МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«18» 06 2018 г.

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ И ХАРАКТЕРИСТИК ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

Методические указания по выполнению лабораторной работы №1
для студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»
по курсу «Теория массового обслуживания»

Курск 2018

УДК 621.391

Составители: А.В. Хмелевская, Л.О. Марухленко, И.Г. Бабанин

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры
А.А. Гуламов

Изучение свойств и характеристик Пуассоновского потока: методические указания по выполнению лабораторной работы №1 по курсу «Теория массового обслуживания» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. А.В.Хмелевская, Л.О.Марухленко, И.Г.Бабанин.– Курск, 2018. – 10 с.: табл. 3. – Библиогр.: с. 10.

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения освойствах и характеристиках пуассоновского (простейшего) потока. Сравнительные теоретические и модельные значения полученных характеристик, а также задания для выполнения работыи самоконтроля.

Методические указания полностью соответствуют требованиям учебного плана по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 18.06.18. Формат 60х841/16.
Усл. печ. л. 0,58. Уч.-изд. л. 0,53. Тираж 100 экз. Заказ 2027 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

–изучить свойства и характеристики пуассоновского (простейшего) потока. Сравнить теоретические и модельные значения полученных характеристик.

2 Краткие теоретические сведения

Простейший поток обладает следующими свойствами: стационарность, ординарность и отсутствие последействия.

Свойство стационарности означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Поток можно назвать стационарным, если для любогочисла k требований, поступивших за промежуток времени длиной Δt, вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени (1).

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t+\Delta t) = P_k(\Delta t)\,, \tag{1}$$

где $P_k(t)$ – вероятность поступления k требований.

Свойство ординарности означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δtесть величина бесконечно малая, более высокого порядка, чем Δt, т.е.

$$P_{i\geq 2}(\Delta t) = 0(\Delta t). \tag{2}$$

Свойство отсутствия последействия означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления k требований в промежуток $[t_1,t_2]$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1. Для случайного потока без последействия условная вероятность поступления требований в промежутке $[t_1,t_2]$, вычисленная при любых предположениях о течении процесса обслуживания требований до момента t_1, равна безусловной

$$P_i([t_1,t_2]) = P_i([t_1,t_2]) \qquad (3)$$

К основным характеристикам случайного потока относят ведущую функцию, параметр и интенсивность. Ведущая функция случайного потока $\bar{x}(0,t)$ есть математическое ожидание числа требований в промежутке $[0,t)$. Функция $\bar{x}(0,t)$ - неотрицательная, неубывающая, в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Параметр потока $\lambda(t)$ в момент времени t есть предел отношения вероятности поступления не менее одного требования в промежутке $[t,t+\Delta t]$ к величине этого промежутка Δt при $\Delta t \to 0$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{k\geq 1}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Параметр потока определяет плотность вероятности наступления вызывающего момента в момент t. Определение параметра равносильно предположению, что вероятность поступления хотя бы одного требования в промежутке $[t,t+\Delta t]$ с точностью до бесконечно малой величины пропорциональна промежутку и параметру потока $\lambda(t)$:

$$P_{k\geq 1}(t,t+\Delta t) = \lambda(t)\Delta t + 0(\Delta t). \qquad (5)$$

Для стационарных потоков вероятность поступления требований не зависит от времени, т. е., $P_{k\geq 1}(t,t+\Delta t) = P_{k\geq 1}(\Delta t)$, поэтому параметр стационарного потока постоянен.

Соответственно получаем:

$$P_{k\geq 1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + 0(\Delta t). \qquad (6)$$

Интенсивность стационарного потока μ есть математическое ожидание числа требований в единицу времени.

Если интенсивность характеризует поток требований, то параметр - поток вызывающих моментов. Поэтому всегда $\mu(t) \geq \lambda(t)$, а равенство имеет место только для ординарных потоков, когда в каждый вызывающий момент поступает только одно требование.

3 Моделирование простейшего потока

Для простейшего потока требований длины промежутков времени между последовательными требованиями потока $z_i = t_i - t_{i-1} > 0$ распределены по показательному закону с тем же параметром λ:

$$P(z < t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Это утверждение позволяет моделировать простейший поток требований на заданном промежутке времени при помощи метода Монте-Карло, в основе которого лежит следующая теорема.

Если r_i – случайные числа, равномерно распределенные на $(0,1)$, то возможное значение x_i получаемой случайно непрерывной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, соответствующее r_i, является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i \quad (8)$$

Согласно этой теореме для получения последовательности случайных значений z_i, распределенных по показательному закону с параметром λ, требуется для каждого случайного числа $r_i(0,1)$, генерируемого на ПЭВМ датчиком псевдослучайных чисел, решить уравнение

$$1 - e^{-\lambda z_i} = r_i, i = 1,2,.. \quad (9)$$

Решая это уравнение относительно z_i, имеем

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i) \quad (10)$$

или

$$z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i, i = 1,2,... \qquad (11)$$

4 Порядок выполнения работы

1) Сгенерировать случайные равномерно распределённые числа $r_i(0,1)$.

