8}$$

где α – некоторое число, $0 \le \alpha \le 1$.

Если k_{ij} – „потери“, то выбирается решение из условия

$$F(x^*) = \min_{i=\overline{1,n}} \left\{ \alpha \min_{j=\overline{1,m}} k_{ij} + (1-\alpha) \max_{j=\overline{1,m}} k_{ij} \right\}, \tag{9}$$

α выбирается субъективно и зависит от оценки ситуации. Чем ближе к единице, тем больше пессимизма у ЛПР. При $\alpha = 1$ критерий Гурвица совпадает с критерием Вальда, при $\alpha = 0$ – с критерием крайнего оптимизма:

$$F(x^*) = \max_{i=\overline{1,n}} \max_{j=\overline{1,m}} k_{ij}, \tag{10}$$

Критерии качества решения могут приводить к неодинаковым результатам. Проанализировав ситуацию с различных точек зрения, используя разные критерии, варьируя величину параметра α, ЛПР может более обдуманно и взвешенно сделать свой выбор.

4. Принятие решения в условиях неопределенности

4.1. Пример принятия решения в условиях статистической неопределенности

Задача.

При покупке нового мобильного телефона необходимо принять решение о подключении услуги „вторая память“. Статистика показывает, что в случае порчи или потери телефона без подключения услуги удается полностью восстановить данные лишь в 1 из 10 случаев. В 3 из 10 случаях восстанавливают более 30% информации и в 6 случаях из 10 практически вся информация теряется. Если же услуга подключена, то в 7/10 случаях все данные сохраняются и в 3/10 случаях – информация восстановлению не подлежит.

Решение.

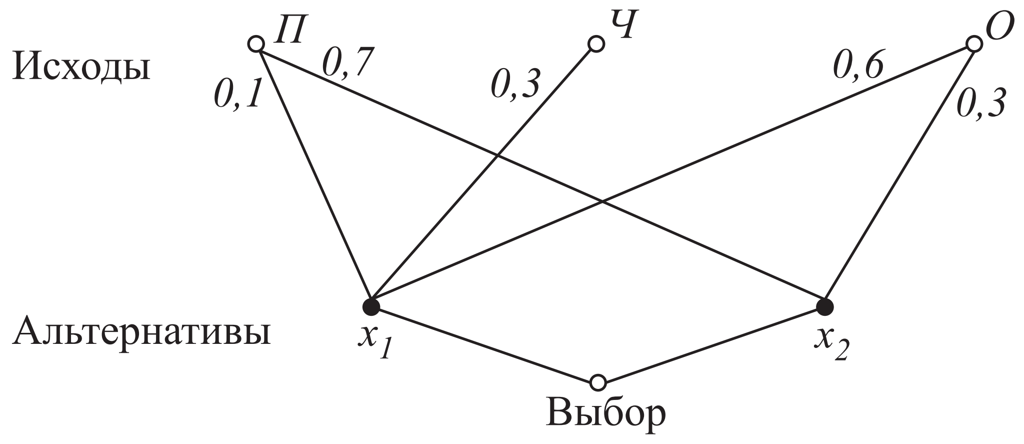

Рисунок 2 – Граф связей альтернатив и исходов

Построим граф связей альтернатив и исходов для данной задачи. Здесь имеются две альтернативы: x_1 – подключить услугу, x_2 – не подключать услуги. В любом случае возможны три варианта исхода: данные полностью восстановлены (П), данные восстановлены частично (Ч), данные потеряны (О). Принимая за вероятность каждого исхода частоту его появления, получим граф, представленный на рисунке 2.

Зная состояние среды, мы должны точно знать, что будет, если мы выберем альтернативу x_1 и каков будет исход при выборе x_2. Введем следующие шесть искусственных „состояний среды“:

$$\begin{aligned}
&s_1: \; x_1 \to \text{П}, \; x_2 \to \text{П}, \; p(s_1) = 0,1 \times 0,7 = 0,07\\
&s_2: \; x_1 \to \text{Ч}, \; x_2 \to \text{П}, \; p(s_2) = 0,3 \times 0,7 = 0,21\\
&s_3: \; x_1 \to \text{О}, \; x_2 \to \text{П}, \; p(s_3) = 0,6 \times 0,7 = 0,42\\
&s_4: \; x_1 \to \text{П}, \; x_2 \to \text{О}, \; p(s_1) = 0,1 \times 0,3 = 0,03\\
&s_5: \; x_1 \to \text{Ч}, \; x_2 \to \text{О}, \; p(s_1) = 0,3 \times 0,3 = 0,09\\
&s_6: \; x_1 \to \text{О}, \; x_2 \to \text{О}, \; p(s_1) = 0,6 \times 0,3 = 0,18
\end{aligned}$$

Теперь функция реализации может быть задана в виде таблицы (таблица 2).

Таблица 2 – Матрица решений с искусственными состояниями среды

Альтернативы	Состояния природы S					
X	s_1 0,07	s_2 0,21	s_3 0,42	s_4 0,03	s_5 0,09	s_6 0,18
x_1	П	Ч	О	П	Ч	О
x_2	П	П	П	О	О	О

В таблице 2 под каждым состоянием среды указана вероятность его появления.

Будем численно оценивать полезность подключения услуги по проценту восстановления информации: П — 100, Ч — 50, О — 0. Тогда из таблицы 2 непосредственно получаем таблицу 3.

