МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«22» 07 2019 г.

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И КОДИРОВАНИЯ

Методические указания
по выполнению лабораторных работ
для студентов, обучающихся по специальности
10.05.02 «Информационная безопасность
телекоммуникационных систем»
по дисциплине «Теория информации и кодирования»

Курск 2019

2

УДК 621.391

Составители: Д.С. Коптев, И.Г. Бабанин

Рецензент:

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
профессор кафедры космического приборостроения и систем связи
В.Г. Андронов

Теория информации и кодирования: методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория информации и кодирования» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев, И.Г. Бабанин. – Курск, 2019. – 67 с.: иллюстр. 8., табл. 12. – Библиогр.: с. 67.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат краткие теоретические сведения о природе информации, её свойствах, методах измерения её количества и качества, общих принципах кодирования информации в системах передачи, обработки и хранения, варианты заданий для выполнения работ, а также перечень вопросов для самопроверки изучаемого материала.

Методические указания соответствуют учебному плану по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», а также рабочей программе дисциплины: «Теория информации и кодирования».

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем», очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 22.07.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 3,894. Уч.-изд. л. 3,526. Тираж 100 экз. Заказ. 547 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Лабораторная работа №1
«Аддитивная мера информации (Мера Хартли)»

1 Цель работы

Изучить аддитивную меру информации. Научиться переводить числа из одной системы счисления в другую, научиться измерять количество информации для равновероятных и неравновероятных событий. Проверить полученные теоретические сведения практическим путем, выполняя индивидуальные задания.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Определение количества информации для равновероятных событий

Одно из направлений в измерении информации дает структурная теория, в которой количество информации определяется подсчетом информационных элементов или комбинаций из них.

Рассмотрим *аддитивную меру* (*меру Хартли*). Из комбинаторики известно, что число сочетаний с повторениями из h элементов по l равно

$$Q = h^l \qquad (1)$$

Таким образом, число всех двоичных кодовых комбинаций длины l равно 2^l (h = 2). В качестве меры информации Хартли предложил взять

$$H = \log_2 Q = \log_2 h^l = l. \qquad (2)$$

Тогда 1 *бит* – это количество информации, содержащееся в двоичной кодовой комбинации единичной длины. Количество информации по Хартли эквивалентно количеству двоичных знаков "0" и "1" при кодировании сообщений по двоичной системе счисления.

Под системой счисления понимается способ представления любого числа с помощью некоторого алфавита символов, называемых цифрами.

2.2 Перевод числа из одной системы счисления в другую

Все системы счисления делятся на позиционные и непозиционные.

Непозиционными системами являются такие системы счисления, в которых каждый символ сохраняет свое значение независимо от места его положения в числе. Примером непозиционной системы счисления является римская система. К недостаткам таких систем относятся наличие большого количества знаков и сложность выполнения арифметических операций.

Система счисления называется позиционной, если одна и та же цифра имеет различное значение, определяющееся позицией цифры в последовательности цифр, изображающей число. Это значение меняется в однозначной зависимости от позиции, занимаемой цифрой, по некоторому закону. Примером позиционной системы счисления является десятичная система, используемая в повседневной жизни.

При переводе из любой системы счисления в десятичную, нужно целую и дробную части (если есть дробная) умножать по правилам перевода. При переводе числа из десятичной системы в другую, нужно целую часть делить, а дробную умножать по правилам перевода из одной системы счисления в другую.

2.3 Определение количества информации для событий с различными вероятностями.

Существует множество ситуаций, когда возможные события имеют различные вероятности реализации. Рассмотрим примеры таких событий.

1. В коробке 20 карандашей, из них 15 красных и 5 чёрных. Вероятность вытащить наугад красный карандаш больше, чем чёрный.
2. При случайном падении бутерброда вероятность падения его маслом вниз (более тяжёлой стороной) больше, чем маслом вверх.
3. В пруду живут 8000 карасей, 2000 щук и 40000 пескарей. Самая большая вероятность для рыбака – поймать в этом пруду пескаря, на втором месте – карася, на третьем – щуку.

Количество информации в сообщении о некотором событии зависит от его вероятности. Чем меньше вероятность события, тем больше информации оно несёт.

$$p = K/N,$$

где K – количество случаев реализации одного из исходов события,

N – общее число возможных исходов одного из событий

$$I = \log_2(1/p),$$

где I – количество информации,

p – вероятность события

Логарифмом числа a по основанию b называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1}$$

Правило вычисления логарифмов чисел по основанию 2 с помощью электронного калькулятора:

$\log_2 6 = \log 6 / \log 2$, где $\log 6$ и $\log 2$ – десятичные логарифмы.

Порядок вычисления логарифма числа 6 по основанию 2 ($\log_2 6$) с помощью инженерного калькулятора:

6, log, / , 2, log, =

Количество информации в случае различных вероятностей событий определяется по формуле Шеннона:

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log_2 p_i$$

где p_i – вероятность i-го события,

n – количество возможных событий

3 Примеры выполнения заданий

Пример 1

Рассмотрим систему, информационная емкость которой определяется десятичным числом Q = 121. Определим количество информации, содержащееся в системе, используя меру Хартли (2),

$$H = \log_2 Q = \log_2 121 \approx 6.91887 \approx 7 \text{ бит}$$

Заметим, что округление результата до целого необходимо проводить в сторону увеличения. Полученный результат означает, что при кодировании числа достаточно использовать 7 двоичных знаков (число возможных двоичных кодовых комбинаций равно 2^7 = 128).

$$120 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111000_2.$$

Замечание. Разложение по двоичной системе производится для числа на 1 меньше в силу того, что отсчет ведется от нуля, а число комбинаций равно 121.

Для получения двоичного числа можно использовать метод последовательного деления числа на 2. При каждом делении определяется один двоичный знак кодовой комбинации: если деление без остатка – "0", в противном случае – "1". Рисунок 1 иллюстрирует данный метод. Столбец справа показывает двоичные знаки кодовой комбинации.

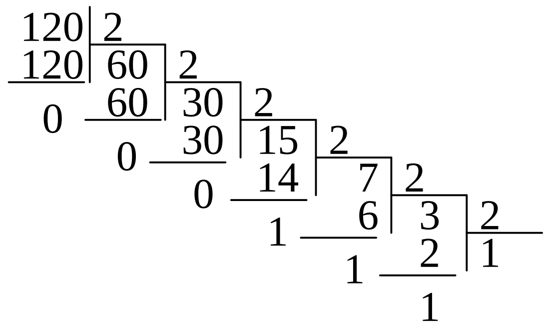


Рисунок 1 - Перевод числа в двоичную систему счисления

Двоичное число выписывается в обратном порядке, двигаясь снизу вверх.

Пример 2

Перевести число 12201_3 из троичной системы счисления в десятичную.

Решение.

4 3 2 1 0 *разряды*

$$12201_3 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 81 + 54 + 18 + 1 = 154_{10}$$

Ответ: $12201_3 = 154_{10}$.

Пример 3

Перевести число $234{,}6_8$ из восьмеричной системы в десятичную.

Решение.

2 1 0 –1

$$234{,}6_8 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} = 128 + 24 + 4 + 0{,}75 = 156{,}75_{10}$$

Ответ: $234{,}6_8 = 156{,}75_{10}$.

Пример 4

Перевести число $101{,}01_2$ из двоичной системы счисления в десятичную.

Решение:

2 1 0 –1 –2 *разряды*

$$101{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 = 5{,}25_{10}$$

Ответ: $101{,}01_2 = 5{,}25_{10}$.

Пример 5

Перевести дробное десятичное число $0{,}625_{10}$ в дробное двоичное число.

Решение.

$$0,625\cdot 2 = 1,25 \qquad 0,25\cdot 2 = 0,5 \qquad 0,5\cdot 2 = 1$$

Ответ: $0,625_{10} = 0,101_2$.

Пример 6

Перевести число 0,165 в четверичную систему счисления, ограничившись четырьмя четверичными разрядами..

Решение.

$$0,165\cdot 4 = 0,66 \quad 0,66\cdot 4 = 2,64 \quad 0,64\cdot 4 = 2,56 \quad 0,56\cdot 4 = 2,24$$

Ответ: $0,165_{10} = 0,0222_4$.

Пример 7

Перевести десятичное число 7467_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

Решение.

$$\begin{array}{l|l|l|l}
4767 & 16 & & \\
\underline{4756} & 466 & 16 & \\
\quad 11 & \underline{464} & 29 & 16 \\
 & \quad 2 & \underline{16} & 1 \\
 & & 13 &
\end{array}$$

Ответ: $1D2B_{16}$.

Пример 8.

В коробке 32 карандаша, все карандаши разного цвета. Наугад вытащили красный. Какое количество информации при этом было получено?

Решение.

Так как вытаскивание карандаша любого цвета из имеющихся в коробке 32 карандашей является равновероятным, то число возможных событий равно 32.

$N = 32$, $l = ?$

$N = 2^l$, подставим значение $N = 32$, получим $32 = 2^5$, тогда $l = 5$ бит.

Ответ: 5 бит.

Пример 9.

В школьной библиотеке 16 стеллажей с книгами, на каждом – по 8 полок. Ученику сообщили, что нужный учебник находится на 2-ой полке 4-го стеллажа. Какое количество информации получил ученик?

Решение.

1) Число стеллажей (случаев) – 16, т.е. $N_1 = 16$,

Определим $N_1 = 2^l$, подставим числовое значение $16 = 2^l$, т.е. $16 = 2^4$, тогда $l_1 = 4$ бита.

2) Число полок на каждом стеллаже (случаев) – 8, т.е. $N_2 = 8$,

Определим $N_2 = 2^l$, подставим числовое значение $8 = 2^3$, т.е. $l_2 = 3$ бит.

3) $l = l_1 + l_2$, получим l = 4 бита + 3 бита = 7 бит.

Ответ: 7 бит.

Пример 10.

Загадывают число в диапазоне от 1 до 200. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет".

Решение.

Правильная стратегия состоит в том, чтобы количество вариантов каждый раз уменьшалось вдвое.

Например, загадано число 152.

1 вопрос: Число >100? Да.

2 вопрос: Число < 150? Нет.

3 вопрос: Число > 175? Нет. и т.д.

Количество событий в каждом варианте будет одинаково, и их отгадывание равновероятно. $N = 2^l$, тогда $200 = 2^l$, т.е. $7 < l < 8$. Т.к. количество вопросов нецелым числом быть не может, то необходимо задать не более 8 вопросов.

Ответ: 8 вопросов

Пример 11

В коробке 50 шаров, из них 40 белых и 10 чёрных. Определить количество информации в сообщении о вытаскивании наугад белого шара и чёрного шара.

Решение.

Вероятность вытаскивания белого шара

$$p_1 = 40/50 = 0{,}8$$

Вероятность вытаскивания чёрного шара

$$p_2 = 10/50 = 0{,}2$$

Количество информации о вытаскивании белого шара

$$I_1 = \log_2(1/0{,}8) = \log_2 1{,}25 = \log 1{,}25/\log 2 \approx 0{,}32 \text{ бит}$$

Количество информации о вытаскивании чёрного шара

$$I_2 = \log_2(1/0{,}2) = \log_2 5 = \log 5/\log 2 \approx 2{,}32 \text{ бит}$$

Ответ: 0,32 бит, 2,32 бит

Пример 12.

В озере живут караси и окуни. Подсчитано, что карасей 1500, а окуней - 500. Сколько информации содержится в сообщениях о том, что рыбак поймал карася, окуня, поймал рыбу?

Решение.

События поимки карася или окуня не являются равновероятными, так как окуней в озере меньше, чем карасей.

Общее количество карасей и окуней в пруду

$$1500 + 500 = 2000.$$

Вероятность попадания на удочку карася

$$p_1 = 1500/2000 = 0,75,$$

Вероятность попадания на удочку окуня

$$p_2 – 500/2000 = 0,25.$$

$$I_1 = \log_2(1/p_1),\ I_2 = \log_2(1/p_2),$$

где I_1 и I_2 – вероятности поймать карася и окуня соответственно.

Количество информации в сообщении поймать карася и поймать окуня соответственно

$I_1 = \log_2(1 / 0,75) \approx 0,43$ бит, $I_2 = \log_2(1 / 0,25) \approx 2$ бит.

Количество информации в сообщении поймать рыбу (карася или окуня) рассчитывается по формуле Шеннона

$$I = - p_1 \cdot \log_2 p_1 - p_2 \cdot \log_2 p_2$$

$$I = - 0,75 \cdot \log_2 0,75 - 0,25 \cdot \log_2 0,25$$

$$I = - 0,75 \cdot (\log 0,75/\log 2) - 0,25 \cdot (\log 0,25/\log 2)$$

$$I = 0,604 \text{ бит} \approx 0.6 \text{ бит}.$$

Ответ: в сообщении содержится 0,6 бит информации

4. Задания

Номер варианта определяется как последняя цифра номера зачетки студента. Студенту необходимо решить все задачи в соответствии с номером варианта.

