0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________________ О.Г. Локтионова
«22» сентября 2016 г.

РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ПРАВИЛ ВЫВОДА

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Теория нечеткой логики и множеств»
для студентов специальности 09.03.01 «Информатика
и вычислительная техника»

Курск 2016

УДК 621.37(075)

Составитель М.В. Бобырь

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Е.О. Брежнева*

Разработка экспертных систем на основе нечетких правил вывода : методические указания по выполнению лабораторной работы по дисциплине «Теория нечеткой логики и множеств» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: М.В. Бобырь. – Курск, 2016. – 45 с.: ил. 5, табл. 2. – Библиогр.: с.45.

Рассмотрены базовые понятия теории нечеткой логики, которая является одним из элементов интеллектуальных систем, используемых для синтеза систем в условиях неопределенной информации. В учебно-методической работе содержатся задания для выполнения практических работ.

Методические указания соответствуют требованиям программы дисциплины «Теория нечеткой логики и множеств».

Предназначены для студентов специальности 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» дневной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 22.09.16. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 50 экз. Заказ 949. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ПРАВИЛ ВЫВОДА

1. Цель работы

Проектирование и исследование алгоритмов нечетко-логического вывода используемых в современных интеллектуальных системах.

2. Предпосылки возникновения нечеткой логики

При разработке интеллектуальных систем информация о конкретных объектах управления редко бывает полной и достоверной. При использовании жестких механизмов булевой логики возникает противоречие между неопределенными и/или недостаточно полными знаниями и четкими механизмами логических выводов. Данное противоречие призвана устранить нечеткая логика. Данная теория впервые была предложена Лотфи Заде в 1965 г.

Задача принятия решений в условиях неопределенности подразделяются на следующие методологии:

– байесовская логика;

– вывод на основе коэффициентов уверенности (Шортлифф, Демпстер-Шафер);

– нечеткая логика.

Байесовский подход подразумевает вычисление вероятностей событий на основе случайных выборок. Затем осуществляется выбор максимального значения вероятности из имеющихся значений. Гипотеза с максимальным уровнем признается решением системы.

Вывод на основе коэффициентов уверенности, является альтернативной байесовской логике. В теории уверенности неопределенность представлена как степень уверенности, в каком либо факте, которая оценивается на основе коэффициентов уверенности.

Нечеткая логика (fuzzy logic) наиболее удобный способ построения систем управления сложными технологическими процессами. Она позволяет определить промежуточные значения для общепринятых оценок: да – нет, ложь – истина. Для работы с такими выражениями Лотфи Заде, предложил использовать функции принадлежности элемента к множеству, степень истинности которых может принимать любые значения в интервале от 0 до 1, а не только 0 либо 1, как в традиционной четкой логики. Множества, имеющие функцию принадлежности, степени истинности, которой находится в диапазоне от 0 до 1, были названы нечеткими множества. Затем Заде ввел понятие лингвистическое переменной и предположил, что она описывается кортежем, основным элементов которого являются нечеткими множествами и правила логического вывода, что позволило создать мощный аппарат синтеза интеллектуальных систем.

Сегодня нечетка логика нашла широкое применение в промышленности и в средствах автоматизации технологических процессов и производств. В частности нечеткая логика используется в бытовых приборах (холодильники, стиральные машины и т.п.) в системах управления движением электровозов, автомобилей и регулировкой потока дорожного движения и т.д. При этом необходимо учитывать, что нечетко-логическое управление оказывается наиболее эффективным, в тех случаях, когда объекты управления являются слишком сложными для анализа с помощью традиционных методов, а также источники информации об их описании неточны или вообще отсутствуют.

3. Основные понятия нечеткой логики

Общепринятые математические методы предназначена для обработки точных данных, например «температура в помещении t=25°С». При этом оценка возможна только с помощью одноточных (одноэлементных) множеств (рис. 1).

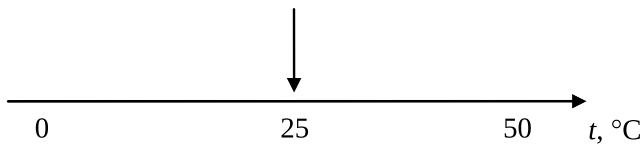


Рис. 1 Представление измерения скорости автомобиля

При этом точны данные измерения температуры могут быть получены с помощью различных сенсорных систем. Однако человек может оценить температуру в помещении, оперируя терминами «низкая температура», «средняя температура» и «высокая температура» (рис. 2). Данные выражения в рамках теории нечеткой логики называются ***термами***.

Человек, не может точно оценить значение температуры в помещении, но приближенно он сделать данную оценку он может, сказав, что температура в помещении низкая. Информация, представленная в виде термов, и имеющих конечную ненулевую ширину, называется ***нечеткой информацией***.

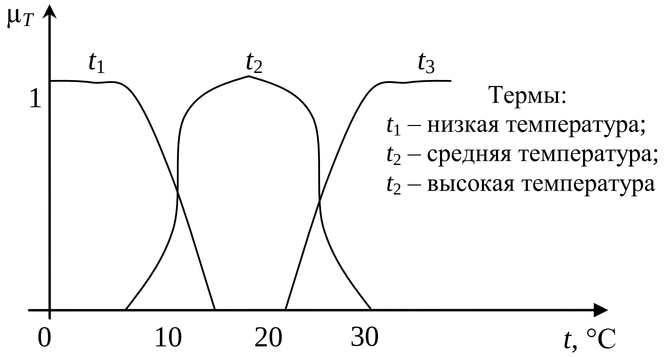


Рис. 2. Представление оценки температуры в помещении

Нечеткая логика, позволила широко использовать новые возможности, предложенные Л.Заде в различных системах управления. Пусть задана SISO-система: $y = f(x)$.

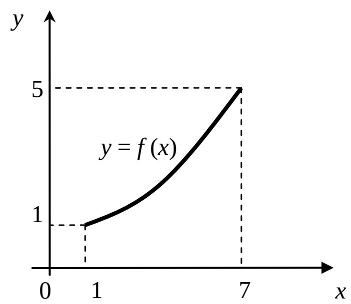


Рис. 3 Взаимосвязь между входным и выходным состоянием SISO-системы

Рекомендуется для описания данной модели использовать два правила (М – Малое, Б – Большое, см. рис. 3.4):

П1: Если (значение x малое) То (значение y малое);
П2: Если (значение x большое) То (значение y большое).

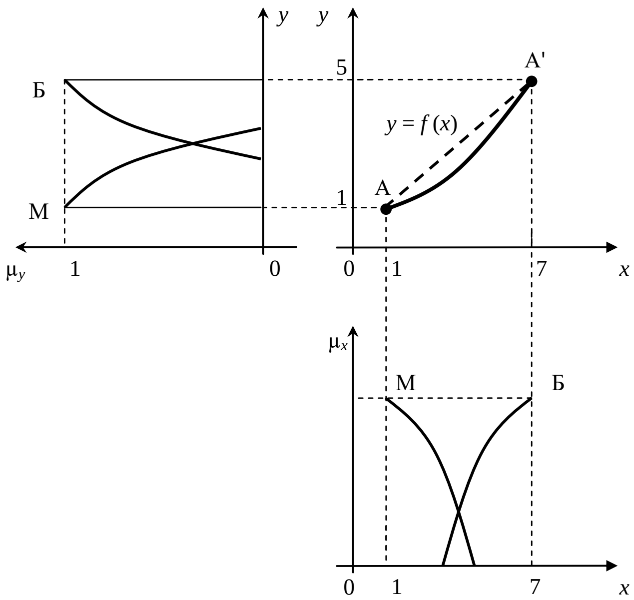


Рис. 4. SISO-системы с двумя термами: «Малое» и «Большое»

Модель, представленная на рисунке 4 не обладает высокой точностью, так как позволяет управлять только двумя крайними точками A и A'. Для повышения чувствительности нечеткой SISO-системы необходимо ввести дополнительный терм (С – среднее) (рис. 5), и добавить еще правило:

П1: Если (значение *x* малое) То (значение *y* малое);
П2: **Если (значение *x* среднее) То (значение *y* среднее);**
П3: Если (значение *x* большое) То (значение *y* большое).

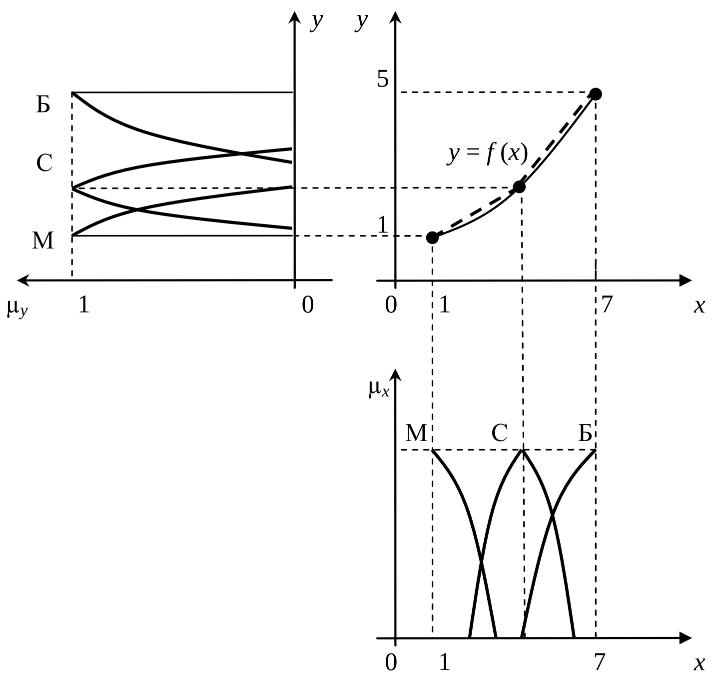


Рис. 5. SISO-системы с тремя термами: «Малое», «Среднее» и «Большое»

Если модель, представленная на рисунке 5, также не удовлетворяет заданной точности, то в неё необходимо добавлять новые термы и правила. Следует отметить, что при функционировании нечетко-логического вывода существуют порог, превышение которого уже не влияет на точность исследуемой системы. Поэтому для описания переменных входящих в структуру нечетко-логической системы достаточно не более 9 термов.

Отметим, что нечеткая логика также позволяет оценивать качественные характеристики. С учетом того, что качественная оценка не обладает аддитивностью (нет четких числовых значений), например если сложить 1 литр воды с 1 литром воды, то получиться 2 литра воды. А если сложить величину «немного воды» с величиной «немного воды», то ответ будет не ясен. Понятно, что результат выполнения данной операции, будет напрямую зависеть от смысла, вкладываемой в каждый из терминов «немного воды». Следует, что качественные характеристики нельзя агрегировать, как это делается с количественными оценками.

Оперировать с качественными оценками человеку также приходится, когда он анализирует скорость своего движения. Например, известно, что скорость пешехода составляет около 7 км/ч, однако при ходьбе мы пользуется качественной оценкой:

Я шел очень быстро;

Я шел с ускорением;

Я шел со скоростью близкой к 7 км/ч.

Нам легче оперировать с качественными характеристиками, так как у человека существует некоторое ограничение памяти, и с целью её экономии достаточно делать грубые оценки происходящих событий.

Следует учитывать, что в мире существует большое количество качественной информации, которую нельзя оценить с помощью самых высокоточных сенсоров: прогноз погоды, прогноз курса валюты, прогноз природных катаклизмов и т.д.

Но человечество выработало у себя способности оценивать эти показатели без каких-либо измерительных приборов. Поэтому нечеткая логика делает попытку трансформировать нечеткие, качественные оценки текущих событий происходящих в окружающем мире и постоянно анализируемых человеческим мозгом, на язык математических формул.