Таблица 3 – Матрица решений

Альтернативы X	Состояния природы S					
	s_1 0,07	s_2 0,21	s_3 0,42	s_4 0,03	s_5 0,09	s_6 0,18
x_1	100	50	0	100	50	0
x_2	100	100	100	0	0	0

В качестве оценочной функции (она же целевая) будем использовать математическое ожидание (среднее значение) критерия полезности – процента восстановления информации. Вполне разумным представляется выбор той альтернативы x_i, $i = \overline{1, 2}$, которая максимизирует оценочную функцию:

$$F(x_i, S) = \sum_{j=1}^{6} (k_{ij} \times p(s_j)) \to \max. \tag{11}$$

Вычисляем значение оценочной функции (11), используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} F(x_1, S) &= 100 \times 0,07 + 50 \times 0,21 + 0 \times 0,42 + 100 \times 0,03 + \\ &\quad + 50 \times 0,09 + 0 \times 0,18 = 25; \\ F(x_2, S) &= 100 \times 0,07 + 100 \times 0,21 + 100 \times 0,42 + 0 \times 0,03 + \\ &\quad + 0 \times 0,09 + 0 \times 0,18 = 70. \end{aligned}$$

$$\max(F(x_1, S),\ F(x_2, S)) = \max(25,\ 70) = 70 \to F(x_2, S).$$

Так как $\max(F(x_1, S),\ F(x_2, S)) = F(x_2, S)$, то, руководствуясь критерием полезности, принимаем решение о целесообразности подключения услуги „вторая память“(альтернатива

x_2). Такой выбор приведет к успеху, хотя в каждом конкретном случае может реализоваться любой возможный исход. Кроме того при решении задачи мы не учитывали затраты на услугу и важность сохранения информации для покупателя.

4.2. Пример принятия решения в условиях полной неопределенности

Задача.

При покупке нового мобильного телефона необходимо принять решение о подключении услуги „вторая память" сроком на один год. В случае подключения услуги возможны следующие ситуации. Если телефон не будет утрачен, тогда пользователь понесет убытки в размере 360 ден. единиц. В случае утраты телефона, но при возможности восстановить всю информацию пользователь покрывает свои финансовые траты моральным удовлетворением. Если же телефон будет утрачен и не будет возможности восстановить всю информацию помимо материальных потерь пользователь несет и моральные потери, всего 1360 ден. единиц. В случае отказа от услуги при утрате телефона пользователь несет потери при возможности восстановления информации (1000 ден. единиц) и получает моральное удовлетворение при невозможности восстановления информации (-1000 ден. единиц). Таким образом исходная матрица решений имеет вид (таблица 4):

Решение.

При принятии решения будем руководствоваться различными критериями ((4), (5), (9)). Расчеты по критерию Вальда (4) представим в таблице 5.

По критерию Вальда следует выбрать альтернативу x_2, что соответствует неподключению услуги „вторая память".

Применим критерий Сэвиджа (5). Для матрицы реше-

Таблица 4 – Матрица решений

Альтернативы X	Состояния природы		
	s_1	s_2	s_3
x_1	360	0	1360
x_2	0	1000	-1000

Таблица 5 – Матрица решений для критерия Вальда

Альтернативы X	Состояния природы			max
	s_1	s_2	s_3	
x_1	360	0	1360	1360
x_2	0	1000	-1000	1000
			min	1000

Таблица 6 – Матрица рисков

Альтернативы X	Значения рисков			max
	r_1	r_2	r_3	
x_1	360	0	2360	2360
x_2	0	1000	0	1000
			min	1000

ний 4 матрица рисков имеет вид таблицы 6. Вычисленные значения рисков для каждой альтернативы позволяют уста-

новить, что минимальный риск $r_{\min} = r_{x_2}$, что соответствует применению второй альтернативы: не подключать услугу „вторая память“.

Применим критерий Гурвица (9). Для параметра α возьмем значение $\alpha = 0,5$, что соответствует нейтральному отношению к риску.

$$F(x^*) = \min\{0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1360;\ 0,5 \cdot (-1000) + 0,5 \cdot 1000\} =$$
$$= \min\{680;\ 0\} = 0,$$

Минимальное значение критерия соответствует альтернативе x_2 – не подключать услугу „вторая память“.

5. Контрольные вопросы

1. Как определяется задача принятия решения в условиях неопределенности?
2. Как представляется задача принятия решения в условиях неопределенности?
3. Три случая степени неопределенности состояния „природы“.
4. Что такое функция реализации? Ее методологическое значение.
5. Что является исходными данными для статистических задач?
6. Какие критерии применяются в задачах принятия решения в условиях полной неопределенности?
7. Что такое риск? Как получить матрицу рисков?
8. Какой критерий отражает позицию крайнего пессимизма?
9. Как выбирается значение параметра α для критерия Гурвица?

6. Литература

1. Горбунов, В.М. Теория принятия решений [Текст]: учебное пособие / В.М. Горбунов. — Томск: Национальный исследовательский томский политехнический университет, 2010. — 67 с.
2. Петровский, А.Б. Теория принятия решений [Текст]: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А.Б. Петровский. — М.: Издательский центр „Академия“, 2009. — 400 с. — (Университетский учебник. Сер. „Прикладная математика и информатика“).
3. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах [Текст]: Учебник. — М.: Логос, 2000. — 296 с.