2) Вычислить $\lambda = 10 \cdot m / N_n$ (треб/мин); где *Nn*– номер студента по журналу, *m*-номер группы (пример: для группы ИТ-21 *m*= = 2+1=3).

3) По формуле $Z_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(r_i)$, где $i = 1,2,...$, получить Z_i для промежутков между требованиями.

4) На промежутке $[T_1, T_2]$, $T_1 = N + 1$, $T_2 = N + 5$мин., получить последовательность t_k моментов поступления требований, где $t_k = T_1 + \sum_{i=1}^{k} Z_i$ до тех пор, пока $t_k \le T_2$.

Полученные результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты полученные в ходе выполнения работы

r_i	Z_i	t_k
r_1	z_1	t_1
r_2	z_2	t_2
.	.	.

5) Провести статистическую обработку полученных результатов, для этого разделить заданный интервал на 25 равных промежутков длиной

$$\tau = \frac{T_2 - T_1}{25} \text{ (мин).}$$

Для каждого промежутка определить $x(\tau)$– количество требований, попавших в промежуток длиной τ, занести в таблицу 2.

Таблица 2 – Количество требований попавших в промежуток длинной τ

№ интервала	1	2	…	25
$X_N(\tau)$				

Из таблицы 2 определить параметры статистического распределения случайной величины и занести их в таблицу 3.

Таблица 3 – Параметры статистического распределения случайной величины

$X_k(\tau)$	0	1	2	…	k
n_k	n_1	n_2	n_3	…	k

$\sum n_k = N$, где n_k– количество интервалов, в которое попало k требований.

6) Определить модельное значение параметра потока:

$a = \bar{x}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_k x_k(\tau) n_k -$ мат. ожидание числа требований в k интервале, отсюдаследует $a = \bar{\lambda}\tau \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{a}{\tau}$.

7) Для заданного (λ)и модельного значения $(\bar{\lambda})$ определить:

а) Вероятность отсутствия требования $P_0(t)$за промежуток $t = T_2 - T_1$.

б) Вероятность поступления одного требования $P_1(t)$.

в) Вероятность поступления четырёх требований $P_4(t)$.

г)Вероятность поступления не менее пяти требований $P_{\geq 5}(t) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$.

д) Вероятность поступления менее трёх требований $P_{<3}(t) = P_0 + P_1 + P_2$.

е) Вероятность поступления не более семи требований $P_{\leq 7}(t) = P_0 + ... + P_7$.

ж) Вероятность, что промежуток между требованием z_k

$P[0{,}1 < z_k < 0{,}5] = F(0{,}5) - F(0{,}1)$.

5 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:
1) Цель работы;
2) Краткие теоретические сведения;
3) Порядок выполнения работы;
4) Исходные данные для моделирования;
5) Результаты моделирования (таблицы 1, 2, 3 с пояснениями);
6) Результаты расчетов;
7) Ответы на контрольные вопросы;
8) Выводы о проделанной работе с анализом полученных результатов.

6 Контрольные вопросы

1) По каким свойствам классифицируются случайные потоки?
2) Дать определение свойствам: стационарность; ординарность; отсутствие последействия.
3) Дать определения числовым характеристикам случайных потоков: параметр потока λ; интенсивность потока μ; ведущая функция потока.
4) Для каких потоков совпадают значения параметра потока и интенсивности: $\lambda = \mu$?
5) По какому закону распределён промежуток между соседними требованиями в простейшем потоке?
6) По какому закону распределена случайная величина, характеризующая количество требований простейшего потока, попавших в некоторый промежуток?

7 Список используемых источников

1)Козликин, В.И. Теория массового обслуживания [Текст] : учебное пособие / В. И. Козликин, Л. П. Кузнецова ; Минобрнауки России, Юго-Западный государственный университет. - Курск : ЮЗГУ, 2013. - 143 с

2) Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания [Текст] / А. П. Кирпичников. - Казань : Казанский университет, 2011. - 200 с.

3) Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие : [для студентов техн. и экон. спец. дневной, заочной и дистан. форм обучения] / Е. В. Журавлева [и др.] ; Юго-Зап. гос. ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 175 с

4)Крылов, В.В. Теория телетрафика и ее приложения [Текст] : учебное пособие / В. В. Крылов, С. С. Самохвалова. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 288 с

5)Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология [Текст] : учебное пособие / Е. С. Вентцель. - М. : Высшая школа, 2001. - 208 с.