Для анализа данных характеризующих их степень влияния на события Л.Заде ввел понятия *нечеткого множества* и *функции принадлежности*.

Нечеткое подмножество A области рассуждений U характеризуется функцией принадлежности (ФП) μ_A: $U\to[0, 1]$, которая каждому элементу y множества U ставит в соответствие число $\mu_A(y)$ из отрезка [0, 1], описывающее степень принадлежности элемента y множеству A.

Причем функция принадлежности может быть задана: в непрерывном или дискретном видах; таблицы; аналитическом выражении (формула); формула с логическим ограничением области значений функции принадлежности; суммы или интеграла; в виде вектора степеней принадлежности.

Одноточечным нечетким множеством называется множество, носитель которого состоит из единственной точки. Если A – одноточечное нечеткое множество, носителем которого является точка y, то

$$A=\mu/y,$$

где μ – степень принадлежности y множеству A.

Для четкого (определенного) одноточечного множества Л.Заде ввел обозначение $1/y$.

При этом Л. Заде выделил, что *нечеткое множество* можно рассматривать как объединение одноточечных множеств и записывается в виде:

$$A=\int_U \frac{\mu_A(y)}{y}, \qquad (1)$$

где $\int$ – символ интегрирования обозначает операцию объединения одноточечных нечетких множеств $\mu_A(y)/y$.

Если носитель A состоит из конечного числа элементов, то интегрирование заменяется суммированием:

$$A=\frac{\mu_1}{y_1}+\frac{\mu_2}{y_2}+\ldots+\frac{\mu_n}{y_n}, \qquad (2)$$

где μ_i (i=1..n) – степень принадлежности элемента y_i множеству A, при этом знак «+» означает операцию не алгебраического суммирования, а операцию объединения одноточечных нечетких множеств.

Формула (2) также может быть записана в виде суммы:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{y_i}. \tag{3}$$

Рассмотрим виды представления функции принадлежности для нечеткой переменной «примерно один». Графическая интерпретация данного термина в непрерывном и дискретном видах, представлена на рисунке 6.

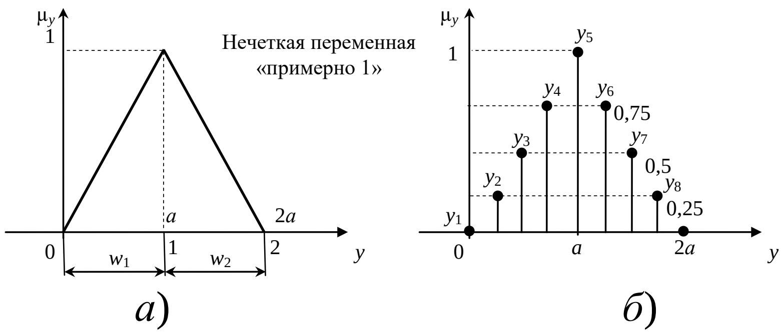


Рис. 6. Функции принадлежности нечеткой переменной «примерно один»: *а* – непрерывный вид ФП; б – дискретный вид ФП

В табличной форме записи ФП для нечеткой переменной «примерно один» будет иметь следующий вид (табл. 1)

Таблица 1

Табличное представление функции принадлежности

$y \in Y$	y_1=0	y_2=0,25a	y_3=0,5a	y_4=0,75a	y_5=a
μ_y	0	0,25	0,5	0,75	1
$y \in Y$	y_6=0,75a	y_7=0,5a	y_8=0,25a	y_9=2a	
μ_y	0,75	0,5	0,25	0	

В виде аналитического выражения для термина «примерно один» ФП запишется:

$$A = \int_0^a \frac{y}{a} + \int_a^{2a} \frac{2a - y}{a}.$$

Для ограничения области значений функции принадлежности целесообразно ввести логические переменные:

$$w_1 = \begin{cases} 1, \text{если}\, 0 \le y \le a \\ 0, \text{в противномслучае} \end{cases},\quad w_2 = \begin{cases} 1, \text{если}\, a \le y \le 2a \\ 0, \text{в противномслучае} \end{cases},$$

Тогда

$$A = w_1\left(\frac{y}{a}\right) + w_2\left(\frac{2a - y}{a}\right).$$

В виде суммы для термина «примерно один» ФП примет вид:

$$A = \frac{0}{0} + \frac{0{,}25}{0{,}25a} + \frac{0{,}5}{0{,}5a} + \frac{0{,}75}{0{,}75a} + \frac{1}{a} + \frac{0{,}75}{1{,}25a} + \frac{0{,}5}{1{,}5a} + \frac{0{,}25}{1{,}75a} + \frac{0}{2a}.$$

В виде вектора степеней функции принадлежности для нечеткого термина «примерно один» нечеткое множество А запишется:

V_A = {0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 0.75, 0.5, 0.25, 0}.

Пустое нечеткое множество

Нечеткое множество *A*, функция принадлежности которого равна 0, на всей области определения *Y*, называется пустым, обозначается $\varnothing$ (рис. 3.7).

$\varnothing$: $\mu_{\varnothing}(y)=0,\ \forall y \in Y$.

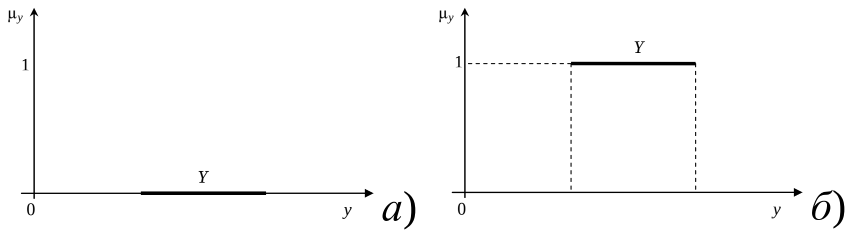


Рис. 3.7 Нечеткое множество: а – пустое; б – универсальное

Универсальное нечеткое множество

Нечеткое множество A, функция принадлежности которого равна 1, на всей области определения X, называется универсальным и обозначается U.

U: $\mu_U(y)=1, \forall y \in Y$.

Пустое и универсальное множества соответствуют предельным случаям, поэтому выражение $\varnothing \leq A \leq U$ справедливо для любого нечеткого множества A.

Высота нечеткого множества

Высотой нечеткого множества h называется максимальное значение, из принимаемых величин функцией принадлежности на всей предметной области Y:

$h = \sup\{\mu_A(x)\}$,

где *sup* – супремум (supremum, от лат. *наивысшее значение грани*) берется по всем значениям функции принадлежности для элементов $y \in Y$.

Нормальные нечеткие множества

В монографии А. Пегата утверждается, что допустимый диапазон значений функции принадлежности не обязательно ограничивается диапазоном от 0 до 1. Теоретико-множественные операции не выходят за пределы данного интервала, однако, при выполнении различных арифметических операций, например, мягкий минимум значение степени принадлежности могут получаться как меньше 0 так и больше 1.

Нечеткое множество называется **нормальным**, если его функция принадлежности принимает значение в диапазоне от 0 до 1

$$\mu_A = \frac{\mu_A(y)}{\sup_y \mu_A(y)} \in [0,\ldots,1]$$

где $\sup_y \mu_A(y)$ – максимальное значение степени принадлежности и существует хотя бы один элемент, у которого степень принадлежности равна $\sup_y \mu_A(y)=1$ (рис. 8, *а*).

Нечеткое множество называется субнормальным если максимальное значение его функции принадлежности меньше 1 (рис. 8, *б*). Если нечеткое множество субнорамально, то его всегда можно преобразовать к нормальному (нормировать), для этого все значения функции принадлежности $\mu_A(x)$ необходимо разделить на её максимальное значение.

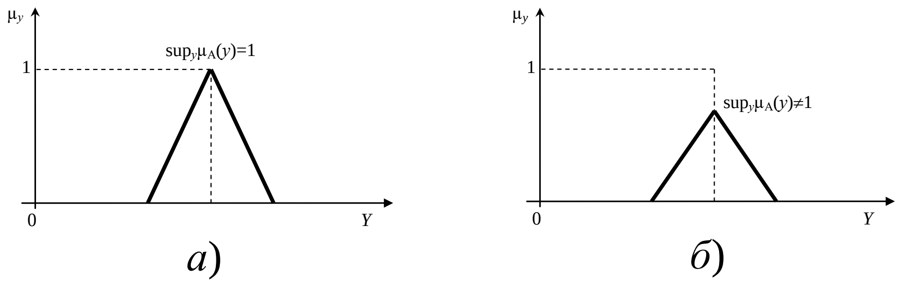


Рис. 8 Нечеткое множество: *а* – нормальное; б – субнормальное

Рассмотрим пример преобразования субнормального нечеткого множества Y', имеющего функцию принадлежности (рис. 9):

$$\mu_{y'}(x)=0{,}5/(1+(50-x)^2),$$

к нормальному нечеткому множеству для значений $x\in[30;\ 70]$ с дискретным шагом, равным 5.

Для указанных величин $x\in[30;\ 70]$ степени функции принадлежности субнормального нечеткого множества примут следующие значения:

x,мм	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\mu_{y'}(x)$	0,001	0,002	0,005	0,019	0,5	0,019	0,005	0,002	0,001

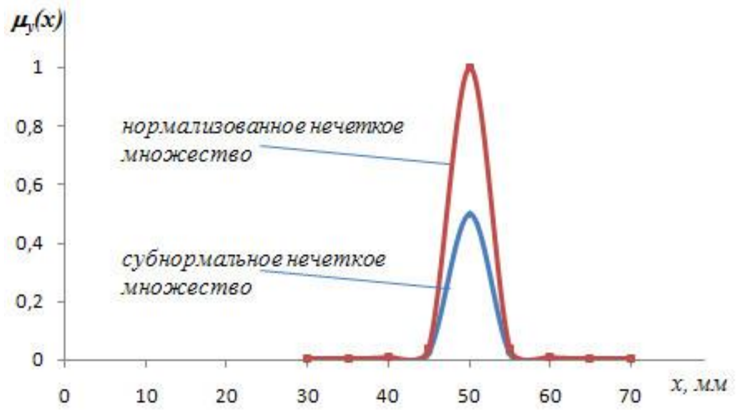


Рис. 9 Нормализация субнормального нечеткого множества

$\mu_y'(x)$=0,5/(1+(50–x)^2)

Нормализация нечеткого множества, выполняется путем деления максимального значения высоты субнормального нечеткого множества (h=0,5) на все значения $\mu_y'(x)$:

x,мм	30	35	40	45	50	55	60	65	70
$\mu_y(x)$	0,002	0,004	0,01	0,038	1	0,038	0,01	0,004	0,002

Графическое решение рассмотренного примера представлено на рисунке 9.

Носитель нечеткого множества

Носителем нечеткого множества Y называется конечное множество $S(A)$, содержащие элементы универсального множества, для которых значения функции принадлежности строго больше нуля:

$S(A)$ = suppA ={ x: $\mu_A(x)$>0, $x \in X$ }.

Ядро нечеткого множества

Четкое подмножество области определения X, содержащее все элементы, принадлежащие множеству A со степенью, равной 1:

$C(A)$ = coreA ={ x: $\mu_A(x)$=1, $x \in X$ }.