Задание 1.

Перевести число из одной системы счисления в другую.

Вариант	Числа
1	A_{10}=121 в двоичную систему счисления

2	A_2=10001010111,01 в десятичную систему счисления
3	A_{10}=135,656 в двоичную систему счисления с точностью до пяти знаков после запятой
4	A_8=345,766 в двоичную систему счисления
5	A_{10}=326 в троичную систему счисления
6	A_{10}=1211 в пятеричную систему счисления
7	A_{10}=0,625 в двоичную систему счисления
8	A_2=0,1101 в десятичную систему счисления
9	A_{10}=113 в двоичную систему счисления
10	A_{10}=96 в троичную систему счисления

Задание 2.

Чему равно значение суммы чисел в восьмеричной системе счисления?

Вариант	Сумма
1	$1110101010_2+10111001_2$
2	$10111010_2+10010100_2$
3	$111101110{,}1011_2+1111011110{,}1_2$
4	$40F{,}4_{16}+160{,}4_{16}$
5	$274{,}5_{16}+DD{,}4_{16}$
6	$120{,}3_{16}-B9{,}6_{16}$
7	122_5+210_5
8	221_5+120_5
9	201_5+102_5
10	$11_4 + 11_8 + 11_{16}$

Задание 3.

Определить количество информации (по Хартли), содержащееся в системе, информационная емкость которой характеризуется десятичным числом *Q*. Закодировать это число по двоичной системе счисления, до двух цифр после запятой.

вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q	1350	850	1980	2150	1450	890	1300	970	1590	1700

Задание 4.

Вариант 1. Телеграфист за день работы принимает 64 сообщения. Все сообщения разные. Наугад выбрали одно сообщение. Какое количество информации при этом было получено?

Вариант 2. Ваш друг живет в 16-ти этажном доме. Сколько информации содержит сообщение о том, что друг живет на 7 этаже?

Вариант 3. Какое количество информации несет сообщение о том, что встреча назначена на июль?

Вариант 4. При угадывании целого числа в диапазоне от 1 до N было получено 8 бит информации. Чему равно N?

Вариант 5. Защита курсовой работы назначена на 15-е число. Какое количество информации несет данное сообщение?

Вариант 6. В цеху находится 8 различных станков. Какое количество информации несет сообщение, что 1 станок вышел из стоя?

Вариант 7. В корзине лежат 16 разноцветных шаров. Наугад вытащили белый шар. Какое количество информации при этом было получено?

Вариант 8. При угадывании целого числа в диапазоне от 1 до N было получено 4 бит информации. Чему равно N?

Вариант 9. В доме вашего друга 8 подъездов. Сколько информации содержит сообщение о том, что друг живет в 5 подъезде?

Вариант 10. В столовой стоит 17 столиков. Сколько информации несет сообщение о том, что 1 столик свободен?

Задание 5.

Вариант 1. В кафедральной библиотеке 32 стеллажа с учебной литературой, в каждом – по 6 полок. Студенту сообщили, что нужный учебник находится на 4-ой полке 8-го стеллажа. Какое количество информации получил студент?

Вариант 2. Студенческую группу отправляют на практику на 4 недели по 6-ти предприятиям. Студенту сообщили, что на 3ей неделе практики он будет на 2м предприятии. Сколько информации содержит данное сообщение?

Вариант 3. День рождения студента приходится на 8 декабря. Сколько информации несет в себе данное сообщение?

Вариант 4. Какое количество информации несет сообщение о том, что встреча назначена на 25 января?

Вариант 5. В магазине радиодеталей 12 стеллажей по 6 полок на каждом. Сколько информации несет сообщение о том, что нужная деталь находится в 3ем стеллаже на 2й полке?

Вариант 6. Экскурсионная группа приехала в Санкт-Петербург на 5 дней. За это время группа должна посетить 12 музеев. Сколько информации несет сообщение о том, что в 3й день экскурсии группа посетит 4 музея?

Вариант 7. Защита курсовой работы назначена на 15-е мая. Какое количество информации несет данное сообщение?

Вариант 8. В 10-этажном доме вашего друга 6 подъездов. Сколько информации содержит сообщение о том, что друг живет в 5 подъезде на 3 этаже?

Вариант 9. В двух залах студенческой столовой стоит 24 столика. Сколько информации несет сообщение о том, что во втором зале 1 столик свободен?

Вариант 10. В аудитории 8 столов на 3х человек. Сколько информации содержится сообщении о том, что за 3м столом сидит 1 человек?

Задание 6.

Вариант 1. Загадывают число в диапазоне от 1 до 1000. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 2. Загадывают число в диапазоне от 1 до 75. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 3. Загадывают число в диапазоне от 1 до 500. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 4. Загадывают число в диапазоне от 1 до 50. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 5. Загадывают число в диапазоне от 1 до 750. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 6. Загадывают число в диапазоне от 1 до 150. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 7. Загадывают число в диапазоне от 1 до 10. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 8. Загадывают число в диапазоне от 1 до 120. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 9. Загадывают число в диапазоне от 1 до 800. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Вариант 10. Загадывают число в диапазоне от 1 до 250. Какое наименьшее количество вопросов надо задать, чтобы наверняка отгадать число. На вопросы можно отвечать только "Да" или "Нет"

Задание 7.

Вариант 1. В корзине лежат 32 шара, среди них 4 белых, а остальные черные. Сколько битов информации содержится в сообщении о том, что из корзины вытащили белый шар?

Вариант 2. В алфавите некоторого языка всего две буквы. Каждое слово этого языка состоит из m букв. Известно, что можно составить 2048 различных слов. Сколько букв в каждом слове?

Вариант 3. В ящике 80 яблок, из них 55 красных и 25 зеленых. Определить количество информации в сообщении о вытаскивании наугад красного и зеленого яблок.

Вариант 4. В книжном шкафу находятся 129 методических указаний, из них 45 по Цифровым системам передачи, остальные - по Общей теории связи. Сколько информации содержит сообщение о том, что наугад вытащенное методическое указание будет по Общей теории связи?

Вариант 5. Определите, сколько бит информации несет сообщение о том, что на светофоре горит зеленый свет

Вариант 6. Шахматная доска состоит из 64 полей: пополам белых и черных. Сколько информации несет сообщение о том, что белая королева стоит на черной клетке?

Вариант 7. Предположим, вероятность того, что вы получите за контрольную работу оценку "5", равна 0,6; вероятность получения "4" равна 0,2; вероятность получения "3" - 0,2. Определите, сколько бит информации будет нести сообщение об оценке "3"?

Вариант 8. Предположим, вероятность того, что вы получите за контрольную работу оценку "5", равна 0,6; вероятность получения "4" равна 0,2; вероятность получения "3" - 0,2. Определите, сколько бит информации будет нести сообщение об оценке "4"?

Вариант 9. Предположим, вероятность того, что вы получите за контрольную работу оценку "5", равна 0,6; вероятность получения "4" равна 0,2; вероятность получения "3" - 0,2. Определите, сколько бит информации будет нести сообщение об оценке "5"?

Вариант 10. Сообщение занимает 3 страницы по 25 строк. Сколько информации содержит сообщение о том, что искомое слово находится на 2й странице в 17 строке?

Задание 8.

Вариант 1. Книга, набранная с использованием текстового редактора, содержит 70 страниц, на каждой странице 38 строк, в каждой строке 56 символов. Определить объем информации, содержащейся в книге.

Вариант 2. Измерьте информационный объем сообщения "Ура! Скоро Новый год!" в битах, байтах, килобайтах (Кб), мегабайтах (Мб).

Указание: считается, что текст набран с помощью компьютера, один символ алфавита несет 1 байт информации. Пробел – это тоже символ в алфавите мощностью 256 символов.

Вариант 3. Измерьте примерную информационную емкость одной страницы любого своего учебника, всего учебника.

Указание: Для выполнения задания возьмите учебник по любимому предмету, посчитайте число строк на странице, число символов в строке, включая пробелы. Помните, что один символ алфавита несет 1 байт информации. Перемножив полученные значения, Вы найдете информационную емкость одной страницы учебника (в байтах).

Вариант 4. . Проводят две лотереи: «4 из 32» и «5 из 64» Сообщение о результатах какой из лотерей несет больше информации?

Вариант 5. Информационное сообщение объемом 1.5 Кбайта содержит 3072 символа. Сколько символов содержит алфавит, при помощи которого было записано это сообщение?

Вариант 6. Книга, набранная с помощью компьютера, содержит 150 страниц; на каждой странице — 40 строк, в каждой строке — 60 символов. Каков объем информации в книге?

Вариант 7. Подсчитайте объем информации, содержащейся в романе А. Дюма "Три мушкетера", и определите, сколько близких по объему произведений можно разместить на одном лазерном диске? (590 стр., 48 строк на одной странице, 53 символа в строке).

Вариант 8. На диске объемом 100 Мбайт подготовлена к выдаче на экран дисплея информация: 24 строчки по 80 символов, эта информация заполняет экран целиком. Какую часть диска она занимает?

Вариант 9. Сообщение занимает 3 страницы по 25 строк. В каждой строке записано по 60 символов. Сколько символов в использованном алфавите, если все сообщение содержит 1125 байтов?

Вариант 10. Измерьте примерную информационную емкость одной страницы учебника, всего учебника. Сколько таких учебников может поместиться на дискете емкостью 360 Кбайт, 1.44 Мбайт, на винчестере в 420 Мбайт, в 6,4 Гбайт ?

5 Контрольные вопросы

1. Как определяется количество информации по Хартли?
2. Дайте определение количества информации равной 1 биту.
3. Что понимается под системой счисления?
4. Какие системы счисления являются непозиционными?
5. Дайте определение позиционным системам счисления.
6. Приведите алгоритм перевода числа из десятичной в любую другую систему счисления
7. В чем заключается алгоритм перевода из любой системы счисления в десятичную?
8. Какие события называют равновероятными?
9. Какие события являются неравновероятными?
10. Как определить количество информации для события с равновероятными символами?
11. Как определить количество информации для события, символы которого неравновероятны?
12. В каких случаях сообщение несет максимальное количество информации?
13. Когда количество информации равно нулю?

Лабораторная работа №2
«Расчет количества информации и энтропии для дискретных сообщений»

1 Цель работы

- приобрести умение определять количество информации и энтропию для дискретного источника сообщений.

2 Основные теоретические сведения

Источник сообщений, который может в каждый момент времени случайным образом принять одно из конечного множества возможных состояний, называют **дискретным источником сообщений.** Каждому состоянию источника и ставится в соответствие условное обозначение в виде символа из алфавита этого источника: S_1, $S2$, …,S_m.

Источник сообщений в общем случае характеризуется ансамблем ***S*,** то есть полной совокупностью состояний с вероятностями их появления, составляющими в сумме единицу:

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ p(s_1) & p(s_2) & \dots & p(s_m) \end{pmatrix}; \text{ причём } \sum_{i=1}^{m} p(s_i) = 1$$

Энтропия H(S) дискретного источника сообщений, задаваемого ансамблем ***S*,** может быть определена по формуле Шеннона:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{m} p(s_i)\log_2 p(s_i) \text{ (бит/символ)};$$

где *p(sj)* - вероятность появления символа s_2 из алфавита объемом *m.*

Количество информации в сообщении, состоящем из *n* символов, может быть найдено следующим образом:

$$I = n \cdot H(S) = -n\sum_{i=1}^{m} p(s_i)\log_2 p(s) \text{ (бит)}$$

При наличии взаимозависимости символов алфавита используется **условная энтропия.** С учетом статистической связи между парами символов условная энтропия может быть найдена из формулы:

$$H_2(S) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p(s_i)\, p(s_j|s_i)\log_2 p(s_j|s_i) \text{ (бит/символ)};$$

где $p(S_j \mid s_i)$ - условная вероятность появления символа S_j при заданном символе S_j.

Другой важной характеристикой источника сообщений, помимо энтропии, является ***информационная избыточность***, которая показывает относительную недогруженность на символ алфавита источника сообщений:

$$R = \frac{H_{\max} - H}{H_{\max}} = 1 - \frac{H}{H_{\max}};$$

где $H_{\max} = \log_2 m$ - максимально возможная для данного источника сообщений энтропия, которая достигается при равной вероятности появления символов.

Кроме общей информационной избыточности существуют частные избыточности, основными из которых являются:

1) Избыточность, вызванная статистической связью между символами s_1, s_2,..., s_m:

$$R_p = 1 - \frac{H}{H'};$$

где $H' = -\sum_{i=1}^{m} p(s_i)\log_2 p(s_i) -$ энтропия источника сообщений при отсутствии статистической связи между символами.