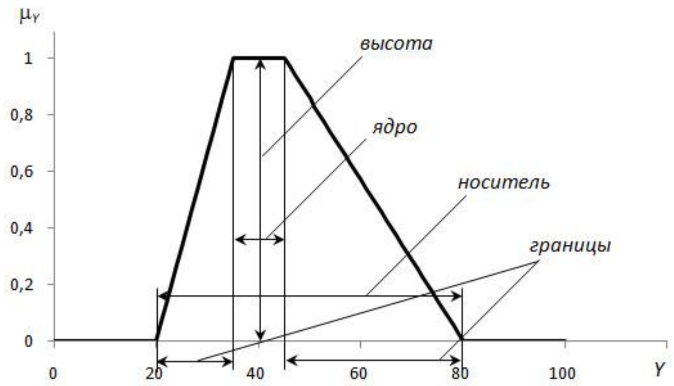


Рис. 10 Показатели нечеткого множества

Границы нечеткого множества

Границами нечеткого множества *A* называются такие элементы универсального множества *X*, для которых значения функции принадлежности находятся в диапазоне от 0 до 1

$A_{гр} = \{\ x,\ \mu_A(x)\ |\ 0<\mu_y(x)<1 : \forall x \in X\ \}.$

Множество α–уровня (срезов)

Альфа-уровнями нечеткого множества *A* называется множество A^{α}, удовлетворяющее следующему условию

$A^{\alpha} = \{\ y \in Y\ |\ \mu_A(y) > \alpha,\ \alpha \in [0,\ 1]\ \}.$

При α=0 нечеткое множество совпадает с носителем, при α=1, оно совпадает с ядром (см. рис. 11).

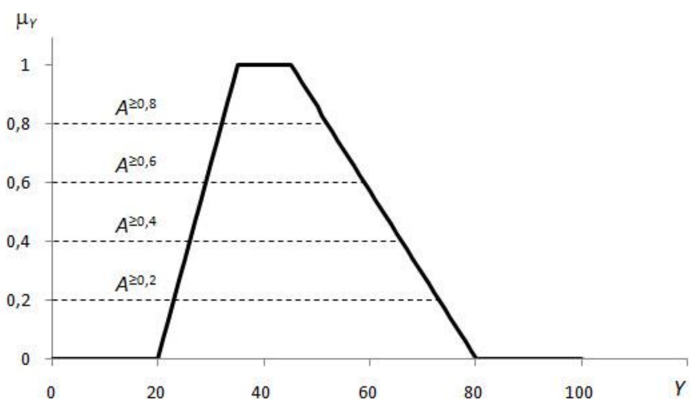


Рис. 11 A^{α} срезы нечеткого множества

По множеству α-уровня можно восстановить с требуемой точностью его функцию принадлежности, используя формулу

$$\mu_A(y) = \sup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \cdot \mu_A > \alpha(y)) \,. \qquad (4)$$

Рассмотрим пример восстановления нечеткого множества по его α-срезам. Пусть задано нечеткое множество:

$$A = \left\{ \frac{0.1}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.2}{8} + \frac{0.1}{9} \right\}$$

И альфа-срезы $A^{\geq\alpha}$:

$$A^{\geq 1} = \left\{ \frac{1}{6} \right\} \;;$$

$$A^{\geq 0.6} = \left\{ \frac{0.7}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} \right\} \;;$$

$$A^{\geq 0.2} = \left\{ \frac{0.3}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.2}{8} \right\} \;;$$

$$A^{\geq 0} = \left\{ \frac{0.1}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.9}{7} + \frac{0.2}{8} + \frac{0.1}{9} \right\} \;.$$

Отметим, что степени принадлежности α-срезам принимают только значения 0 или 1 (рис. 3.11).

$$\mu_A(y) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \left\{ \begin{aligned} & 1\cdot\left(\frac{1}{6}\right) + 0.6\left(\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\right) + 0.2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8}\right) + \\ & + 0\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right) \end{aligned} \right\} =$$

$$= \left(\frac{0}{1},\frac{0.2}{2},\frac{0.2}{3},\frac{0.2}{4},\frac{0.6}{5},\frac{1}{6},\frac{0.6}{7},\frac{0.2}{8},\frac{0}{9}\right)$$

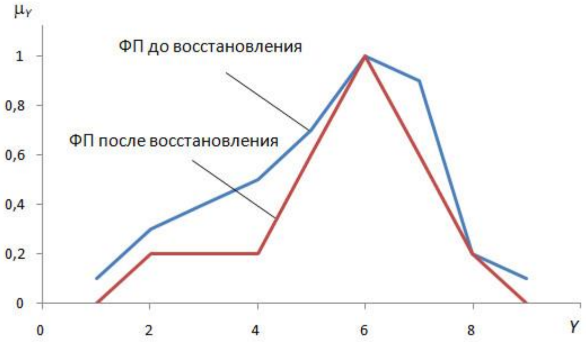


Рис. 3.11 Восстановление функции принадлежности по α-срезам

Для более точного восстановления исходной функции принадлежности, необходимо большее количество альфа-уровней.

Модификаторы растяжения и концентрации

Лингвистические модификаторы функции принадлежности определяется на основе операций растяжения DIL(A) или концентрации CON(A), а также операций повышения и понижения контрастности нечеткого множества.

В результате выполнения операции растяжения нечеткого множества $A=\{y, \mu_A(y)\}$ получается новое нечеткое множество $A_{\mathrm{DIL}(A)}=\{y, \mu_{\mathrm{DIL}(A)}(y)\}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\mathrm{DIL}(A)}(y)= \mu_A(y)^{0,5},\ \forall y\in Y.$$

В результате выполнения операции концентрации нечеткого множества $A=\{y, \mu_A(y)\}$ получается новое нечеткого множество $A_{\mathrm{CON}(A)}=\{y, \mu_{\mathrm{CON}(A)}(y)\}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\mathrm{CON}(A)}(y)= \mu_A(y)^2,\ \forall y\in Y.$$

Действие лингвистических модификаторов представлено ниже в виде графиков (рис. 12).

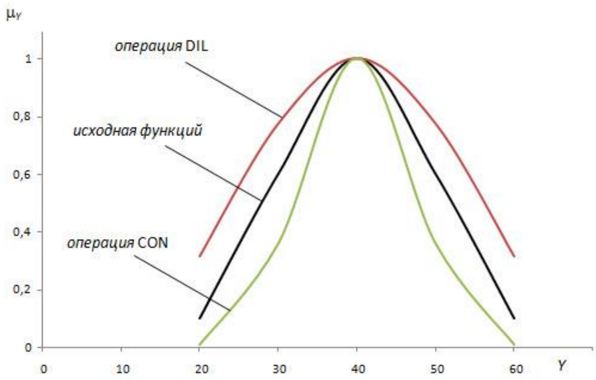


Рис. 12 Операторы растяжения и концентрации

Оператор повышения контрастности

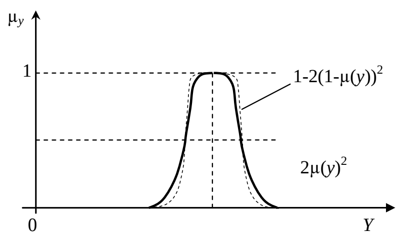
Задается с помощью двух функций принадлежности, первая из которых соответствует степеням принадлежности, меньше 0,5, другая больше 0,5 (рис. 13, *а*).

$$\mu_{INT(A)} = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & \text{для}\ \mu_A(x) < 0.5 \\ 1-2(1-\mu_A(x))^2 & \text{для}\ \mu_A(x) > 0.5 \end{cases}$$

Оператор понижения контрастности

Задается с помощью двух функций принадлежности, первая из которых соответствует степеням принадлежности, меньше 0,5, другая больше 0,5 (рис. 13, *б*).

$$\mu_{BLR(A)} = \begin{cases} 1-2(1-\mu_A(x))^2 & \text{для}\ \mu_A(x) > 0.5 \\ 2(\mu_A(x))^2 & \text{для}\ \mu_A(x) < 0.5 \end{cases}$$



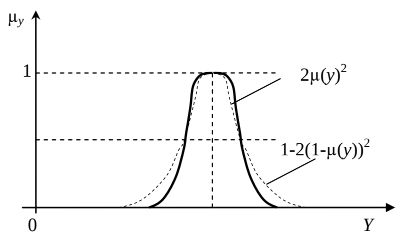


Рис. 13 Нечеткие операторы: а – повышения контрастности;
б – понижения контрастности

Лингвистическая переменная

Это входная или выходная переменная в нечеткой системе, позволяющая трансформировать качественные оценки в математическую форму. Причем её параметрами являются нечеткие слова или словосочетания естественного или искусственного языка. Например: вращение ротора, скорость корабля, температура в помещении, возраст человека и т.д.

Лингвистическое терм-множество переменной

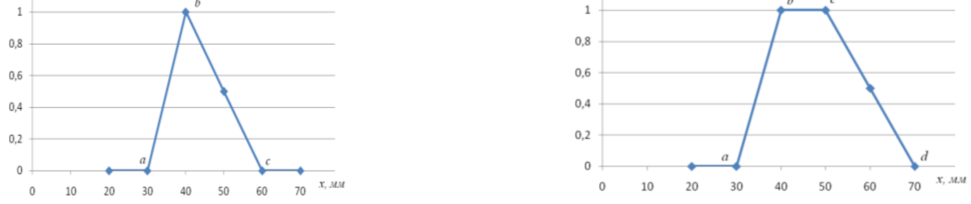
Называется конечное множество всех возможных значений лингвистической переменной. Например:

X={негативный, позитивный}={x_N, x_P}
Y={маленький, средний, большой}={y_S, y_M, y_B}

4. Типы функций принадлежности

Кусочно-линейные функции принадлежности

Кусочно-линейные ФП состоят из отрезков прямых линий, которые образуют непрерывную функцию. Наиболее используемые в практических приложениях являются: треугольная (рис. 14, *а*) и трапециевидная (рис. 14, *б*) функции принадлежности, которые заданы на универсальном множестве X=[20, 70] действительных чисел, характеризующих, например, диаметр обрабатываемой детали в диапазоне от 20 до 70 мм.



а) *б*)

Рис. 14 Графическое представление ФП: *а* – треугольная ФП; б – трапециевидная ФП

Треугольная функция принадлежности задаётся в виде

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & c\le x\end{cases},$$

где *a, b, c* – действительные числовые параметры, удовлетворяющие условию $a \le b \le c$.

Для рисунка 14, *а* значения этих параметров: a=30, b=40, c=60. При этом носителем является интервал (a, c), ядро {b}, а границы ограничены интервалами [a, b] и [b, c].

Трапециевидная функция принадлежности определяется выражением

$$f(x;a,b,c,d)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & c\le x\le d\\ 0, & d\le x\end{cases},$$

где *a, b, c, d* – действительные числовые параметры, удовлетворяющие условию $a \le b \le c \le d$.

Для рисунка 14, *б* значения этих параметров: a=30, b=40, c=50 и d=60. При этом носителем является интервал (a, d), ядро (b, c), а границы ограничены интервалами [a, b] и [c, d].

С целью получения более хороших свойств нечеткой модели при её адаптации функции принадлежности целесообразно записывать в виде одной параметризированной формулы. Для этого необходимо ввести логические операторы, которые будут ограничивать область значений треугольной и трапециевидной функций принадлежности. Логические переменные u_1, u_2, u_3, u_4, u_5: (рис. 15)

$$u_1=\begin{cases}1 & \text{для } a<y\le b,\\ 0 & \text{в других случаях,}\end{cases}\qquad u_2=\begin{cases}1 & \text{для } b<y\le c,\\ 0 & \text{в других случаях,}\end{cases}$$

$$u_3=\begin{cases}1 & \text{для } d<y\le e,\\ 0 & \text{в других случаях,}\end{cases}\qquad u_4=\begin{cases}1 & \text{для } e<y\le f,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

$$u_5=\begin{cases}1 & \text{для } f<y\le g,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

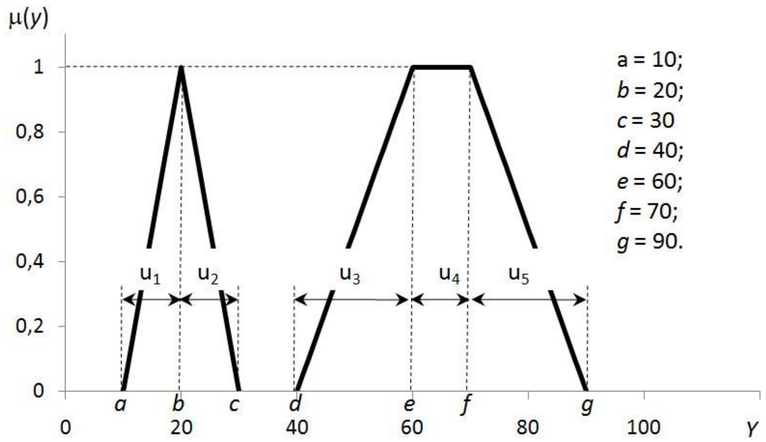


Рис. 15 Логическое представление функций принадлежности

Параметризированная формула для треугольной функции принадлежности примет вид:

$$A_{треуг} = u_1\left(\frac{y-a}{b-a}\right) + u_2\left(\frac{c-y}{c-b}\right).$$

Параметризированная формула для трапециевидной функции принадлежности запишется:

$$A_{трапец} = u_3\left(\frac{y-d}{e-d}\right) + u_4 + u_5\left(\frac{g-y}{g-f}\right).$$

При использовании нескольких термов обобщенная формула для параметризированной треугольной функции принадлежности будет состоять из логических переменных u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14} (рис. 16):

$$u_{11} = \begin{cases} 1 & для\, a < x \le b, \\ 0 & в\, других\, случаях, \end{cases} \quad u_{21} = \begin{cases} 1 & для\, b < x \le c, \\ 0 & в\, других\, случаях, \end{cases}$$

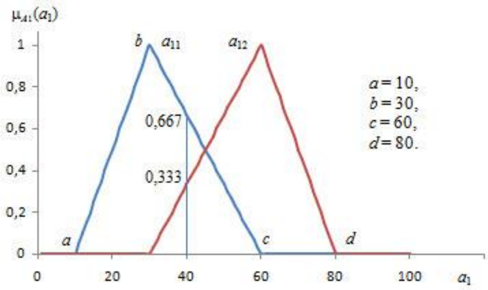
$$u_{12} = \begin{cases} 1 & для\, b < x \le c, \\ 0 & в\, других\, случаях, \end{cases} \quad u_{22} = \begin{cases} 1 & для\, c < x \le d, \\ 0 & в\, других\, случаях. \end{cases}$$

и выражения

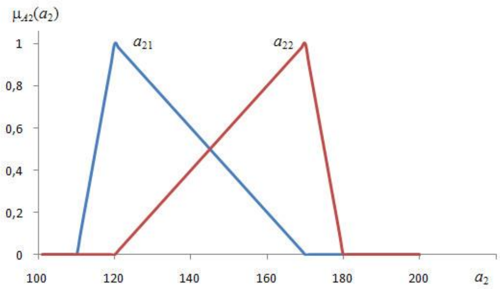
$$A = \sum_{i=1}^{k} a_i = \left\{ u_{11}\int_a^b \left(\frac{x_i - a}{b-a}\right) / x_1 + u_{12}\int_b^c \left(\frac{c - x_i}{c-b}\right) / x_1 \right\} +$$

$$+ \left\{ u_{21}\int_b^c \left(\frac{x_i - b}{c-b}\right) / x_2 + u_{22}\int_c^d \left(\frac{d - x_i}{d-c}\right) / x_2 \right\},$$

где a, b, c, d – параметры параметризированной функции принадлежности



$$A_1 = \{a_{11}\} + \{a_{12}\} =$$
$$= \left\{ \int_{10}^{30} \left(\frac{a_i - 10}{30 - 10} \right) / a_1 + \int_{30}^{60} \left(\frac{60 - a_i}{60 - 30} \right) / a_1 \right\} +$$
$$+ \left\{ \int_{30}^{60} \left(\frac{a_i - 30}{60 - 30} \right) / a_1 + \int_{60}^{80} \left(\frac{80 - a_i}{80 - 60} \right) / a_1 \right\}.$$



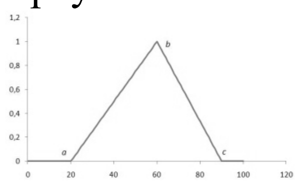
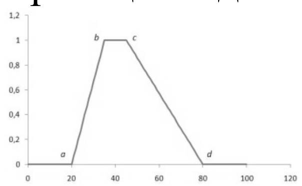
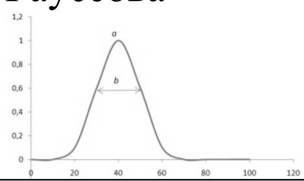
$$A_2 = \{a_{21}\} + \{a_{22}\} =$$
$$= \left\{ \int_{110}^{120} \left(\frac{a_i - 110}{120 - 110} \right) / a_2 + \int_{120}^{170} \left(\frac{170 - a_i}{170 - 120} \right) / a_2 \right\} +$$
$$+ \left\{ \int_{120}^{170} \left(\frac{a_i - 120}{170 - 120} \right) / a_2 + \int_{170}^{180} \left(\frac{180 - a_i}{180 - 170} \right) / a_2 \right\}.$$

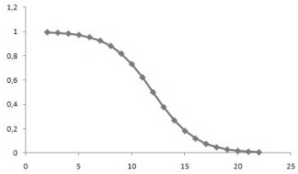
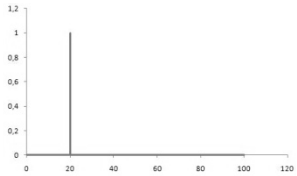
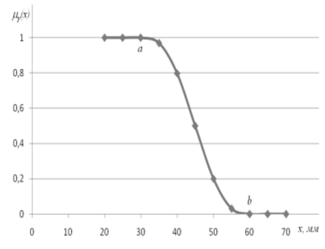
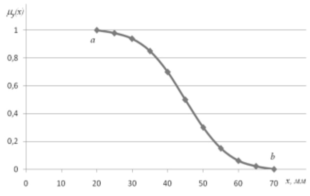
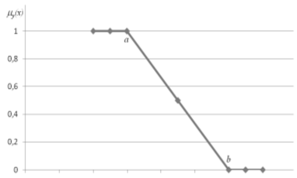
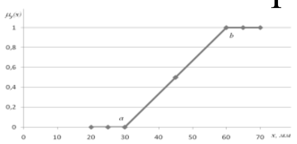
Рис. 16 Примеры параметризированный функций принадлежности состоящих из нескольких термов

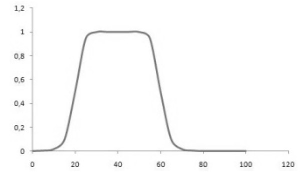
Сведем функции принадлежности в общую таблицу (табл. 2)

Таблица 2

Типы функций принадлежности

Наименование и вид функции принадлежности	Формула	Параметры
Треугольная 	$f(x;a,b,c)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ \frac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c;\\ 0, & c\le x.\end{cases}$	x = 1..100; a = 20; b = 60; c = 90.
Трапециевидная 	$f(x;a,b,c,d)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 1, & b\le x\le c;\\ \frac{c-x}{c-b}, & c\le x\le d;\\ 0, & d\le x.\end{cases}$	x = 1..100; a = 20; b = 35; c = 45; d = 80;
Гауссова 	$f(x;a,b)=e^{\left(-\frac{[x-a]^2}{2b^2}\right)}.$	x = 1..100; a = 40; b = 10.

Наименование и вид функции принадлежности	Формула	Параметры
Сигмодальная 	$f(x;a,b,c)=\dfrac{1}{1+e^{(b[x-a+c])}}.$	x = 2..22; a = 13; b = 0,5; c = 1.
Синглтонная 	$f(x;a)=\begin{cases}1, x=a;\\ 0, x\neq a.\end{cases}$	x = 0..100; a = 20;
Z-образная функция 	$f_z(x;a,b)=\begin{cases}1, & x<a;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right), & a\le x\le b;\\ 0, & b<x.\end{cases}$ $f_z(x;a,b)=\begin{cases}1, & x<a;\\ 1-2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\le\frac{a+b}{2};\\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2}\le x<b;\\ 0, & b\le x.\end{cases}$	x = 20..70; a = 30; b = 60.
S-образная функция 	$f_s(x;a,b)=\begin{cases}1, & x<a;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-b}{b-a}\pi\right), & a\le x\le b;\\ 0, & b<x;\end{cases}$ $f_s(x;a,b)=\begin{cases}1, & x<a;\\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\le\frac{a+b}{2};\\ 1-2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2}\le x<b;\\ 0, & b\le x.\end{cases}$	x = 20..70; a = 30; b = 60.
Линейная Z-образная 	$f_{\downarrow}(x;a,b)=\begin{cases}1, & x\le a;\\ \frac{b-x}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & b\le x.\end{cases}$	x = 20..70; a = 30; b = 60.
Линейная Z-образная 	$f_{\uparrow}(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b;\\ 1, & b\le x.\end{cases}$	x = 20..70; a = 30; b = 60.
П-образная функция	$f(x;a,b,c)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^{2b}}.$	x = 0..100; a = 20; b = 5;

Наименование и вид функции принадлежности	Формула	Параметры
		$c = 40$.

5. Алгоритмы нечеткого вывода

Основной целью создания новых нечетких моделей является обеспечение большей точности и сокращения вычислительных процедур для дефаззификации выходного результата. Одной из наиболее успешных нечетких моделей используемых в нечетких регуляторах, является нечеткая модель Мамдани..

Рассмотрим модель Мамдани для SISO- и MISO системы более подробно и другие алгоритмы работы нечетко-логических выводов, приведем их недостатки и покажем пути устранения ошибок.

Модель Мамдани для SISO-системы.

Пусть заданы входная A и выходная B переменные (рис. 17), которые описываются системой из трех нечетких правил:

R_1: Если $a=a_1$ То $b=b_2$;
R_2: Если $a=a_2$ То $b=b_1$;
R_3: Если $a=a_3$ То $b=b_3$.

где a_1 – примерно 1; a_2 – примерно 3; a_3 – примерно 10; b_1 – примерно 3,25; b_2 – примерно 1; b_3 – примерно 10.

а)   *б*)

Рис. 16. Модель Мамдани для SISO-системы: *а* – входная переменная *A*; *б* – выходная переменна *B*.

Пусть моделируемая SISO-система реализует функцию

$$b = (0{,}5a - 2)^2 + 1\,.$$

Вывод в модели Мамдани (ММ) осуществляется по методу центра тяжести с учетом упрощенного вывода. Например, a = 4, тогда a_1=0; a_2=0,857; a_3=0,143.

С учетом упрощенного вывода:

$$b_{MM} = \frac{(0.857 \cdot 3{,}25) + (0 \cdot 1) + (0{,}143 \cdot 10)}{0{,}857 + 0 + 0{,}143} = 2{,}28.$$

Сведем данные полученные при моделировании функции SIS0-системы и при моделировании модели Мамдани в таблицу 3.

Таблица 3

Результаты моделирования

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_{siso}	3,25	2	1,25	1	1,25	2	3,25	5	7,25	10
b_{MM}	3,25	2,125	1	2,28	3,57	4,85	6,14	7,42	8,71	10

(Примечание. Siso – данные получены при моделировании уравнения b=(0,5a-2)^2+1; ММ – данные получены при моделировании с помощью модели Мамдани).

Данные полученные в таблице 3 в графической форме предоставлены на рисунке 17.