2) Избыточность, вызванная не экстремальным распределением символов si, s_2, s_m (не равновероятным появлением символов в сообщениях):

$$R_\varphi = 1 - \frac{H'}{H_{\max}}.$$

3) Общая информационная избыточность связана с частными избыточностями следующим образом:

$$R = R_p + R_y - R_p R_y.$$

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) Определить энтропию дискретного источника сообщений, алфавит которого состоит из восьми независимых символов S_1, S_2, ... , s_8. Известны вероятности появления символов $p(s_1)=p_1$, $p(s_2)=p2$, ... , $p(s_8)=p_8$ (таблица 1).

4) Определить среднее и частное количество информации, содержащейся в сообщении, которое состоит из ваших фамилии, имени и отчества (между словами сообщения допускаются пробелы). Вероятности появления букв русского алфавита взять из табл. П.1. Сравнить полученные результаты.

5) В условии задачи, сформулированной в пункте 3, учесть зависимость между парами символов, которая задана матрицей условных вероятностей $p(sj \backslash si)$ (табл. 2 – 5).

6) Для задачи, сформулированной в пункте 4, учесть наличие статистической связи между парами и тройками букв.

7) Определить частные избыточности, вызванные наличием связи между символами и не экстремальным распределением символов, для полученных при выполнении пунктов 5 и 6 результатов. На основе частных избыточностей найти общую информационную избыточность источника сообщений.

8) Оформить и защитить отчет по лабораторной работе.

4 Варианты заданий

Номер варианта студента определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица 1 – Вероятности появления независимых символов $s_1, s_2, \ldots, s_8$

№ вар.	Вероятности для символов s_1 s_2, … , s_8							
	P1	*P2*	P3	P4	P5	P6	P7	P8
1	0,21	0,12	0,05	0,08	0,03	0,14	0,2	0,17
2	0,13	0,04	0,19	0,16	0,18	0,12	0,13	0,05
3	0,2	0,15	0,16	0,04	0,19	0,05	0,12	0,09
4	0,14	0,1	0,04	0,17	0,12	0,16	0,05	0,22
5	0,06	0,21	0,03	0,23	0,13	0,12	0,14	0,08
6	0,08	0,19	0,22	0,2	0,09	0,03	0,17	0,02
7	0,09	0,18	0,06	0,12	0,15	0,1	0,07	0,23
8	0,22	0,13	0,12	0,15	0,07	0,04	0,19	0,08
9	0,1	0,24	0,08	0,07	0,17	0,05	0,16	0,13
10	0,04	0,17	0,15	0,11	0,1	0,09	0,13	0,21
11	0,17	0,05	0,16	0,22	0,08	0,19	0,09	0,04
12	0,12	0,09	0,08	0,14	0,16	0,21	0,04	0,16
13	0,23	0,1	0,07	0,06	0,05	0,12	0,22	0,15
14	0,16	0,08	0,05	0,18	0,11	0,15	0,07	0,2
15	0,24	0,12	0,13	0,09	0,14	0,08	0,15	0,05

16	0,11	0,04	0,19	0,16	0,18	0,12	0,13	0,07
17	0,09	0,23	0,05	0,21	0,15	0,1	0,12	0,05
18	0,2	0,15	0,1	0,14	0,08	0,06	0,17	0,1
19	0,15	0,06	0,16	0,23	0,07	0,19	0,08	0,06
20	0,22	0,12	0,06	0,07	0,04	0,13	0,2	0,16
21	0,13	0,08	0,1	0,09	0,21	0,19	0,05	0,15
22	0,08	0,2	0,07	0,13	0,14	0,09	0,05	0,24

Таблица 2 – Матрица условных вероятностей для вариантов 1, 5, 9, 13, 17, 21

i,j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
S_1	0,14	0,22	0	0,27	0,09	0	0,12	0,16
S_2	0,25	0	0,13	0,08	0,2	0,13	0,21	0
S_3	0	0,26	0,16	0,22	0,12	0,09	0	0,15
S_4	0,07	0,18	0,24	0	0,29	0	0,1	0,12
S_5	0,09	0,3	0,08	0,21	0	0,17	0	0,15
S_6	0	0,14	0,15	0	0,28	0,07	0,23	0,13
S_7	0,15	0,06	0	0,27	0,24	0,08	0,2	0
S_8	0,23	0	0,16	0,1	0	0,19	0,07	0,25

Таблица 3 – Матрица условных вероятностей для вариантов 2, 6, 10, 14, 18, 22

hi	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
S_1	0	0,17	0,28	0	0,13	0,08	0,23	0,11
S_2	0,13	0,05	0	0,26	0,19	0,13	0	0,24
S_3	0,14	0	0,1	0,15	0,29	0	0,07	0,25
S_4	0,07	0,18	0,24	0	0,28	0	0,1	0,13
S_5	0,26	0	0,19	0,08	0	0,1	0,28	0,09
S_6	0,06	0,24	0	0,17	0,09	0,33	0	0,11
S_7	0	0,08	0,15	0,27	0,22	0,08	0,2	0
S_8	0,09	0,25	0,14	0,16	0	0,21	0,15	0

Таблица 4 – Матрица условных вероятностей для вариантов 3, 7, 11, 15, 19, 23

i,j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
S_1	0,24	0,2	0	0,15	0,22	0	0,14	0,05
S_2	0,15	0	0,08	0,14	0,19	0,23	0,21	0

S_3	0	0,14	0,27	0,24	0,15	0,11	0	0,09
S_4	0,09	0,13	0,28	0	0,25	0	0,15	0,1
S_5	0,11	0,22	0,2	0,07	0	0,27	0	0,13
S_6	0	0,06	0,09	0	0,2	0,15	0,29	0,21
S_7	0,1	0,25	0	0,08	0,14	0,17	0,26	0
S_8	0,06	0	0,3	0,14	0	0,23	0,07	0,2

Таблица 5 – Матрица условных вероятностей для вариантов 4, 8, 12**,** 16, 20, 24

i,j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
S_1	0	0,18	0,07	0	0,3	0,12	0,13	0,2
S_2	0,29	0,11	0	0,08	0,21	0,17	0	0,14
S_3	0,06	0	0,15	0,26	0,18	0	0,07	0,28
S_4	0,14	0,09	0,3	0	0,22	0	0,19	0,06
S_5	0,2	0	0,27	0,07	0	0,1	0,21	0,15
S_6	0,15	0,21	0	0,06	0,11	0,29	0	0,18
S_7	0	0,12	0,28	0,15	0,09	0,2	0,16	0
S_8	0.1	0,07	0,18	0,29	0	0,21	0,15	0

5. Контрольные вопросы

1) Что называют дискретным источником сообщений?

2) Что характеризует энтропия сообщения, и каким образом она может быть определена для дискретного источника сообщений?

3) В каком случае энтропия дискретного источника сообщений принимает максимальное значение?

4) Как можно найти количество информации, содержащееся в дискретном сообщении?

5) Как определяется условная энтропия источника сообщений при наличии статистической связи между состояниями этого источника?

6) Что характеризует информационная избыточность источника сообщений?

7) Какие выделяют частные виды информационной избыточности и как они связаны с общей избыточностью источника сообщений?

Лабораторная работа №3
«Расчёт условной энтропии дискретных сообщений, передаваемых по каналу связи с помехами»

1 Цель работы

- приобрести умение определять условную энтропию, энтропию объединения и информационные потери для дискретных сообщений, передаваемых по каналу связи, в котором присутствуют помехи.

2 Основные теоретические сведения

Понятие условной энтропии в теории информации используется при определении взаимозависимости между символами кодируемого алфавита, для определения потерь при передаче информации по каналам связи, при вычислении энтропии объединения.

При нахождении условной энтропии в том или ином виде используются условные вероятности.

Если при передаче *N* сообщений символ *a* появится *M* раз, символ *b* появится *L* раз, а символ ***a*** вместе с символом b **–** *К* раз, то вероятности появления символов *a* и *b* будут *p(a)=M/N* и *p(b)=L/N;* вероятность совместного появления символов *a* и *b* *p(a,b)=K/N*. Отсюда условная вероятность появления символа *b* относительно символа *a* и условная вероятность появления символа *a* относительно символа *b* будут:

$$p(b|a)=p(a,b)/p(d)=(K/N)/(M/N)=K/M;$$

$$p(a|b)=p(a,b)/p(b)=(K/N)l(L/N)=K/L.$$

При известной условной вероятности можно определить вероятности совместного появления символов:

$$p(a,b)=p(a)p(b|a)=p(b)p(a|b).$$

Условная энтропия источника сообщений *В* относительно источника *А* характеризует степень неопределенности в сообщении из источника *В,* при известном сообщении из источника *А*.

Условная энтропия дискретного источника сообщений *В* относительно источника сообщений ***А*** может быть определена следующим образом:

$$H\left(B|A\right)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}p\left(a_i\right)p\left(b_j|a_i\right)\log_2 p\left(b_j|a_i\right)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}p\left(a_i,b_i\right)\log_2 p\left(b_i|a_i\right).$$

В общем случае, если передается *m* символов источника *A* и ожидается получить *m* символов источника *B*, то влияние помех в канале связи полностью описывается ***канальной матрицей***:

hj	b_1	b_2	…	*bj*	…	*bm*
a_1	*p{a_x Ь$_x$)*	*p(a i\\b_2)*	…	$p(a_1\|b_1)$	…	$p(a_1\|b_m)$
a_2	*p($a_2$bi)*	*p(a_2 b_2)*	…	$p(a_2\|b_2)$	…	$p(a_2\|b_m)$
…	, • •	, • •	…	…	…	…
a_t	*p(djb\\)*	*p(a_t b_2)*	…	$p(a_i\|b_i)$	…	$p(a_i\|b_m)$
…	. . .	. • •	…	…	…	…
a_m	*p(a_mb\\)*	*p{a_m b_2)*	…	*p(a_m b,)*	…	$p(a_m\|b_m)$

Вероятности, расположенные по диагонали (выделены полужирным шрифтом) канальной матрицы, определяют правильный прием, остальные - ложный. Вероятности, заполняющие столбцы канальной матрицы, обычно уменьшаются по мере удаления от главной диагонали и при полном отсутствии помех все, коме вероятностей, расположенных на главной диагонали, равны нулю.

Энтропия объединения H(A,B) характеризует неопределенность того, что было послано сообщение из источника *A*, а принято сообщение из источника *B*. Для ансамблей переданных сообщений *A* и принятых сообщений *B* энтропия объединения представляет собой сумму вида:

$$H(A,B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right)\log_2 p\left(a_i, b_j\right) \text{(бит/два символа)};$$

где $p(a_i b_j)$ - вероятность совместного появления в сообщениях символов a_i и b_j из ансамблей *A* и *B*.

Энтропия объединения и условная энтропия связаны между собой соотношениями:

$$H(A,B) = H(A) + H(B\backslash A) = H(B) + H(A\backslash B);$$
$$H(B\backslash A) = H(A,B) - H(A);\ H(A\backslash B) = H(A,B) - H(B).$$

Энтропия объединения может быть найдена на основе матрицы совместных вероятностей:

u	b_1	b_2	…	b_m
d	$p(a_1,b_1)$	$p(a_1 b_2)$	…	$P(a_1 b_m)$
d_2	$p(a_2,b_1)$	$p(a_2,b_2)$	…	$p(a_2,b_m)$
…	…	…	…	…
dm	$P(a_m,b_1)$	$p(a_m,b_2)$	…	$P(a_m, b_m)$

Такая матрица обладает следующим свойством:

$$\sum_{i=1}^{m} p(a_i, b_i) = p(b_i); \ \sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right) = p(a_i); \text{ при этом } \sum_{i=1}^{m} p(a_i) = \sum_{j=1}^{m} p\left(b_j\right) = 1.$$

Данное свойство, в свою очередь, позволяет вычислить энтропию, как источника, так и приемника сообщений непосредственно по канальной матрице:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right) \log_2 \sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right);$$

$$H(B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right) \log_2 \sum_{j=1}^{m} p\left(a_i, b_j\right);$$

На основе условной энтропии и энтропии объединения можно определить потери информации в канале связи с шумами. ***Информационные потери*** при передаче *n* символов по данному каналу связи можно найти из формулы:

$$\Delta I = n \cdot H\left(A|B\right)$$

Отсюда среднее количество принятой информации может быть определено следующим образом:

$$I = n\left[H(B) - H\left(A|B\right)\right] = n \cdot H(B) - \Delta I.$$

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) Составить канальную матрицу, описывающую данный канал связи с точки зрения условий прохождения символов s_1, s_2, s_3, s_4, для которых известны частоты появления в сообщении (табл. 2.1).