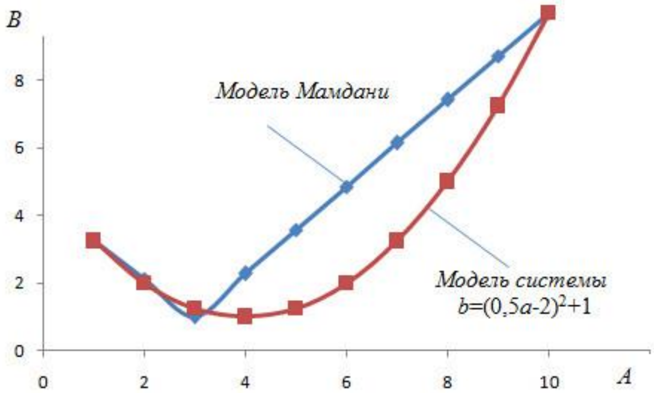


Рис. 17. Результаты моделирования.

Модель Мамдани для MISO-системы.

Пусть заданы входные A и B переменные (рис. 18), которые описываются системой из девяти нечетких правил:

R_1: Если $a=a_1$ И $b=b_1$ То $y_1\approx-2$;
R_2: Если $a=a_1$ И $b=b_2$ То $y_2\approx+4$;
R_3: Если $a=a_1$ И $b=b_3$ То $y_3\approx-5$;
R_4: Если $a=a_2$ И $b=b_1$ То $y_4\approx+1$;
R_5: Если $a=a_2$ И $b=b_2$ То $y_5\approx+6$;
R_6: Если $a=a_2$ И $b=b_3$ То $y_6\approx-2$;
R_7: Если $a=a_3$ И $b=b_1$ То $y_7\approx+3$;
R_8: Если $a=a_3$ И $b=b_2$ То $y_8\approx+7$;
R_9: Если $a=a_3$ И $b=b_3$ То $y_9\approx+5$;

где a_1 – примерно 1; a_2 – примерно 3; a_3 – примерно 10; b_1 – примерно 10; b_2 – примерно 15; b_3 – примерно 30.

а) *б*)

Рис. 18. Модель Мамдани для MISO-системы: *а* – входная переменная *A*; *б* – входная переменна *B*.

Вывод в модели Мамдани (ММ) осуществляется по методу центра тяжести с учетом упрощенного вывода. Например, a = 5, и b=21 тогда a_1=0; a_2=0,83; a_3=0,17 и b_1=0; b_2=0,6; b_3=0,4. Составим для каждого правила таблицу активизации. Данные сведем в таблицу 4.

Таблица 4

Таблица активизации нечетких правил

Правило	a_i	b_i	$\min(a_i;b_i)$	y_i	$y_i\cdot \min(a_i;b_i)$
R1	0	0	0	-2	0
R2	0	0,6	0	4	0
R3	0	0,4	0	-5	0
R4	0,83	0	0	1	0

R5	0,83	0,6	0,6	6	3,6
R6	0,83	0,4	0,4	-2	-0,8
R7	0,17	0	0	3	0
R8	0,17	0,6	0,17	7	1,17
R9	0,17	0,4	0,17	5	0,83
Σ			1,33		4,8

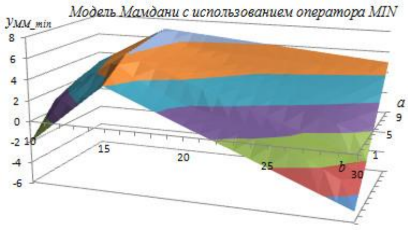
С учетом данных таблицы 4 на выходе нечеткой MISO-системы, работающей на основе модели Мамдани будет:

$$y_{MM\_\min} = \frac{4.8}{1,3} = 3,6.$$

Для реализации модели Мамдани можно использовать и мягкие операторы, например, операции алгебраического произведения PROD или нахождения среднего арифметического MEAN, тогда

$$y_{MM\_prod} = \frac{3.37}{1} = 3,37, \quad y_{MM\_mean} = \frac{8.03}{3} = 2,68.$$

Поверхность отклика нечеткой MISO-системы, работающей на основе модели Мамдани, для различных операторов (MIN, PROD, MEAN) приведена на рисунке 18.



а)

б)

в)

Рис. 18. Поверхность отклика нечеткой MISO-системы для модели Мамдани: *а* – с использованием оператора MIN; *б* – с использованием оператора PROD; *в* – с использованием оператора MEAN.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА МАМДАНИ

Выполняется в три этапа.

1 Этап фаззификации входных данных. Формируются ФП, описывающие входные и выходные параметры. Затем для системы управления на основе экспертной информации разрабатываются НПУ. После того как система начала функционирование с помощью измерительных средств определяются параметры, влияющие на определение степеней истинности для каждой из предпосылки НПУ $\alpha_1(a)$, $\alpha_2(a)$, $\alpha_1(б)$, $\alpha_2(б)$.

2. Этап логического вывода. *Шаг импликации* в алгоритме Мамдани осуществляется с использованием операции минимума. При этом находятся уровни отсечения для каждого НПУ по формуле:

$$\alpha_i=\alpha_i(a)\wedge\alpha_i(б).$$

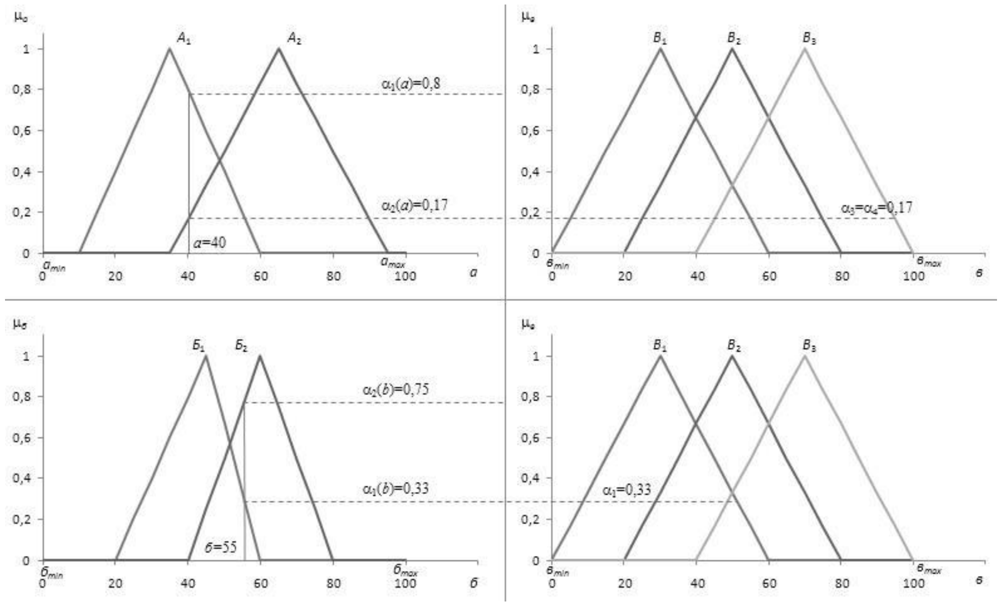
Затем находятся усеченные функции принадлежности для каждого из выходного терма с помощью операции минимума

$$B'_i=\alpha_i\wedge B_i.$$

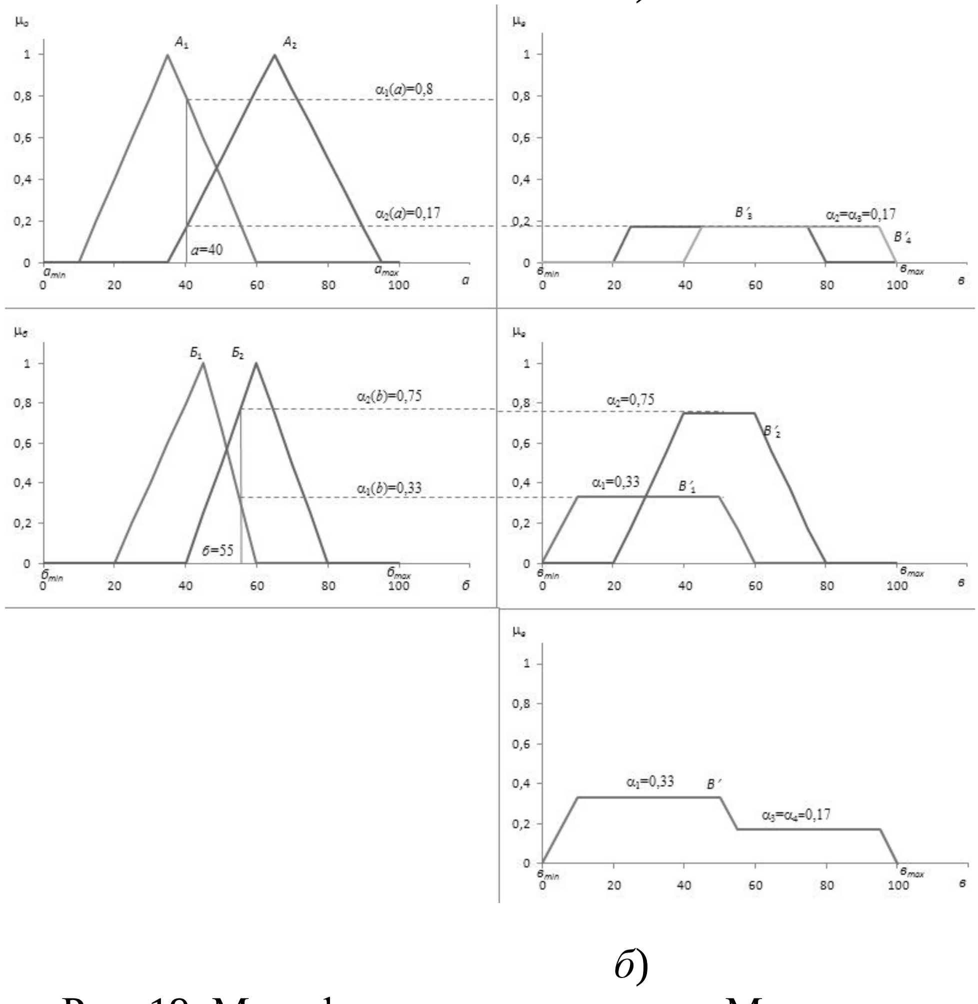
Шаг композиции: для объединения усеченных ФП используется операция максимума, что приводит к получению выходной переменной с функцией принадлежности $B' = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} B'_i = \alpha_i \wedge B_i$.

3. Этап дефаззификации. На данном этапе с помощью одного из методов дефаззификации находится выходное значение системы. Рассмотрим реализацию нечетко-логического вывода для системы заданной четырьмя НПУ.

Этап фаззификации. На этом этапе определяются входные переменные, определяются интервалы диапазона входной переменной, и значения этого диапазона разбиваются на определенное количество термов (рис. 19).



а)



б)

Рис. 19. Модифицированная модель Мамдани: *а* – взаимосвязь между входными и выходными переменными; *б* – этапы НЛВ: импликация и композиция

НПУ$_1$: ЕСЛИ «*а* есть $А_1$» И «*б* есть $Б_1$» ТО «*в* есть $В_3$»;
НПУ$_2$: ЕСЛИ «*а* есть $А_1$» И «*б* есть $Б_2$» ТО «*в* есть $В_2$»;
НПУ$_3$: ЕСЛИ «*а* есть $А_2$» И «*б* есть $Б_1$» ТО «*в* есть $В_2$»;
НПУ$_4$: ЕСЛИ «*а* есть $А_2$» И «*б* есть $Б_2$» ТО «*в* есть $В_1$».