4) Определить общую условную энтропию сообщений, алфавитом которых ЯВЛЯЮТСЯ СИМВОЛЫ S_1, S_2, S_3, S_4, если известны вероятности появления этих символов в передаваемых сообщениях (табл. 2.2).

5) Вычислить энтропию принятых сообщений.

6) Составить матрицу совместных вероятностей.

7) Определить энтропию объединения.

8) Найти информационные потери при передаче 500 символов алфавита s_1, s_2, s_3, s_4 и количество принятой информации.

9) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Варианты заданий

Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица 1 – Частоты появления символов на выходе канала связи при 150 случаях передачи каждого символа

Вар.	Пер. симв.	Принятые символы				Вар.	Пер. симв.	Принятые символы			
		s_1	s_2	s_3	s_4			s_1	s_2	s_3	s_4
1	S_1	148	0	2	0	4	S_1	146	1	2	1
7	S_2	0	147	1	2	10	S_2	0	148	1	1
13	S_3	1	0	149	0	16	S_3	0	3	147	0
19	S_4	0	3	1	146	22	S_4	1	0	0	149
2	S_1	147	2	0	1	5	S_1	147	2	1	0
8	S_2	1	149	0	0	11	S_2	3	146	0	1
14	S_3	0	2	146	2	17	S_3	0	1	149	0
20	S_4	2	0	0	148	23	S_4	0	2	0	148
3	S_1	149	1	0	0	6	S_1	148	1	1	0
9	S_2	1	146	3	0	12	S_2	2	147	1	0
15	S_3	2	0	148	0	18	S_3	2	1	146	1
21	S_4	0	1	2	147	24	S_4	0	0	1	149

Таблица 2 – Вероятности появления символов в сообщениях

Вар.	Символы алфавита				Вари-ант	Символы алфавита			
	s_1	s_2	s_3	s_4		s_1	s_2	s_3	s_4
1	0,38	0,21	0,32	0,09	13	0,09	0,15	0,41	0,35
2	0,27	0,39	0,11	0,23	14	0,16	0,28	0,32	0,24
3	0,34	0,08	0,26	0,32	15	0,23	0,40	0,17	0,20
4	0,42	0,25	0,15	0,18	16	0,35	0,09	0,31	0,25
5	0,29	0,16	0,31	0,24	17	0,42	0,36	0,08	0,14
6	0,13	0,09	0,41	0,37	18	0,10	0,17	0,33	0,40
7	0,33	0,24	0,27	0,16	19	0,22	0,34	0,18	0,26
8	0,40	0,31	0,19	0,10	20	0,31	0,08	0,42	0,19
9	0,08	0,17	0,42	0,33	21	0,25	0,37	0,15	0,23
10	0,25	0,42	0,18	0,15	22	0,19	0,41	0,09	0,31
11	0,19	0,26	0,31	0,24	23	0,40	0,12	0,30	0,18
12	0,30	0,08	0,22	0,40	24	0,08	0,29	0,41	0,22

5 Пример выполнения работы

Пусть при передаче сообщений по каналу связи с шумами была получена следующая статистика: символ s_1 из 100 раз был принят 97 раз, 2 раза был принят символ s_2 *и 1* раз - символ s_3; при передаче s_2 98 раз был принят s_2, 2 раза – s_1**,** при передаче s_3 96 раз был принят s_3, 2 раза - s_2 и 2 раза - s_4; при передаче s_4 99 раз был принят s_4 и 1 раз - s_3**.** Вероятности появления этих символов в передаваемых сообщениях соответственно равны:

$p(s_1)$ = 0,37; $p(s_2)$ = 0,3; $p(s_3)$ = 0,23; $p(s_3)$ = 0,l.

Канальная матрица будет иметь следующий вид:

$$P\left(a|b\right)=\begin{bmatrix} 0.97 & 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0.02 & 0.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.96 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Определим общую условную энтропию сообщений:

$$H\left(B|A\right)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}p\left(a_i\right)p\left(b_j|a_i\right)\log_2 p\left(b_j|a_i\right);$$

$H\left(B|A\right)$= - [0,37-(0,97-$\log_2$0,97 + 0,02-$\log_2$0,02 + 0,01$\log_2$0,01) + +0,3(0,02-$\log_2$0,02 + 0,98-$\log_2$0,98) + 0,23(0,02-$\log_2$0,02 + 0,96 1$\text{og}_2$0,96) + 0,01-(0,02-$\log_2$0,02 + 0,96-$\log_2$0,96) + 0,l(0,011$\text{og}_2$0,01 + 0,99-$\log_2$0,99) = 0,37 (0,043 + 0,113 + 0,066) + 0,3 (0,113 + 0,029) + 0,23 (0,113 + + 0,057) + 0,01 (0,066 + 0,014) = 0,082 + 0,042 + 0,064 + 0,008 == 0,196 бит/символ.

Определим энтропию принятых сообщений:

$$H\left(B|A\right)=-\sum_{i=1}^{m}p\left(b_j\right)\log_2 p\left(b_j\right);$$

где $p\left(b_j\right)=-\sum_{i=1}^{m}p\left(a_i\right)p\left(b_j|a_i\right);$ *причём* $\sum_{j=1}^{m}p\left(b_i\right)=1.$

$p(b_1)$ = 0,37⋅0,97 + 0,3-0,02 = 0,3649;

$p(b_2)$ = 0,37⋅0,02 + 0,3⋅0,98 + 0,23⋅0,02 = 0,306;

$p(b_3)$ = 0,37⋅0,01 + 0,23⋅0,96 + 0,1⋅0,01 = 0,2255;

$p(b_4)$ = 0,23⋅0,02 + 0,1⋅0,99 = 0,1036;

0.3649 + 0,306 + 0,2255 + = 1;

H(B) = - (0,3649⋅$\log_2$0,3649 +0,306⋅$\log_2$0,306 + 0,2255⋅$\log_2$0,2255 + +0,1036⋅$\log_2$0,1036 = 0,5306 + 0,5227 + 0,4842 + 0,3377 = 1,8352 бит/символ.

Составим матрицу совместных вероятностей, определив для этого все совместные вероятности:

$p(a_i,b_j) = p(a_i)\cdot p(b_j|a_i)$;

$p(a_1 b_1)$ = 0,37·0,97 = 0,3589;

$p(a_2 b_3)$ = 0,37·0,01 = 0,0037;

$p(a_2 b_1)$ = 0,3·0,02 = 0,006;

$p(a_2 b_3)$ = 0,3·0 = 0;

$p(a_3 b_1)$ = 0,23·0 = 0;

$p(a_3 b_3)$ = 0,3·0,96 = 0,2208;

$p(a_4 b_1)$ = 0,1·0 = 0;

$p(a_4 b_3)$ = 0,1·0,01 = 0,001;

$p(a_1 b_2)$ = 0,37·0,02 = 0,0074;

$p(a_1 b_4)$ = 0,37·0 = 0;

$p(a_2 b_2)$ = 0,3·0,98 = 0,249;

$p(a_2 b_4)$ = 0,3·0= 0;

$p(a_3 b_2)$ = 0,23·0,02 = 0,0046;

$p(a_3 b_4)$ = 0,23·0,02 = 0,0046;

$p(a_4 b_2)$ = 0,1·0 = 0;

$p(a_4 b_4)$ = 0,1·0,99 = 0,099;

$$P(a,b) = \begin{bmatrix} 0.3589 & 0.0074 & 0.0037 & 0 \\ 0.006 & 0.249 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0046 & 0.2208 & 0.0046 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0.099 \end{bmatrix}$$

Определим энтропию объединения:

$$H(A,B) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i,b_j);$$

$H(A,B)$ = - (0,3589·1og$_2$0,3589 +0,0074-log$_2$0,0074 +
+ 0,00374·log$_2$0,0037 + 0,006·1og$_2$0,006 + 0,2494·log$_2$0,249 +
+ 0,0046·1og$_2$0,0046 + 0,22084·log$_2$0,2208 + 0,00464·log$_2$0,0046 +
+ 0,001·log$_2$0,001 + 0,099·1og$_2$0,099) = 2,0494 бит/символ.

Найдем информационные потери при передаче 500 символов:

$$\Delta I = n\cdot H(A|B);$$

$$H(A|B) = H(A,B) - H(B).$$

$H(A\backslash B)$ = 2,0494 - 1,8352 = 0,2142 бит/символ.
ΔI = 500$\cdot$0,2142 = 107,1 бит.

Отсюда количество принятой информации будет:

$$\Delta I = n \cdot H\left(B\right) - \Delta I;$$

ΔI = 500 *1,8352 - 107,1 = 810,5 бит.

5 Контрольные вопросы

1) Что характеризует и как определяется условная энтропия одного дискретного источника сообщений относительно другого?

2) В каком случае условная энтропия равна нулю?

3) Как строится и что характеризует канальная матрица?

4) Что характеризует и как определяется энтропия объединения двух дискретных источников сообщений?

5) Чему равна энтропия объединения источников сообщений при их полной статистической зависимости?

6) Как связана энтропия объединения и условная энтропия двух статистически зависимых источников сообщений?

7) Как определяются информационные потери при передаче сообщений по каналу связи с помехами?

Лабораторная работа №4
«Изучение методов Шеннона – Фано и Хафмана по построению эффективных кодов»

1 Цель работы

- изучить возможности эффективного кодирования информации по методам Шеннона – Фано и Хаффмана.

2 Основные теоретические сведения

Кодирование, при котором обеспечивается минимальная средняя длина кодовых слов, называется ***эффективным*** (оптимальным). В эффективном коде символу, встречающемся чаще всего, присваивается наиболее короткая кодовая комбинация.

Задачи эффективного кодирования заключаются в следующем:

1) Запоминание максимального количества информации в ограниченной памяти.

2) Обеспечение максимальной пропускной способности канала связи.

Эффективное кодирование базируется на теореме Шеннона о кодировании при отсутствии помех, согласно которой минимальная средняя длина кодовых слов определяется соотношением:

$$\bar{L}_{\min} = \frac{H}{\log_2 K};$$

где H – энтропия источника сообщений, K – основание кода. Для двоичного кода, очевидно, что $L_{min} = H$.

Эффективностью кода x называется отношение L_{min} к реально достигнутой в данном коде средней длине кодовых слов $\bar{L}$:

$$\chi = \frac{\bar{L}_{\min}}{\bar{L}} = \frac{H}{\bar{L}\log_2 K}.$$

Средняя длина кодовых комбинаций может быть найдена следующим образом:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{m} p(s_i) L_i;$$

где L_i - длина кодовой комбинации, соответствующей символу s_i из алфавита размером $\boldsymbol{m}$.

Для случая отсутствия статистической взаимосвязи между символами метод построения эффективных кодов впервые был предложен Шенноном и Фано.

Для двоичного кода метод Шеннона-Фано сводится к следующему:

1) Буквы алфавита располагаются в порядке убывания вероятностей.

2) Алфавит букв разбивается на две группы таким образом, чтобы суммарные вероятности букв обеих групп были по возможности равны. Первой группе присваивается символ 1, второй символ – 0.

3) Каждую из образованных групп вновь делят на две части с приблизительно равными суммарными вероятностями и присваивают им 1 и 0. Таким образом, получают вторые цифры кода.

4) Процесс повторяется до тех пор, пока в каждой подгруппе не останется по одной букве.

Рассмотрим пример построения кода Шеннона-Фано для алфавита из шести символов (таблица 1). Кодовое дерево, соответствующее полученному коду Шеннона-Фано, представлено на рисунке 1.

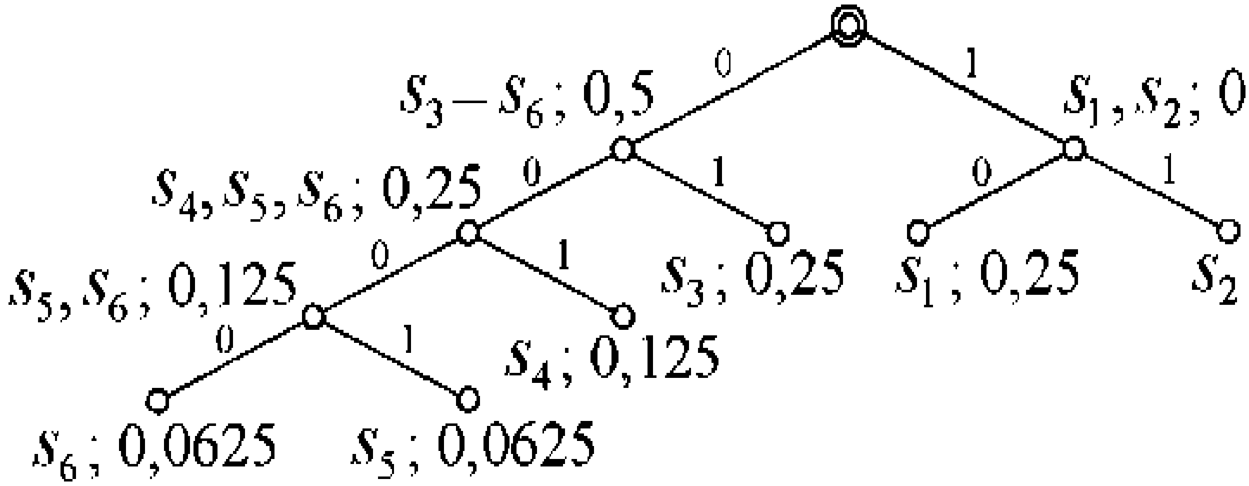


Рисунок 1 – Кодовое дерево для кода Шеннона-Фано

Таблица 1 – Получение эффективного кода по методу Шеннона –Фано

Символы исходного алфавита	$Pis,)$	Разделение символов на группы				Кодовые слова
		1	2	3	4	
S_1	0,25	}I – 1	I-1			11

S2	0,25			II-0			10
S3	0,25		II – 0	III-1			01
S4	0,125			IV – 0	IV-1		001
S5	0,0625				1 0	V-1	0001
S6	0,0625					VI-0	0000

Метод Шеннона-Фано не всегда приводит к однозначному построению кода. От указанного недостатка свободен метод Хаффмана.