При этом ФП для входных переменных *А* и *Б* запишутся

$$A=\{A_1\}+\{A_2\}=\left\{\int_{10}^{35}\left(\frac{a-10}{35-10}\right)/a+\int_{35}^{60}\left(\frac{60-a}{60-35}\right)/a\right\}+$$
$$+\left\{\int_{35}^{65}\left(\frac{a-35}{65-35}\right)/a+\int_{65}^{90}\left(\frac{90-a}{90-65}\right)/a\right\},$$
$$Б=\{Б_1\}+\{Б_2\}=\left\{\int_{20}^{45}\left(\frac{б-20}{45-20}\right)/б+\int_{45}^{60}\left(\frac{60-б}{60-45}\right)/б\right\}+$$
$$+\left\{\int_{40}^{60}\left(\frac{б-40}{60-40}\right)/б+\int_{60}^{80}\left(\frac{80-б}{80-60}\right)/б\right\}.$$

Для выходной переменной В ФП примет вид

$$B=\{B_1\}+\{B_2\}+\{B_3\}=\left\{\int_{0}^{30}\left(\frac{в}{30}\right)/в+\int_{30}^{60}\left(\frac{60-в}{60-30}\right)/в\right\}+$$
$$+\left\{\int_{20}^{50}\left(\frac{в-20}{50-20}\right)/в+\int_{50}^{80}\left(\frac{80-в}{80-50}\right)/в\right\}+\left\{\int_{40}^{70}\left(\frac{в-40}{70-40}\right)/в+\int_{70}^{100}\left(\frac{100-в}{100-70}\right)/в\right\}.$$

Пусть сенсоры системы определили следующие значения: *а*=40 и *б*=55. С помощью графиков (рис. 19) термов ФП находим степени принадлежности

$\alpha_1(а)=0{,}8$; $\alpha_2(а)=0{,}17$; $\alpha_1(б)=0{,}33$; $\alpha_2(б)=0{,}75$.

<u>Этап логического вывода</u>. Данный этап разбивается на две операции: импликацию и композицию.

Операция импликации. Находим уровни отсечения заключений для каждого из четырех НПУ с использованием операции min

$\alpha_1=\alpha_1(а)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}8;\ 0{,}33\}=0{,}33$; $\alpha_2=\alpha_1(а)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}8;\ 0{,}75\}=0{,}75$;

$\alpha_3=\alpha_2(a)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}17;\quad 0{,}33\}=0{,}17;\quad \alpha_4=\alpha_2(a)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}17;\ 0{,}75\}=0{,}17$.

Определение усеченных функций принадлежности выходных термов

$B'_1=\alpha_1\wedge B_1$; $B'_2=\alpha_2\wedge B_2$; $B'_3=\alpha_3\wedge B_2$; $B'_4=\alpha_3\wedge B_3$.

Операция композиции. Необходимо с использованием операции максимума объединить усеченные ФП в одну выходную (см. рис. 19)

$B'=B'_1\vee B'_2\vee B'_3\vee B'_4=[\alpha_1\wedge B_1]\vee[\alpha_2\wedge B_2]\vee[\alpha_3\wedge B_2]\vee[\alpha_4\wedge B_3]$.

При реализации данной процедуры возникает ссылка у двух правил НП$_2$ и НП$_3$ на один выходной терм B_2. При выполнении композиции в ходе объединения выходного множества с учетом выполнения условия $\{[\alpha_2\wedge B_2]\vee[\alpha_3\wedge B_2]\}$ значение терма B_2 будет соответствовать минимальному значению из двух предпосылок, ссылающихся на одно заключение $\min[B'_2;\ B'_3]=0{,}75\wedge 0{,}17=0{,}17$.

Этап дефаззификации. На данном этапе на основе данных таблицы 5.7 с помощью модели дефаззификации центра тяжести находится результирующее значение выходного параметра.

Таблица 5

Дефаззификация нечеткой модели Мамдани

$в$	B'_1	B'_3	B'_4	$B'=B'_1\vee\vee B'_3\vee B'_4$	$в\cdot B'$
0	0	0	0	0	0
5	0,17	0	0	0,17	0,85
10	0,33	0	0	0,33	3,3
15	0,33	0	0	0,33	4,95
20	0,33	0	0	0,33	6,6
25	0,33	0,17	0	0,33	8,25
30	0,33	0,17	0	0,33	9,9
35	0,33	0,17	0	0,33	11,55
40	0,33	0,17	0	0,33	13,2

$в$	B'_1	B'_3	B'_4	$B'=B'_1\vee$ $\vee B'_3\vee B'_4$	$в\cdot B'$
45	0,33	0,17	0,17	0,33	14,85
50	0,33	0,17	0,17	0,33	16,5
55	0,17	0,17	0,17	0,17	9,35
60	0	0,17	0,17	0,17	10,2
65	0	0,17	0,17	0,17	11,05
70	0	0,17	0,17	0,17	11,9
75	0	0,17	0,17	0,17	12,75
80	0	0	0,17	0,17	13,6
85	0	0	0,17	0,17	14,45
90	0	0	0,17	0,17	15,3
95	0	0	0,17	0,17	16,15
100	0	0	0	0	0
		Σ_2=4,67		Σ_1=204,7	

С учетом вышеуказанной формулы выходной значение найдется как

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{21}B'в}{\sum_{i=1}^{21}B'}=\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}=\frac{204{,}7}{4{,}67}=43{,}8.$$

Недостаток алгоритма Мамдани заключатся в его низком быстродействии, которое объясняется тем, что для определения усеченной ФП на этапе композиции необходимо просматривать все НПУ. В данном случае это 2^2=4. С ростом количества входных переменных эта величина увеличивается, что снижает оперативность принятия решений на основе этого алгоритма. Например, если на входе 3 входных переменных, имеющих по 5 термов, то для операции композиции необходимо будет перебрать 5^3=125 решений.

Для устранения вышеуказанного недостатка как один из вариантов решения данной проблемы является модификация модели Мамдани следующим образом. После этапа импликации целесообразно провести операцию минимизации для двух уровней отсечения, ссылающихся на один выходной терм B_2, то есть $\alpha_{21}=\alpha_2\wedge\alpha_3$=0,75$\wedge$0,17=0,17. Вследствие этого количество переборов в алгоритме сократится с четырех до трех. Используя данные предыдущего примера, *этап логического вывода* модифицируется.

Операция импликации. Находим уровни отсечения заключений для каждого из четырех НПУ с использованием операции min

$\alpha_1=\alpha_1(a)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}8;\ 0{,}33\}=0{,}33;$
$\alpha_2=\alpha_1(a)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}8;\ 0{,}75\}=0{,}75;$
$\alpha_3=\alpha_2(a)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}17;\ 0{,}33\}=0{,}17;$
$\alpha_4=\alpha_2(a)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}17;\ 0{,}75\}=0{,}17.$

Далее необходимо организовать проверку условий для каждого из выходного терма *если* $B_1>1$, $B_2>1$ и/или $B_3>1$, тогда необходимо минимизировать уровень отсечения для каждого выходного терма.

В примере B_2=2>1(Истина), тогда

$\alpha_{21}=\alpha_2\wedge\alpha_3=\min\{0{,}75;\ 0{,}17\}=0{,}17.$

И усеченные функции принадлежности запишутся по формулам

$B'_1=\alpha_1\wedge B_1;\ B'_2=\alpha_{21}\wedge B_2;\ B'_3=\alpha_3\wedge B_3.$

Операция композиции. Необходимо с использованием операции максимум объединить усеченные ФП в одну

$B'=B'_1\vee B'_2\vee B'_3=[\alpha_1\wedge B_1]\vee[\alpha_{21}\wedge B_2]\vee[\alpha_4\wedge B_3].$

Видно, что на этапе композиции количество переборов для принятия выходного решения сокращается с 4 до 3. Этап дефаззификации даст ответ аналогичный рассмотренному выше примеру.

При большем количестве входных переменных и термов ФП, описывающих их, эффект будет более значителен.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ЛАРСЕНА

Выполняется в три этапа, причем шаги модели Ларсена аналогичны модели Мамдани. Разница заключается в том, что при выполнении операции импликации усеченные ФП для выходных термов определяются с помощью мягкой операции алгебраического произведения (prod).

1. Этап фаззификации входных данных, аналогичен модели Мамдани. После того, как система начала функционирование с помощью измерительных средств, определяются степени принадлежности для каждой из предпосылки НПУ $\alpha_1(a)$, $\alpha_2(a)$, $\alpha_1(б)$, $\alpha_2(б)$.

2. Этап логического вывода. Шаг импликации такой же как и в модели Мамдани – для определения уровней отсечения используется операция жестокого минимума: $\alpha_i=\alpha_i(a)\wedge\alpha_i(б)$. Затем находятся усеченные функции принадлежности для каждого выходного терма с помощью операции произведения $B'_i=\alpha_i \cdot B_i$.

Шаг композиции аналогичен модели Мамдани:

$$B' = \bigvee_{i=1}^{n} B'_i = \alpha_i \wedge B_i \,.$$

3. Этап дефаззификации. С помощью одного из методов дефаззификации (см. п. 5.3) находится выходное значение системы.

Для модификации алгоритма Ларсена на этапе логического вывода необходимо организовать проверку на повторяющееся количество заключений НПУ для выходных термов ФП и, затем с помощью операции жесткого минимума определить уровень отсечения для каждого из выходного терма.

Рассмотрим пример, поясняющий реализацию нечетко-логического вывода с помощью алгоритма Ларсена. Данные аналогичны примеру, рассмотренному для реализации алгоритма Мамдани (рис. 19).

Как и в предыдущем примере степени принадлежности равны

$\alpha_1(a)$=0,8; $\alpha_2(a)$=0,17; $\alpha_1(б)$=0,33; $\alpha_2(б)$=0,75.

Тогда уровни отсечения

$\alpha_1=\alpha_1(a)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0,8;\ 0,33\}=0,33$;
$\alpha_2=\alpha_{21}\wedge\alpha_{22}=\min\{0,75;\ 0,17\}=0,17$.
$\alpha_3=\min\{0,17;\ 0,75\}=0,17$.

Однако усеченные функции принадлежности для каждого выходного терма определяются с помощью операции prod.

$B'_1=\alpha_1\cdot B_1$; $B'_2=\alpha_{21}\cdot B_2$; $B'_3=\alpha_3\cdot B_3$.

На этапе композиции с использованием операции максимум объединить усеченные ФП в одну (рис. 20)

$B'=B'_1\vee B'_2\vee B'_3$.

На этапе дефаззификации на основе данных таблицы 5.8 определяется выходное значение.