Для двоичного кода метод Хаффмана сводится к следующему:

1) Буквы алфавита выписываются в столбец в порядке убывания вероятностей.

2) Две последние буквы объединяются в одну вспомогательную букву, которой приписывается суммарная вероятность.

3) Вероятности букв, участвующих в объединении и полученная суммарная вероятность вновь располагаются в порядке убывания вероятностей в дополнительном столбце, а две последние буквы объединяются.

4) Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена единственная вспомогательная буква с суммарной вероятностью, равной 1.

Для получения кодовой комбинации, соответствующей данной букве необходимо проследить путь перехода по строкам и столбцам таблицы.

Рассмотрим пример построения кода Хаффмана для алфавита из восьми символов (таблица 2). Результат показан на рисунке 2 в виде кодового дерева соответствующего коду Хаффмана.

Таблица 2 – Получение эффективного кода по методу Хаффмана

Символы	Вероятности	Вспомогательные столбцы			
		1	2	3	4
s_1	0,4	0,4	0,4	0,6	1
s_2	0,25	0,25	0,35	0,4	
s_3	0,2	0,2	0,25		
s_4	0,1	0,15			
s_5	0,05				

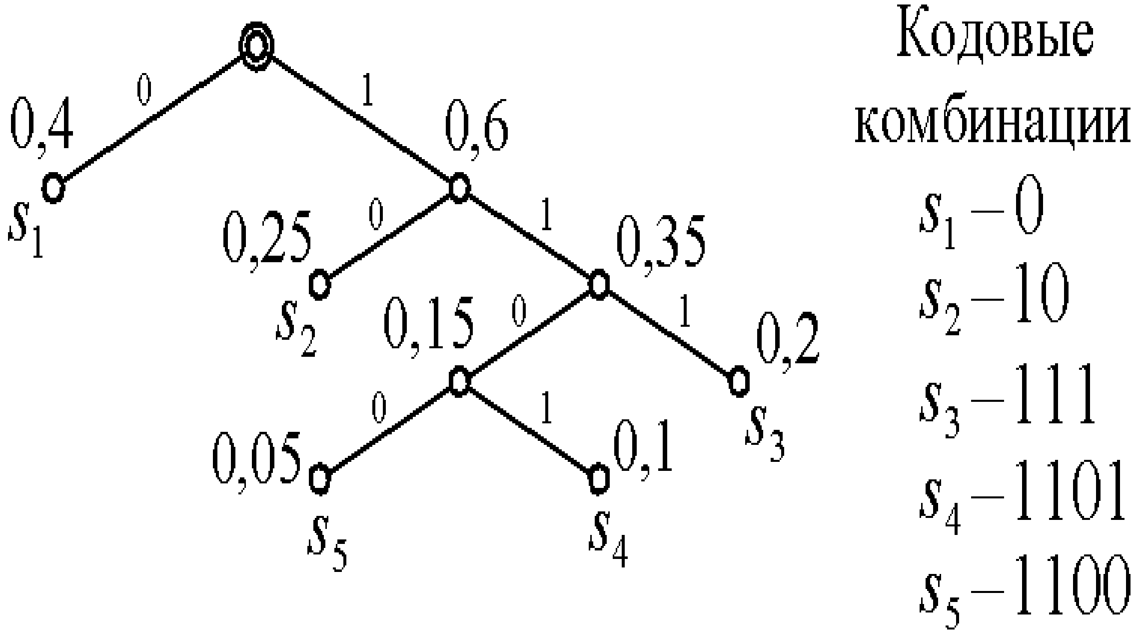


Рисунок 2 – Пример кодового дерева для кода Хаффмана

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) На основе заданного первичного алфавита и вероятностей появления символов этого алфавита (табл. 3.3) получить в форме таблицы двоичный код Шеннона-Фано.

4) Построить кодовое дерево для полученного кода Шеннона-Фано.

5) Определить эффективность кода, полученного по методу Шеннона-Фано.

6) Выполнить пункты 3, 4, 5 для метода Хаффмана.

7) Сравнить эффективности методов Шеннона-Фано и Хаффмана. Сделать выводы о полученных результатах.

8) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Варианты заданий

Номер варианта студента определяется как порядковый номер в журнале преподавателя.

Таблица 3 – Вероятности появления символов для различных вариантов

Вар.	Символы алфавита источника сообщений											
	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12
1	0,14	0,06	0,05	0,08	0,13	0,04	0,01	0,09	0,15	0,02	0,11	0,12
2	0,11	0,05	0,09	0,10	0,12	0,03	0,02	0,08	0,15	0,07	0,14	0,04
3	0,13	0,07	0,05	0,06	0,15	0,04	0,11	0,02	0,12	0,16	0,08	0,01
4	0,02	0,11	0,12	0,01	0,09	0,15	0,08	0,13	0,04	0,14	0,06	0,05
5	0,07	0,14	0,04	0,02	0,08	0,15	0,10	0,12	0,03	0,11	0,05	0,09
6	0,16	0,08	0,01	0,11	0,02	0,12	0,06	0,15	0,04	0,13	0,07	0,05
7	0,01	0,09	0,15	0,02	0,11	0,12	0,14	0,06	0,05	0,08	0,13	0,04
8	0,02	0,08	0,15	0,07	0,14	0,04	0,13	0,07	0,05	0,06	0,15	0,04
9	0,11	0,02	0,12	0,16	0,08	0,01	0,07	0,05	0,13	0,06	0,15	0,04
10	0,06	0,05	0,14	0,13	0,04	0,08	0,15	0,01	0,09	0,12	0,02	0,11
11	0,09	0,11	0,05	0,03	0,10	0,12	0,15	0,02	0,08	0,14	0,04	0,07
12	0,05	0,13	0,07	0,15	0,04	0,06	0,02	0,12	0,11	0,04	0,07	0,14
13	0,12	0,02	0,11	0,09	0,15	0,01	0,13	0,04	0,08	0,06	0,05	0,14
14	0,14	0,04	0,07	0,15	0,02	0,08	0,03	0,10	0,12	0,09	0,11	0,05
15	0,04	0,07	0,14	0,02	0,12	0,11	0,15	0,04	0,06	0,05	0,13	0,07
16	0,05	0,07	0,13	0,04	0,15	0,06	0,12	0,02	0,11	0,01	0,08	0,16
17	0,1	0,03	0,05	0,09	0,14	0,04	0,01	0,08	0,16	0,04	0,12	0,14
18	0,12	0,07	0,08	0,11	0,16	0,01	0,04	0,06	0,13	0,09	0,1	0,03
19	0,11	0,08	0,07	0,04	0,14	0,05	0,13	0,02	0,1	0,15	0,09	0,02
20	0,03	0,12	0,14	0,02	0,08	0,15	0,1	0,11	0,03	0,12	0,05	0,05
21	0,08	0,13	0,05	0,01	0,06	0,14	0,11	0,13	0,06	0,1	0,04	0,09
22	0,15	0,09	0,02	0,13	0,02	0,1	0,08	0,16	0,01	0,12	0,06	0,06
23	0,03	0,11	0,16	0,05	0,14	0,15	0,09	0,01	0,04	0,07	0,13	0,02
24	0,06	0,01	0,12	0,09	0,16	0,02	0,11	0,03	0,08	0,05	0,15	0,12

5 Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность эффективного кодирования?
2. Каковы основные задачи эффективного кодирования?
3. Как определяется средняя длина кодового слова?
4. Чему равна нижняя граница эффективного кодирования?
5. Как определяется эффективность кода?
6. В каком случае метод Шеннона-Фано гарантированно обеспечивает получение эффективного кода?
7. С помощью какой операции в методе Хаффмана обеспечивается получение вспомогательных символов?

Лабораторная работа №5
«Изучение метода арифметического кодирования последовательностей символов»

1 Цель работы

- приобрести умение производить арифметическое кодирование последовательностей символов с целью сжатия информации, а также умение декодировать арифметический код.

2 Основные теоретические сведения

Арифметическое кодирование представляет собой метод сжатия информации, в котором кодируемая последовательность символов представляется в виде дробного числа x, принимающего значения из интервала $0 < x < 1$.

Пусть задан дискретный источник сообщений [*S, p(si)*] с алфавитом *S={sl, , sm}* и распределением вероятностей *p(si)*. На выходе источника задана последовательность символов $\overline{s} = \left(s_{i1}, s_{i2}, \ldots s_{ik}, \ldots, s_{iM}\right)$;
где *i* - порядковый номер символа в алфавите; *k* - порядковый номер символа в последовательности.

Для заданной последовательности ***s*** требуется получить кодовое слово: $\overline{x} = \left(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jL}\right)$; где xj = 0 или 1.

Определим величины, называемые кумулятивными вероятностями символов *S:*

$$q\left(s_Y\right) = 0; \quad q\left(s_2\right) = p\left(s_1\right); \; \ldots \; q\left(s_m\right) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i.$$

В рекурсивной форме данные вероятности можно записать следующим образом:

$$q\left(s_i\right) = q\left(s_{i-1}\right) + p\left(s_{i-1}\right).$$

Обозначим через $\overline{s}_{jk}$ последовательность символов, полученную путем присоединения к исходной последовательности $\overline{s}_{jk-1}$, символа s_i.

Определим величины $F(\overline{s}_{jk}\ \ )$ и $G(s_u)$, представляющие собой нижнюю границу и длину интервала вероятностей, который соответствует последовательности $\overline{s}_{jk}$:

$$F\left(\overline{s}_{jk}\right) = F\left(\overline{s}_{jk-1}\right) + q\left(s_i\right) \cdot G\left(\overline{s}_{jk-1}\right)$$

$$G\left(\overline{s}_{jk}\right)=p\left(s_i\right)\cdot G\left(\overline{s}_{jk-1}\right).$$

При *k=0* (начальный шаг алгоритма) принимают $F=0$**,** $G=1$
Длина кодового слова *x,* обеспечивающая однозначное декодирование последовательности символов определяется по формуле:

$$L=\left[-\log_2 G\left(\overline{s}\right)\right]+1;$$

где $\overline{s}$ – округление числа, стоящего в скобках, до целого в большую сторону.

Искомое кодовое слово $\overline{x}$ определяется как L знаков после запятой в двоичной записи числа $F\left(\overline{s}\right)+G\left(\overline{s}\right)/2$,**,** где *F(s)* и G**(***s)* **-** границы интервала вероятностей, соответствующие заданной последовательности $\overline{s}$ **:**

$$Bin\left[F\left(\overline{s}\right)+G\left(\overline{s}\right)/2\right]=0,x_{j2},...,x_{jL}\rightarrow\overline{x}=\left(x_{j1},x_{j2},...,x_{jL}\right)$$

Таким образом, метод арифметического кодирования заключается в последовательном нахождении величин *q(s*$_t$*), F(s*$_n$ **)**,
G(S$_{jk}$), для *i* = 2, 3, ... , *m* и *k* = 1,2, ... , *M*, пока не будут определены значения F(s) и *G(s)*. На основе последних значений *F(s)* и G(s) и определяется искомое кодовое слово.

Для пояснения метода арифметического кодирования можно прибегнуть к его графической интерпретации. В этом случае интервал [0, 1) вероятностей появления символов рассматривается в виде отрезка длиной 1. При этом символам на данном отрезке будут соответствовать непересекающиеся полуинтервалы длинами, равными вероятностям появления символов (рисунок 1). Кумулятивные вероятности соответствуют началам этих полуинтервалов. Эти точки идентифицируют сообщения источника.