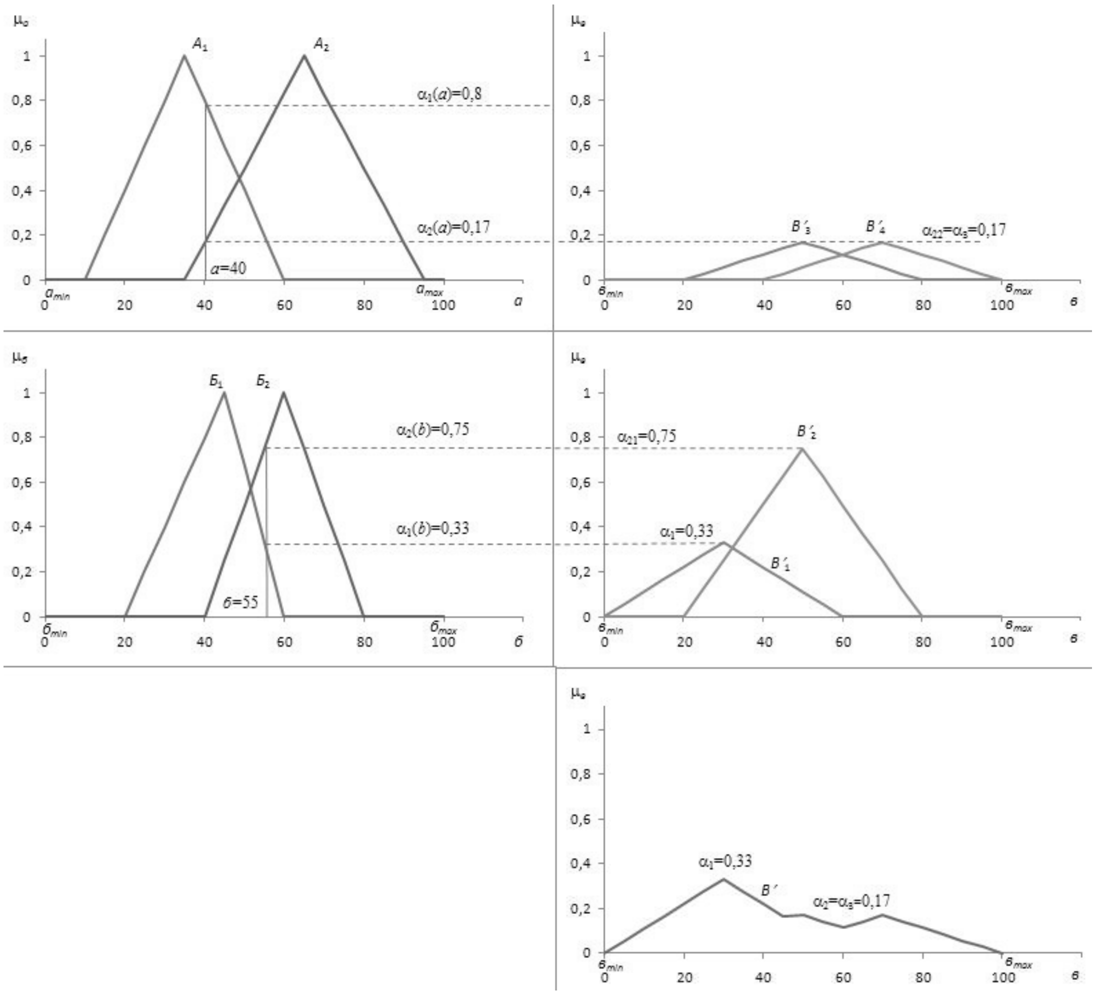


Рис. 20. Модель Ларсена, операции импликации и композиции

Таблица 6

Дефаззификации выходного значения

$в$	B'_1	B'_2	B'_3	$B'=B'_1\vee \vee B'_2\vee B'_3$	$в\cdot B'$
0	0	0	0	0	0
5	0,055	0	0	0,055	0,275
10	0,11	0	0	0,11	1,1
15	0,165	0	0	0,165	2,475
20	0,22	0	0	0,22	4,4
25	0,275	0,028333	0	0,275	6,875
30	0,33	0,056667	0	0,33	9,9
35	0,275	0,085	0	0,275	9,625
40	0,22	0,113333	0	0,22	8,8
45	0,165	0,141667	0,028333	0,165	7,425
50	0,11	0,17	0,056667	0,17	8,5
55	0,055	0,141667	0,085	0,141667	7,791667
60	0	0,113333	0,113333	0,113333	6,8
65	0	0,085	0,141667	0,141667	9,208333
70	0	0,056667	0,17	0,17	11,9
75	0	0,028333	0,141667	0,141667	10,625
80	0	0	0,113333	0,113333	9,066667
85	0	0	0,085	0,085	7,225
90	0	0	0,056667	0,056667	5,1
95	0	0	0,028333	0,028333	2,691667
100	0	0	0	0	0
				Σ_2=2,97	Σ_1=129,78

По методу центра тяжести находится выходное значение

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{21}B'в}{\sum_{i=1}^{21}B'}=\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}=\frac{129{,}7}{2{,}97}=43{,}6.$$

Отличие в результате по отношение к алгоритму Мамдани составляет менее 1 %.

МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ТСУКАМОТО

Предпосылки НПУ задаются так же, как и в алгоритме Мамдани, однако заключения ФП имеют вид монотонной функции: экспонента, парабола, константа, канторова лестница или функция Минковского.

1. Этап фаззификации входных данных. Здесь также с помощью измерительных средств определяются степени принадлежности для каждой из предпосылок НПУ $\alpha_1(a)$, $\alpha_2(a)$, $\alpha_1(б)$, $\alpha_2(б)$.

2. Этап логического вывода. Во время операции импликации находятся уровни отсечения для каждой предпосылки НПУ, используя операцию минимума $\alpha_i=\alpha_i(a)\wedge\alpha_i(б)$.

Затем на этапе композиции, используя известные уравнения заключений НПУ, определяются координаты по оси абсцисс

$в_i = B_i(\alpha_i)$.

3. Этап дефаззификации. С помощью одного из методов дефаззификации находится выходное значение системы

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i в_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Пусть ФП входных и выходных переменных определяются следующими уравнениями и НПУ (рис. 21):

НПУ$_1$: ЕСЛИ «*a* есть A_1» И «*б* есть $Б_1$» ТО «*в* есть B_1»;
НПУ$_2$: ЕСЛИ «*a* есть A_2» И «*б* есть $Б_2$» ТО «*в* есть B_2».

ФП для термов входных переменных *A* и *Б* записываются

$$A = \{A_1\} + \{A_2\} = \left\{ \int_0^{45} \left(0{,}0004 \cdot a^2 + 0{,}1\right) / a \right\} + \left\{ \int_0^{45} \left(0{,}18 \cdot a^{0{,}4} + 0{,}1\right) / a \right\},$$

$$Б = \{Б_1\} + \{Б_2\} = \left\{ \int_0^{45} \left(0{,}00001 \cdot б^3 + 0{,}15\right) / б \right\} + \left\{ \int_0^{45} \left(0{,}01 \cdot б^{1{,}15} + 0{,}15\right) / б \right\}.$$

ФП для термов выходной переменной *B* примет вид

$$B=\{B_1\}+\{B_2\}=\left\{\int\limits_0^{45}\left(-0{,}006\cdot в^{0,7}+1\right)/\,в\right\}+\left\{\int\limits_0^{45}\left(-0{,}045\cdot в^{0,8}+1\right)/\,в\right\}.$$

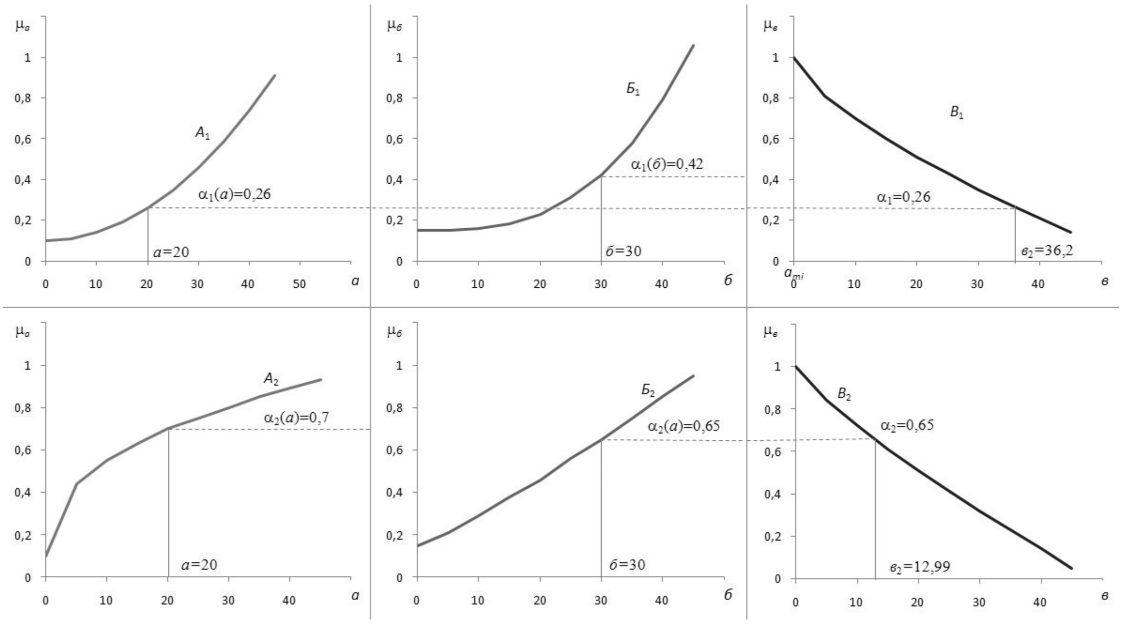


Рис. 21. Модель Тсукамото

На вход системы поступили значения *а*=20 и *б*=30. На первом этапе определяются степени принадлежности для входных переменных:

$\alpha_1(а)$=0,26; $\alpha_1(б)$=0,42; $\alpha_2(а)$=0,7; $\alpha_2(б)$=0,65.

На этапе логического вывода при реализации операции импликации находятся уровни отсечения

$\alpha_1=\alpha_1(а)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}26;\ 0{,}42\}=0{,}26$; $\alpha_2=\alpha_2(а)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}7;\ 0{,}65\}=0{,}65$.

На шаге композиции с учетом исходных уравнений B_1 и B_2 определяются координаты по оси абсцисс

$$в_1=\sqrt[0,7]{\frac{\alpha_1-1}{-0{,}06}}=12{,}33,$$

$$в_2=\sqrt[0,8]{\frac{\alpha_2-1}{-0{,}045}}=7{,}78.$$

При реализации третьего шага выполняется операции дефаззификации выходного значения по формуле

$$y = \frac{\alpha_1 в_1 + \alpha_2 в_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}26 \cdot 12{,}33 + 0{,}65 \cdot 7{,}78}{0{,}26 + 0{,}65} = 19{,}62.$$

Если на вход информационной системы поступят данные *а*=10 и *б*=45, тогда выходным значением, полученным по алгоритму Тсукамото, будет результат 23,28.

МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА СУГЭНО

В данном алгоритме предпосылки нечетких правил задаются так же, как в алгоритме Мамдани, то есть их вид может быть получен как экспертным, так и параметрическим методом построения ФП. Однако для заключения ФП должна быть линейна и зависимой от значений предпосылок НПУ:

$$y = x_1' a_1 + x_2' a_2 + \ldots + x_k' a_k = \sum^{k} x_k a_k ,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – весовые коэффициенты.

Модель Сугэно реализуется в три этапа.

1. Этап фаззификации входных данных. Здесь определяются степени принадлежности для каждой предпосылки НПУ $\alpha_1(а)$, $\alpha_2(а)$, $\alpha_1(б)$, $\alpha_2(б)$.

2. Этап логического вывода. Во время операции импликации также, как и в алгоритме Тсукамото, находятся уровни отсечения для каждой предпосылки НПУ, используя операцию минимума

$\alpha_i = \alpha_i(а) \wedge \alpha_i(б)$.

На шаге композиции, используя известные уравнения заключений НПУ, определяются координаты по оси абсцисс

$в_i = a_i а + б_i б$.

3. Этап дефаззификации. С помощью одного из методов дефаззификации находится выходное значение системы по формуле центра тяжести.

Рассмотрим пример работы модели Сугэно. Пусть ФП входных и выходных переменных связаны НПУ, как и в предыдущем алгоритме Тсукамото (рис. 21):

НПУ$_1$: ЕСЛИ «*а* есть $А_1$» И «*б* есть $Б_1$» ТО «*в* есть $В_1$»;
НПУ$_2$: ЕСЛИ «*а* есть $А_2$» И «*б* есть $Б_2$» ТО «*в* есть $В_2$».