На каждом шаге алгоритма производится пересчет границ всего отрезка, в котором будет расположено число, соответствующее кодовому слову. Число *F(S*$_j$) в этом случае является на чаленой точкой отрезка на шаге *k*, а число G($\overline{s}_{ik}$) является длиной данного отрезка.

Декодирование полученного арифметического кода заключается в выполнении следующих действий. На нулевом шаге
(*k*=0) принимаем *q(sM+1)* = 1, F($\overline{s}_{ik}$) = 0, G($\overline{s}_{ik}$) = 1. Последовательно (от i = 1 до) для символов si на каждом шаге производим проверку выполнения условия:

$$F(\overline{s}_{ik})+q(s_i)-G(\overline{s}_{ik})<x.$$

Если для символа s_i данное условие не выполнятся, то в качестве символа декодируемой последовательности на данном шаге принимаем s_{i-}

1. В обратном случае (условие выполняется для всех i) принимаем символ s_m.

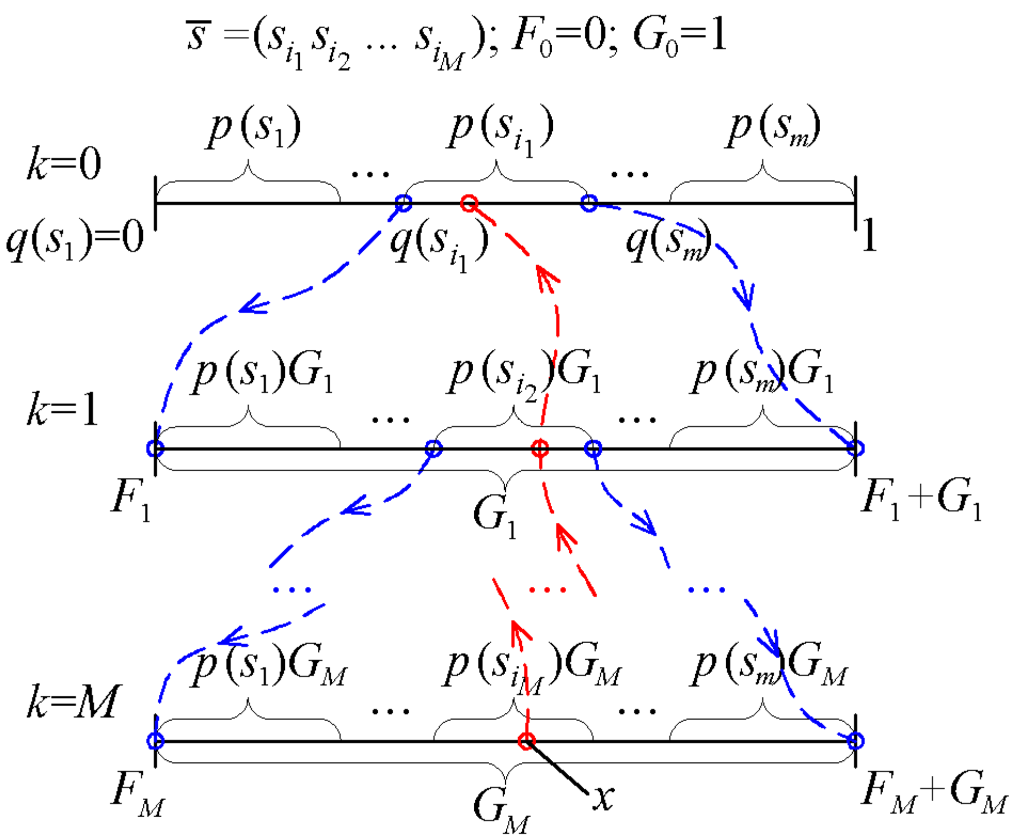


Рисунок 1 - Графическая интерпретация арифметического кодирования

Для найденного символа определяют величины F($\overline{s}_{ik}$) и G($\overline{s}_{ik}$) по тем же формулам, что и при кодировании.

Алгоритм продолжают до тех пор, пока не будет найден последний символ ($k = M$) декодируемой последовательности $\overline{s}$.

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) Произвести арифметическое кодирование заданной последовательности символов (таблица 1)

4) Построить графическую интерпретацию арифметического кодирования.

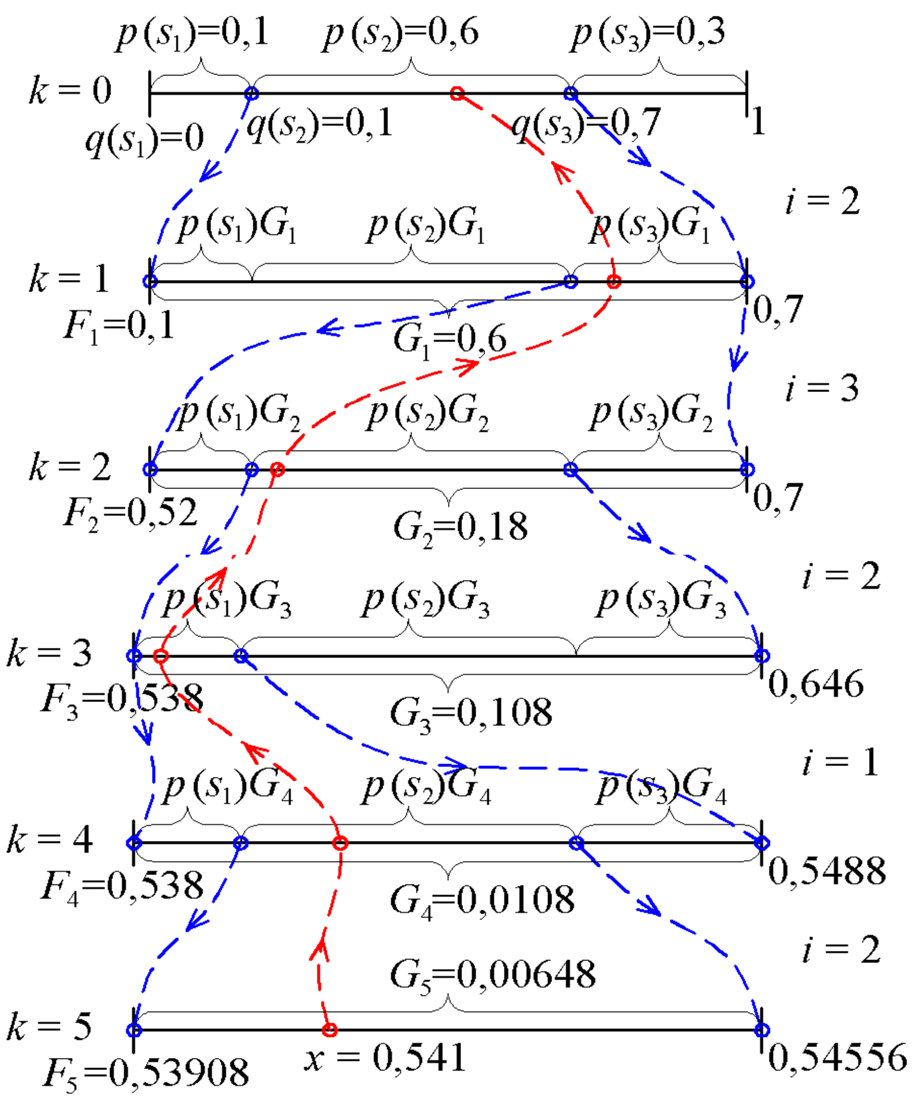
5) Осуществить декодирование полученного арифметического кода.

6) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Пример выполнения работы

Пусть задан дискретный источник сообщений с алфавитом $S=\{s_1, s_2, s_3\}$ и распределением вероятностей $p(s_1)=0{,}1$, $p(s_2)=0{,}6$, $p(s_3)=0{,}3$. Произведем арифметическое кодирование последовательности $\overline{s}$ = $(s_2 s_3 s_2 s_1 s_2)$ длиной M= 5. Процесс арифметического кодирования последовательности s представлен в таблице 1. Графическая интерпретация арифметического кодирования показана на рисунке 2.

$\overline{s}=(s_2\, s_3\, s_2\, s_1\, s_2)$; M=5; F_0=0; G_0=1



L=9; $\overline{x}$ =100010101

Рисунок 2 – Графическая интерпретация арифметического кодирования последовательности $\bar{s}$ = ($s_2 s_3 s_2 s_l s_2$)

Длина кодового слова будет $L = \left[-\log_2 0.00648\right] + 1 = \left[7.2698\right] + 1 = 9$, кодовом слове должно быть не меньше 9 знаков.

Таблица 1 – Арифметическое кодирование последовательности

Шаг *k*;	*Si*	$\bar{s}_{ik}$	*p(s_i)*	*q(s_i)*	$F(\bar{s}_{ik})$	$G(\bar{s}_{ik})$
0	—	—	—	—	0	1
1	*S2*	*S₂*	0,6	0.1	0.1	0,6
2	*S3*	*S2S3*	0,3	0,7	0,52	0,18
3	*S2*	*S2S3S2*	0,6	0.1	0,538	0,108
4	S_1	*S2S3S2S1*	0.1	0	0,538	0,0108
5	S_2	*S2S3S2SIS2*	0,6	0.1	0,53908	0,00648

Отсюда кодовое слово запишется следующим образом x = bin(0,53908 + 0,00648/2) = bin(0,54232) = $0{,}100010101_2$ Процесс декодирования арифметического кода ***x*** = 100010101 представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Декодирование арифметического кода *= 100010101

Шаг к	F_k	G_k	Гипотеза St	$q(s_i)$	Проверка $Fk+qi'G_k< x$	Решение Si	$p(s_i)$
0	x= 100010101 $\rightarrow + x =$ $0.100010101_2 = 0{,}541_{10}$						
1	0	1	S\	0	0 <x	S_2	0,6
			S2	ОД	ОД <x		
			S3	0,7	0,7 >x		
2	0.1	0,6	S\	0	ОД <x	S3	0,3
			S2	од	0,16 <x		
			S3	0,7	0,52 <x		
3	0,52	0,18	S\	0	0,52 <x	S_2	0,6
			S2	од	0,538 <x		
			S3	0,7	0,646 > x		
4	0,538	0,108	S\	0	0,538 <x	S_1	ОД
			S2	од	0,5488 >x		

5	0,538	0,0108	Si	0	0,538 <x	S_2	0,6
			S3	0,7	0.5450 >x		

Отсюда последовательность символов, полученная путем декодирования арифметического кода, будет $S_1S_3S_2S_1S_2$.

5 Варианты заданий

Требуется произвести арифметическое кодирование последовательности символов длиной *M=7* и декодирование полученного кодового слова. Кодируемые последовательности символов и вероятности их появления для каждого варианта задания представлены в таблице 3. Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица 3 – Кодируемая последовательность символов и вероятности их появления

Вар.	*S*	*p(Si)*	*Вар.*	*s*	*pfe)*
1	*S2S4S1S2S3S1S4*	$p(s_1) = 0,1$	*13*	*S3S1S2S3S1S3S4*	$p(s_1)= 0,3$
2	*S4S2S1S3S2S4S1*	$p(s_2) = 0,4$	*14*	*S1S3S1S2S3S4S3*	$p(s_2) = 0,2$
3	*S1S4S3S2S4S1S2*	$p(s_3) = 0,2$	*15*	*S4S3S1S3S1S2S3*	$p(s_3) = 0,4$
4	*S4S1S2S3S1S2S4*	$p(s_4) = 0,3$	*16*	*S3S4S3S1S3S2S1*	$p(s_4) = 0,1$
5	*S1S3S1S4S3S2S1*	*P(si) = 0,4*	*17*	*S2S3S1S2S4S4S2*	$p(s_1) = 0,2$
6	*S3S1S4S1S2S1S3*	$p(s_2) = 0,1$	*18*	*S4S2S2S3S1S2S4*	$p(s_2) = 0,4$
7	*S4S3S1S2S1S3S1*	$p(s_3) = 0,3$	*19*	*S4S3S2S4S2S2S1*	$p(s_3) = 0,1$
8	*S1S4S2S1S3S1S3*	$P(s_4) = 0,2$	*20*	*S3S2S4S4S2S1S2*	*P(s4) = 0,1*
9	*S4S2S4S1S3S4S2*	*P(si) = 0,2*	*21*	*S2S1S3S2S3S3S4*	$p(s_1)= 0,1$
10	*S2S4S1S4S2S4S3*	$p(s_2) = 0,3$	*22*	*S3S2S2S3S4S3S1*	$p(s_2) = 0,3$
11	*S1S4S2S3S4S2S4*	*Piss) = 0,1*	*23*	*S1S2S3S3S2S4S3*	$p(s_3) = 0,4$
12	*S4SIS4S2S4S3S2*	$P(s_4) = 0,4$	*24*	*S3S1S3S4S2S2S3*	$p(s_4) = 0,2$

6 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для

выполнения работы.