ФП для термов входных переменных *А* и *Б* записываются

$$A = \{A_1\} + \{A_2\} = \left\{ \int_{5}^{15} \left(\frac{a-5}{15-5} \right) / a + \int_{15}^{30} \left(\frac{30-a}{30-15} \right) / a \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{0}^{45} \left(0{,}18 \cdot a^{0,4} + 0{,}1 \right) / a \right\},$$

$$Б = \{Б_1\} + \{Б_2\} = \left\{ \int_{0}^{45} \left(0{,}00001 \cdot б^3 + 0{,}15 \right) / б \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{15}^{40} \left(\frac{б-15}{40-15} \right) / б + \int_{40}^{50} \left(\frac{50-б}{50-40} \right) / б \right\}.$$

ФП для термов выходной переменной *В* примет вид

$$B = \{в_1\} + \{в_2\} = \left\{ \int_{0}^{70} \left(3 \cdot a - 1{,}5 \cdot б \right) / в \right\} + \left\{ \int_{0}^{70} \left(a + б \right) / в \right\}.$$

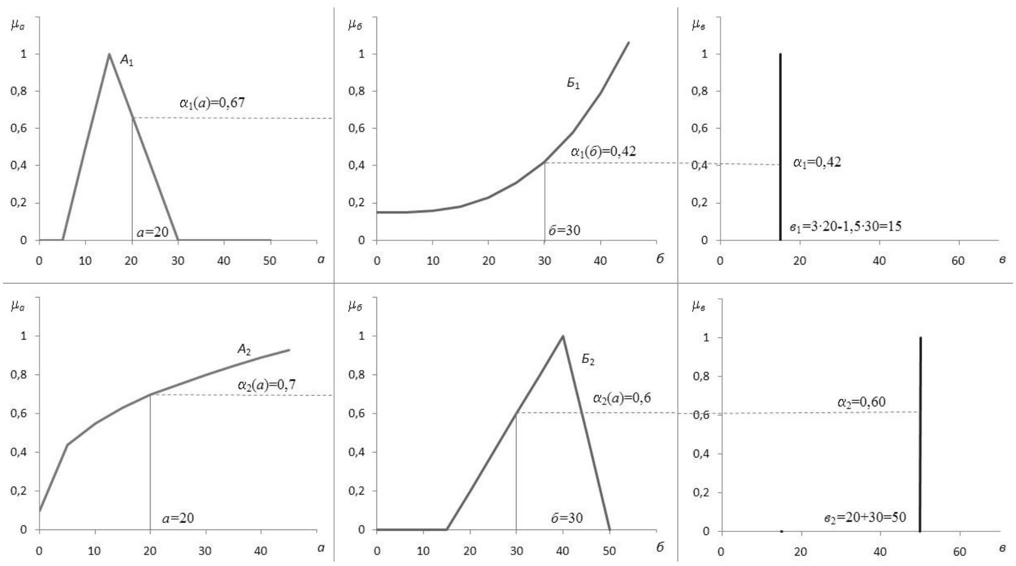


Рис. 22. Модель Сугэно

В данном алгоритме уравнения выходных термов зависят от входных:

$в_1 = 3а – 1{,}5б$; $в_2 = а + б$.

На вход информационной системы поступили значения $а$=20 и $б$=30. На первом этапе определяются степени принадлежности для входных переменных:

$\alpha_1(а)$=0,67; $\alpha_1(б)$=0,42; $\alpha_2(а)$=0,7; $\alpha_2(б)$=0,6.

На этапе логического вывода при реализации операции импликации находятся уровни отсечения

$\alpha_1=\alpha_1(а)\wedge\alpha_1(б)=\min\{0{,}67;\ 0{,}42\}=0{,}42;$
$\alpha_2=\alpha_2(а)\wedge\alpha_2(б)=\min\{0{,}7;\ 0{,}6\}=0{,}6.$

На шаге композиции с учетом взаимосвязи между входными и выходными переменными определяются

$в_1 = 3а – 1{,}5б = 3\cdot20 – 1{,}5\cdot30 = 15;$
$в_2 = а + б = 20 + 30 = 50.$

При реализации третьего шага выполняется операции дефаззификации выходного значения по формуле

$$y=\frac{\alpha_1 в_1+\alpha_2 в_2}{\alpha_1+\alpha_2}=\frac{0{,}42\cdot 15+0{,}6\cdot 50}{0{,}42+0{,}6}=35{,}59.$$

Если на вход системы поступят данные $а$=10 и $б$=40, тогда выходным значением, полученным по алгоритму Сугэно, будет 11,9.

МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ТАКАГИ-СУГЭНО

Рассмотрим решение примера для нечеткой SISO-системы, на основе модели Такаги-Сугэно, работу которой описывают три нечетких правила вида:

R_1: Если x есть A_1 То $y = x + 2$;
R_2: Если x есть A_2 То $y = 3x - 5$;
R_3: Если x есть A_3 То $y = 2x + 4$.

и функциями принадлежности с логическими переменными

$$w_1 = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \qquad w_3 = \begin{cases} 1 & \text{для } 5 < x \le 7, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$w_2 = \begin{cases} 1 & \text{для } 2 < x \le 4, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \qquad w_4 = \begin{cases} 1 & \text{для } 7 < x \le 10, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$w_5 = \begin{cases} 1 & \text{для } 10 < x \le 12, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{A_1} = w_1 + \left(\frac{5-x}{3}\right) w_2,$$

$$\mu_{A_2} = \left(\frac{x-2}{3}\right) w_2 + w_3 + \left(\frac{10-x}{3}\right) w_4,$$

$$\mu_{A_3} = \left(\frac{x-7}{3}\right) w_4 + w_5.$$

Решая, совместно оба уравнения на выходе модели Такаги-Сугэно получим (рис. 23):

$$y = \sum_{i=1}^{3} \mu_{A_i}(x) = w_1(x+2) + w_2(3x-5)\left(\frac{x-2}{3}\right) +$$

$$+ w_3(3x-5) + w_4(2x+4)\left(\frac{x-7}{3}\right) + w_5(2x+4) =$$

$$= w_1(x+2) + w_2(9x^2 - 33x + 30) +$$

$$+ w_3(3x-5) + w_4(6x^2 - 30x - 84) + w_5(2x+4).$$

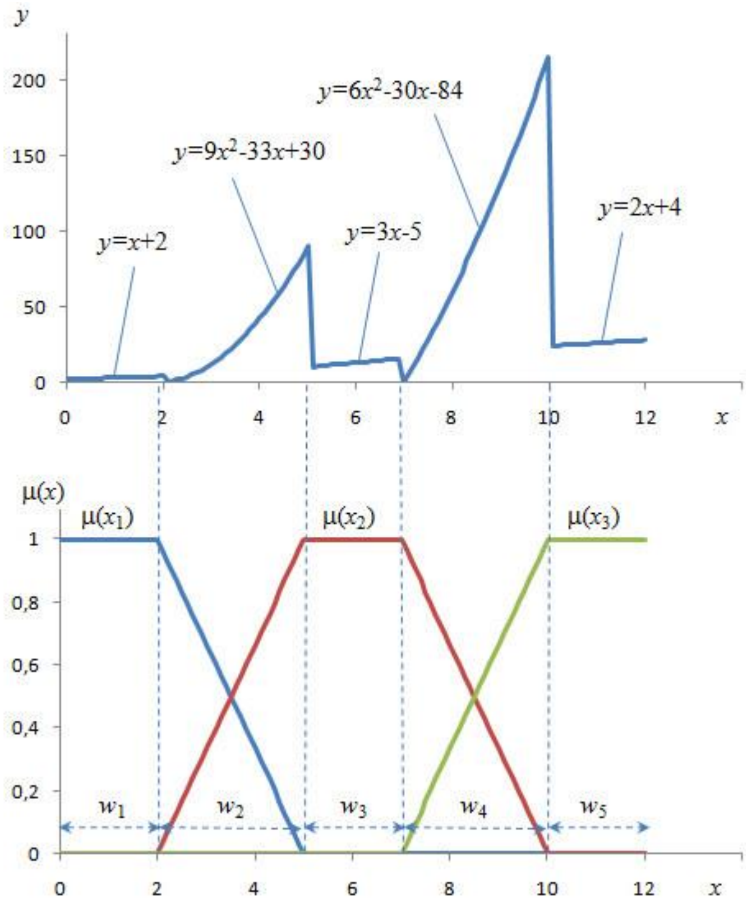


Рис. 23. Решение на основе модели Такаги-Сугэно

6. Задания для разработки экспертных систем на основе нечеткой логики

Целью лабораторной работы является создание студентом экспертной системы. Для реализации экспертной системы на основе алгоритмов нечеткого вывода рекомендуется использовать табличный процессор Excel и встроенный в него язык программирования VBA.

Ниже располагаются варианты для создания студентом экспертной системы. Вариант назначает преподаватель.

Варианты заданий

1. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Мамдани используя треугольные функции принадлежности.

2. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Мамдани используя трапециевидные функции принадлежности.

3. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Мамдани используя гауссовы функции принадлежности.

4. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Мамдани используя треугольные функции принадлежности.

5. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Мамдани используя трапециевидные функции принадлежности.

6. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Мамдани используя гауссовы функции принадлежности.

7. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Ларсена используя треугольные функции принадлежности.

8. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Ларсена используя трапециевидные функции принадлежности.

9. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Ларсена используя гауссовы функции принадлежности.

10. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Ларсена используя треугольные функции принадлежности.

11. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Ларсена используя трапециевидные функции принадлежности.

12. Разработать экспертную системы на основе алгоритма модифицированного Ларсена используя гауссовы функции принадлежности.

13. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Тсукамото используя треугольные функции принадлежности.

14. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Тсукамото используя трапециевидные функции принадлежности.

15. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Тсукамото используя гауссовы функции принадлежности.

16. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Сугэно используя треугольные функции принадлежности.

17. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Сугэно используя трапециевидные функции принадлежности.

18. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Сугэно используя гауссовы функции принадлежности.

19. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Такаги-Сугэно используя треугольные функции принадлежности.

20. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Такаги-Сугэно используя трапециевидные функции принадлежности.

21. Разработать экспертную системы на основе алгоритма Такаги-Сугэно используя гауссовы функции принадлежности.

7. Контрольные вопросы

1. Что такое нечеткая логика?
2. Для чего в нечетких выводах используются нечеткие правила?
3. Напишите формулы для нескольких функций принадлежности?
4. В чем суть алгоритма Мамдани?
5. В чем суть алгоритма Ларсена?
6. В чем суть алгоритма Тсукамото?
7. В чем суть алгоритма Сугэно?
8. В чем суть алгоритма Такаги-Сугэно?

8. Содержание отчёта

Отчёт должен содержать:

1) титульный лист;
2) наименование работы и цель исследований;
3) алгоритмов нечеткого вывода;
4) результаты расчета и графики результирующей переменной.

9. Библиографический список

1. Емельянов С.Г., Интеллектуальные системы на основе нечеткой логики и мягких арифметических операций / Емельянов С.Г., Титов В.С., Бобырь М.В. – - М. : АРГАМАК - МЕДИА, 2014. - 341 с. - (Научное сообщество).
2. Рубанов В.Г. Адаптивные системы принятия нечетко-логических решений / Рубанов В.Г., Титов В.С., Бобырь М.В. - Б.: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова (Белгород). 2014. - 239.
3. Емельянов С.Г., Адаптивные нечетко-логические системы управления / Емельянов С.Г., Титов В.С., Бобырь М.В. – - М. : АРГАМАК - МЕДИА, 2013. - 184 с. - (Научное сообщество).
4. Емельянов С.Г., Автоматизированные нечетко-логические системы управления / Емельянов С.Г., Титов В.С., Бобырь М.В. – М.:ИНФРА-М. 2011. 176 с. (Научная мысль).
5. Бобырь М.В. Теоретические основы построения автоматизированных систем управления технологическими процессами на основе нечеткой логики: монография / М.В. Бобырь, С.Г. Емельянов, В.С. Титов. Старый Оскол: Тонкие наукоемкие технологии, 2009. 232 с.