3) На основе заданного первичного алфавита и вероятностей появления символов этого алфавита (табл. 3.3) получить в форме таблицы двоичный код Шеннона-Фано.

4) Построить кодовое дерево для полученного кода Шеннона-Фано.

5) Определить эффективность кода, полученного по методу Шеннона-Фано.

6) Выполнить пункты 3, 4, 5 для метода Хаффмана.

7) Сравнить эффективности методов Шеннона-Фано и Хаффмана. Сделать выводы о полученных результатах.

8) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

7 Контрольные вопросы

1) В какую форму преобразуется последовательность символов в методе арифметического кодирования?

2) Что понимают под кумулятивными вероятностями символов?

3) Как в методе арифметического кодирования определяются значения величин F_k и G_k?

4) Что представляют собой величины $p(s_i)$, $q(s_i)$, $Fk \cdot Gk$ в графической интерпретации арифметического кодирования?

5) Как находят значение числа, соответствующего арифметическому коду?

6) В чем заключается декодирование арифметического кода?

7) Какова графическая интерпретация декодирования арифметического кода?

Лабораторная работа №6
«Исследование линейных блоковых кодов»

1 Цель работы

- приобрести умение строить линейные блоковые коды на основе порождающих матриц для обнаружения и исправления ошибок в кодовых словах.

2 Основные теоретические сведения

Блоковыми называют помехоустойчивые коды, в которых процедура кодирования заключается в разбиении входной последовательности информационных символов на блоки, содержащие m символов. Каждому информационному блоку длиной m сопоставляется κ проверочных символов. Полученное кодовое слово из $n = m + \kappa$ символов называют кодовым блоком.

Число несовпадающих позиций в двух кодовых словах x и y называется ***расстоянием Хэмминга*** $d(x,\ y)$ между этими словами.

Для двоичных кодовых слов расстояние Хэмминга может быть получено как число единиц в сумме в кодовых словах по модулю 2. Правила сложения по модулю 2 определяются следующим образом:

$$0 \oplus 0 = 0;\ 0 \oplus 1 = 1;\ 1 \oplus 0 = 1;\ 1 \oplus 1 = 0.$$

Важной характеристикой корректирующего блокового кода С является ***кодовое расстояние***, которое принимается равным наименьшему расстоянию Хэмминга между словами данного кода:

$$d(C) = \min\{\, d(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x}, \bar{y}\ y \in C\, \bar{x} \neq \bar{y}\, \}.$$

Для блоковых кодов справедливы следующие утверждения:

1) Для того чтобы блоковый код С позволял обнаруживать все комбинации из ***t*** или менее ошибок, необходимо и достаточно, чтобы его кодовое расстояние было равно $d(C) = t + 1$.

2) Для того чтобы блоковый код C позволял исправлять все комбинации из ***t*** или менее ошибок необходимо и достаточно, чтобы его кодовое расстояние было равно $d(C) = 2t + 1$.

Для практических расчетов при определении числа проверочных символов k в коде с кодовым расстоянием $d = 3$ используют следующие формулы:

если известна длина полного кодового слова n, то:

$$k = \left[\log_2(n+1)\right];$$

если при расчетах удобнее исходить из заданного числа информационных символов *m,* то:

$$k = \left[\log_2\left\{(m+1) + \left[\log_2(m+1)\right]\right\}\right];$$

где [...] - округление числа, стоящего в скобках, до целого в большую сторону.

Для блоковых кодов с *d = 4*

$$k \ge 1 + \log_2(n+1)$$

или

$$k \ge 1 + \left[\log_2\left\{(m+1) + \log_2(m+1)\right\}\right].$$

Самый большой класс блоковых корректирующих кодов составляют ***линейные коды***, у которых значения проверочных символов определяются при проведении линейных операций над информационными символами.

К линейным операциям относятся сложение и умножение на постоянное число. Для двоичных линейных кодов в качестве линейной операции используют сложение по модулю 2.

Кодовые комбинации линейных блоковых кодов называют ***кодовыми векторами.*** Кодовый вектор, состоящий из одних нулей, называется ***нулевым вектором.*** Число единиц в двоичном кодовом векторе называется ***весом кодового вектора.***

Кодовое расстояние для линейного блокового кода равно минимальному весу его ненулевых кодовых векторов.

Линейные блоковые коды задают при помощи ***порождающих*** матриц, размерность которых равна $m \times n$:

$$G_{m,n} = \left[E_m \middle| P_{m,k}\right] = \left[\begin{matrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{matrix}\middle\|\begin{matrix} p_{11}\, p_{12} \cdots p_{1k} \\ p_{21}\, p_{22} \cdots p_{2k} \\ ... \quad ... \; ... \; ... \\ p_{m1}\, p_{m2} \cdots p_{mk} \end{matrix}\right]$$

где E_m - единичная матрица размера *m;* $P_{m,k}$ - матрица- дополнение, состоящая из проверочных символов p_{ij}**.**

Для кодов с *d* = 2 порождающая матрица имеет следующий вид:

$$G_{m,n} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Во всех кодовых векторах, построенных при помощи такой матрицы, будет четное число единиц.

Для кодов с $d > 3$ вид матрицы P зависит от конкретных требований к порождаемому коду. Этими требованиями могут быть либо минимум проверочных символов, либо максимальная простота кодирующей/декодирующей аппаратуры.

Линейные блоковые коды называются ***совершенными*** (плотно упакованными), если они обнаруживают и исправляют максимальное число ошибок при минимальном числе проверочных символов.

Чем больше вес строк матрицы *P,* тем ближе порождаемый код к совершенному. С другой стороны, число единиц в матрице P определяет число сумматоров по модулю 2 в кодере и декодере канала связи. То есть, чем больше единиц в матрице *P,* тем сложнее аппаратура.

При построении совершенных кодов с $d > 3$ последовательно используются строки матрицы P с весом $Wp = k, k\text{-}1, k\text{-}2, \dots, d\text{-}1$. Таким образом, вес Wp каждой строки матрицы P должен удовлетворять условию:

$$W_p \geq d - 1$$

При построении кодов с максимально простыми кодерами и декодерами каналов связи в матрице P последовательно выбираются строки весом $W_p = 2, 3, \dots, k$.

Если число комбинаций строк матрицы *P,* удовлетворяющих условию $W_p \geq d - 1$, , больше m, то в первом случае (получение совершенного кода) не используют комбинации с наименьшим весом, а во втором (максимальная простота аппаратуры) - с наибольшим.

Матрицу P следует строить таким образом, чтобы число единиц в столбцах данной матрицы было по возможности одинаковым. От числа единиц в столбце матрицы P зависит число проверок, производимых при исправлении ошибок.

В общем виде формулы для определения значений проверочных символов могут быть записаны следующим образом:

$$p_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i; \ \left(j = 1, 2, \dots, k \right);$$

где p_{ij} - элементы матрицы-дополнения P.

Для двоичных кодов значения проверочных символов p_j находят путем суммирования по модулю 2 тех строк матрицы P, номера которых совпадают с номерами информационных символов, значение которых равно единице.

Для линейного блокового кода С с порождающей матрицей $G_{m,n} = \left[E_m \middle| P_{m,k} \right]$ проверочной матрицей будет являться матрица:

$$I'_{k,n} = \left[P_{m,k}^T \middle| E_k \right]$$

Число проверок равно числу k проверочных символов кода.

В общем виде систему проверок можно записать следующим образом:

$$p_j \oplus \sum_{i=1}^{m} p_{ij} a_i = S_j; \;\; j = 1, 2, ..., k.$$

В результате осуществления проверок образуется проверочный вектор $S = [S_l S_2 ... S_j ... S_k]$, называемый *синдромом.* Если все разряды синдрома равны нулю, то принятый кодовый вектор считается безошибочным. Если хотя бы один из разрядов синдрома содержит единицу, то принятый кодовый вектор содержит ошибку.

Исправление одиночной ошибки осуществляется по виду синдрома, так как каждому ошибочному разряду принятого кодового вектора соответствует один единственный синдром. Вид синдрома может быть определен при помощи проверочной матрицы H. Столбцы матрицы H представляют собой синдром для соответствующего ошибочного разряда кодового вектора.

В общем случае для исправления заданного числа ошибок t с помощью линейных блоковых кодов используют *стандартные таблицы декодирования*, содержащие все возможные значения принятых из канала векторов z. Данные таблицы организованы таким образом, чтобы мог быть найден ближайший к z переданный кодовый вектор y (таблица 1).

В первой строке таблицы располагаются все кодовые векторы y_i, число которых составляет $N = 2^m$. В первом столбце второй строки размещается вектор ошибки $\bar{e}_1$, вес которого равен 1.

Остальные ячейки второй строки заполняются векторами, полученными в результате суммирования по модулю 2 вектора $\bar{e}_1$ с вектором $\bar{y}_i$ расположенным в соответствующем столбце первой строки. В первом столбце третьей строки записывается вектор $\bar{e}_2$, вес которого также равен 1, однако, если вектор $\bar{e}_1$ содержит единицу в первом разряде, то $\bar{e}_2$ - во втором. В остальные ячейки третьей строки записывают суммы $\bar{x}_i$, и $\bar{e}_2$.

Таблица 1 – Стандартная таблица для декодирования линейного блокового кода

$\bar{s}_j$	$\bar{e}_j$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\cdots$	$\bar{y}_N$
$\bar{s}_1$	$\bar{e}_1$	$\bar{y}_1+\bar{e}_1$	$\bar{y}_2+\bar{e}_1$	$\cdots$	$\bar{y}_N+\bar{e}_1$
$\bar{s}_2$	$\bar{e}_2$	$\bar{y}_1+\bar{e}_2$	$\bar{y}_2+\bar{e}_2$	$\cdots$	$\bar{y}_N+\bar{e}_2$
$\cdots$				$\cdots$	$\cdots$
$\bar{s}_K$	$\bar{e}_K$	$\bar{y}_1+\bar{e}_K$	$\bar{y}_2+\bar{e}_K$	$\cdots$	$\bar{y}_N+\bar{e}_K$

Аналогично поступают до тех пор, пока не будут просуммированы с векторами $\bar{y}_i$ все векторы $\bar{e}_j$ весом 1, с единицами в каждом из n разрядов. Затем суммируются по модулю 2 векторы $\bar{e}_j$ весом 2, с последовательным перекрытием всех возможных разрядов. Вес вектора $\bar{e}_j$ определяет число исправляемых ошибок. Число векторов $\bar{e}_j$ определяется возможным числом неповторяющихся синдромов и равно $K = 2^k - 1$ (нулевая комбинация говорит об отсутствии ошибки). Условие не повторяемости синдрома позволяет по его виду определять соответствующий ему вектор $\bar{e}_j$.

По виду синдрома $\bar{s}_j$ принятый кодовый вектор может быть отнесен к определенной строке таблицы соответствия (смежному классу). Принятый кодовый вектор сравнивается с векторами, записанными в данную строку и в случае совпадения в каком-либо из столбцов выбирается вектор (истинный), расположенный в первой строке данного столбца.

Векторы ошибок $\bar{e}_j$ не должны быть равны ни одному из кодовых векторов.

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) Построить производящую матрицу G для линейного блокового кода, способного исправлять одиночную ошибку.

4) Для заданных последовательностей информационных символов получить кодовые вектора линейного блокового кода.

5) На основе матрицы-дополнения P к порождающей матрице G получить систему проверок для нахождения синдрома.

6) Построить проверочную матрицу линейного блокового кода.

7) Показать процесс исправления одиночной ошибки в произвольном разряде полученных кодовых векторов на основе синдрома и проверочной матрицы.

8) Построить стандартную таблицу декодирования линейного блокового кода, позволяющую исправить максимально возможное число двойных ошибок.

9) Показать процесс исправления двойной ошибки в произвольном разряде одного из кодовых векторов.

10) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Пример выполнения работы

Пусть требуется построить порождающую матрицу для линейного блокового кода, способного исправлять одиночную ошибку при передаче информационных векторов из 7 символов (например, 0100111, 1101100, 1011010).

Получим порождающую матрицу в приведенной форме:

$$G_{m,n} = \left[E_m \middle| P_{m,k} \right].$$

Поскольку число исправляемых ошибок $t = 1$, то кодовое расстояние для линейного блокового кода будет $d = 2t+1$; d=2*1+1=3.

Так как длина информационных векторов $m = 7$, то число строк порождающей матрицы линейного блокового кода должно быть равно 7. Число столбцов порождающей матрицы равно длине кодовых векторов

$$n = m + k;$$

где k - число проверочных символов, которое при $d = 3$ может быть найдено по формуле:

$$k = \left[\log_2 \left\{ (m = 1) + \left[\log_2 (m+1) \right] \right\} \right]$$

$$k=\left[\log_2\left\{(7+1)+\left[\log_2(7+1)\right]\right\}\right]=\left[\log_2(8+3)\right]=4$$

Отсюда получим $n=7+4=11$.

Таким образом, искомый линейный блоковый код является (11,7,3) – кодом.

Поскольку вес каждой строки матрицы-дополнения P должен быть $W_P > d-1$, то в качестве строк матрицы P примем четырехзначные двоичные комбинации с числом единиц $W_p > 2$. Комбинации выберем так, чтобы число единиц в столбцах матрицы P было одинаковым. Заданным требованиям удовлетворяет следующий набор: 1111, 1110, 1101, 1011, 0111, 0110, 1001. Окончательный вид порождающей матрицы будет:

$$G_{7,11}=\left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1
\end{array}\right]$$

Получим для заданных информационных векторов 0100111, 1101100, 1011010 кодовые вектора линейного (11,7,3)-кода. Для этого найдем значения проверочных символов для каждого информационного вектора путем суммирования по модулю 2 тех строк матрицы Р**,** номера которых совпадают с номерами разрядов, содержащих единицы в информационных векторах:

1) $\underline{0100111}$:

$$\oplus\begin{array}{c}1110\\0111\\0110\\\underline{1001}\\0110\end{array}$$

2) $\underline{1101100}$:

$$\oplus\begin{array}{c}1111\\1110\\1011\\\underline{0111}\\1101\end{array}$$

3) $\underline{1011010}$:

$$\oplus\begin{array}{c}1111\\1101\\1011\\\underline{0110}\\1111\end{array}$$

Отсюда искомые кодовые векторы будут: $\bar{x}_1$ = 01001110110; $\bar{x}_2$ = 11011001101; $\bar{x}_3$ = 10110101111.

Запишем систему проверок для найденной матрицы Р:

$$p_j \oplus \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i = S_i; \left(j = 1, 2, \ldots, k \right).$$

Система проверок будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} p_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_7 = S_1, \\ p_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 = S_2, \\ p_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 = S_3, \\ p_4 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 = S_4. \end{cases}$$

Для того чтобы знать, какая комбинация синдрома S будет соответствовать ошибке в определенном разряде принятого кодового вектора, построим проверочную матрицу линейного блокового кода:

$$I'_{k,n} = \left[P^T_{m,k} \middle| E_k \right]$$

Транспонированная матрица-дополнение P будет выглядеть следующим образом:

$$P^T_{7;4} = \begin{bmatrix} 1111011 \\ 1110110 \\ 1101100 \\ 1011101 \end{bmatrix}$$

Отсюда проверочная матрица линейного блокового кода будет

$$H_{4;11} = \begin{array}{ccccccc|cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Предположим, что в переданных кодовых векторах изошли следующие ошибки (выделены полужирным шрифтом): x_1= 01001010110; x_2 = 11111001101; x_3 = 10110101101.

Найдем согласно полученной системе проверок для каждого переданного кодового вектора синдром $S = [\, S_1 \; S_2 \ldots S_k \,]$:

1). Для кодового вектора X_1:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0

$$\begin{cases} 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1, \\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1, \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0. \end{cases}$$

Синдром 0110 показывает, что значение символа x_6 следует заменить на противоположное.

2). Для кодового вектора X_2:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	P_1	P_2	P_3	P_4
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

$$\begin{cases} 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1, \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1, \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1. \end{cases}$$

Синдром 0110 показывает, что ошибка произошла в символе $\mathbf{x_3}$.

1) Для кодового вектора X_3:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	P_1	P_2	P_3	P_4
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1

$$\begin{cases} 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0, \\ 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \\ 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1, \\ 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0. \end{cases}$$

Синдром 0010 показывает, что значение символа p_3 является ошибочным.

5 Варианты заданий

Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя

Таблица 2 – Варианты заданий для построения линейных блоковых кодов

Вариант	Информационные векторы		
1	10111010	11010101	10101011
2	00010100	00001101	00100010
3	10010100	00110001	10011101
4	00011110	01100000	00100010
5	11100011	00011111	10011101
6	01001010	00110010	01000100
7	10001011	00001101	11010001
8	00010101	10001110	01111001
9	11011110	10110001	10100001
10	01000010	10011110	01011101
11	11000011	11000001	10011101
12	00011010	11010100	00101010
13	10000111	11000110	10010001
14	00001110	10011100	00010011
15	10011100	00110101	11011101
16	00101100	00101000	11000100
17	00010111	11101110	00010001
18	10110100	01011001	11000100
19	00010011	10000110	11100011
20	00101110	00100100	01101000
21	10101101	11010000	01100011
22	10000110	00100100	00011000
23	00000101	11100100	01111011
24	00000110	00100110	01010101

6 Контрольные вопросы

1) Какие помехоустойчивые коды называют блоковыми?
2) Что такое расстояние Хэмминга?
3) Что называют кодовым расстоянием?
4)Какие коды называют линейными блоковыми?
5) Как определяется кодовое расстояние для линейного блокового кода?
6) Как с помощью порождающей матрицей линейного блокового кода осуществляется кодирование информационных слов?
7) Что такое совершенные коды?
8) Какими соображениями руководствуются при построении

матрицы-дополнения для порождающей матрицы линейного блокового кода?

9) Как с помощью проверочной матрицы линейного блокового кода можно определить принадлежность кодового вектора данному коду?

10) Что понимают под синдромом при декодировании линейных блоковых кодов?

11) Каким образом строится стандартная таблица декодирования линейного блокового кода

Лабораторная работа №7
«Построение кода Хэмминга для обнаружения и исправления одиночных ошибок»

1 Цель работы

- приобрести умение строить код Хэмминга для обнаружения и исправления одиночных ошибок в кодовых словах.

2 Основные теоретические сведения

Систематические коды представляют собой блоковые корректирующие коды, в которых информационные и проверочные символы расположены по строго определенной системе и всегда занимают строго определенные места в кодовых словах.

Наиболее известными систематическими кодами, получившими широкое практическое применение, являются коды ***Хэмминга.***

Двоичный код Хэмминга строится следующим образом:

1) Определяется число k проверочных символов из условия:
$2^k > m + k + 1$; где m - число информационных символов.

2) Выбираются места расположения проверочных символов из условия, чтобы проверочные символы участвовали только в одной операции подсчета четности с целью упрощения процесса кодирования. Такими местами являются символы с номерами, являющиеся целыми степенями числа 2, т. е. 1,2 ,4, 8, 16 и т. д. Символы в кодовых словах Хэмминга нумеруются слева направо.

3) Определяются значения символов слова, называемого ***синдромом***:

$$S_k S_{k\text{-}h} .. S_2 S_h$$

из уравнений

$$S_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus ... = 0,$$

т.е. складываются по модулю 2 значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержат 1 в последнем разряде:

$$S_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus ... = 0,$$

т.е. складываются значения тех символов, двоичное представление номеров которых содержат 1 в предпоследнем разряде.

Аналогично получаются выражения для нахождения значений $S_3, S_4, ..., S_k$.

Так:

$$S_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus ... = 0;$$

$$S_4 = x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11} \oplus ... = 0;$$

где x_1, x_2, x_3, x_4,... - значения символов с номерами 1, 2, 3, 4,...

Местоположение ошибки, то есть определение символа с ошибкой осуществляется по значению синдрома. Если синдром состоит одних нулей, т. е.

$$S_k S_{k-1} ... S_2 S_1, = 00...00,,$$

то ошибка отсутствует. Если в синдроме есть символы, отличные от 0, то это говорит о наличии ошибки. Например, если $S4S5S2S_1 = 1000$, то это означает, что ошибка содержится в восьмом символе, так как $8_{10} = 1000_2$.

Другими словами, синдром в коде Хэмминга определяет номер символа с ошибкой. Исправление ошибки осуществляется заменой 0 на 1 либо наоборот 1 на 0.

Для исправления одиночной и обнаружения двойной ошибки, кроме проверок по синдрому, следует проводить еще одну проверку на четность для каждого кодового слова Хэмминга. Чтобы осуществить такую проверку, следует в конце каждого кодового слова добавить проверочный символ таким образом, чтобы сумма единиц в полученном слове всегда была четной. Тогда в случае одной ошибки проверка по синдрому укажет номер ошибочного символа, а проверка на четность укажет наличие ошибки. Если проверка по синдрому укажет на наличие ошибки, а проверка на четность не фиксирует ошибку, то в кодовом слове присутствуют две ошибки.

3 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа предполагает выполнение следующих этапов:

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.

2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.

3) Для заданных кодовых слов построить кодовые слова Хэмминга.

4) Осуществить проверку работоспособности кода путем изменения значения одного из символов в любом кодовом слове Хэмминга.

5) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Пример выполнения работы

Пусть требуется получить кодовое слово Хэмминга для двоичного кодового слова $\bar{x}$ =0 1 1 1 1 1 .

Рассматриваемое кодовое слово содержит шесть информационных символов, то есть m = 6. Число проверочных символов определяется из условия $2^k > m + k + 1$. При этом минимальное число проверочных символов ***к***, при котором выполняется данное условие, будет $k = 4$**,** так как $2^4 = 16 > 6 + 4 + 1 = 11$.

Следовательно, кодовое слово Хэмминга для слова ***x*** = 011111 будет содержать 10 символов, то есть n = 10. При этом проверочными символами будут 1, 2, 4, 8, а информационными символами соответственно будут 3, 5, 6, 7, 9, 10.

Пронумеруем и запишем значения информационных символов.

X_1	X_2	X_3	X4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
k_1	K_2	m_1	k_3	m_2	m_3	m_4	k_4	m_5	m_6
		0		1	1	1		1	1

Определим значения проверочных символов. Значение символа $k_1 = x_1$ определяется из условия:

$S_1 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 = 0;$

$S_1 = x_1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 \oplus 1 = 0.$

Отсюда $k_1 = x_1 = 1.$

Значения символа $k_2 = x_2$ определяется из условия:

$S_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} = 0;$

$S_2 = x_2 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = x_2 \oplus 1 = 0.$

Отсюда $k_2 = x_2 = 1.$

Значения символа $\boldsymbol{\kappa_2}$ = x_4 определяется из условия:

$S_3 = x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0;$

$S_3 = x_4 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = x_4 \oplus 1 = 0.$

Отсюда $k_3 = x_4 = 1.$

Значение символа k_4 = x_8 определяется из условия:

$S_4 = x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} = 0;$

$S_4 = x_8 \oplus 1 \oplus 1 = x_8 = 0.$

Отсюда $k_4 = x_8 = 0.$

В итоге кодовое слово Хэмминга для кодового слова $\bar{x}$ = 011111 будет иметь вид $\bar{x}_H$ = 1101111011.

Проверим работу кода Хэмминга, заменив в полученном кодовом слове значение одного из символов, то есть введем одиночную ошибку в кодовое слово Хэмминга. Например, заменим значение пятого символа слова с 1 на 0, то есть вместо $x_я$ = 1101111011 примем $x_я$ = 1101011011.

Определим значения символов синдрома S_1, S_2, $S3$, $S4$. Для этого пронумеруем символы кодового слова Хэмминга:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Отсюда значения символов синдрома будут:

$S_1 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$

$S_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_{10} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$

$S_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$

$S_4 = x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$

Таким образом, синдром имеет следующий вид:

$S4 S_3 S_2 S_1$ = 0101.

Поскольку $0101_2 = 5_{10}$, то ошибка содержится в пятом символе, что и требовалось проверить.

5 Варианты заданий

Пусть требуется получить кодовые векторы Хэмминга для кодовых слов, приведенных в таблице 1. Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя.

Таблица 1 – Варианты заданий для получения кодовых слов Хэмминга

Вариант	Передаваемые кодовые слова		
1	0111010	1101010	0101011
2	0001010	0001101	0010001
3	0010100	0011000	0011101
4	0011110	0110000	0100010
5	1100011	0001111	0011101
6	1001010	0011001	0100010
7	0001011	0000110	1010001

8	0010101	1000111	1111001
9	1011110	1011000	0100001
10	1000010	1001111	1011101
11	1000011	1100000	0011101
12	0011010	1101010	0101010
13	0000111	1000110	1001000
14	0001110	1001110	0010011
15	0011100	0011010	1011101
16	0010110	0101000	1100010
17	0001011	1101110	0001000
18	1011010	1011001	1100010
19	0001001	0000110	1110001
20	0010111	0100000	1101000
21	1010110	1010000	0110001
22	1000011	0100100	0001000
23	0000010	1100100	0111101
24	0000011	0100110	1010101

6 Контрольные вопросы

1. Какие коды называют систематическими?
2. Сколько ошибок способен обнаруживать и исправлять код Хэмминга?
3. По какому правилу определяют число проверочных символов в коде Хэмминга?
4. В каких местах располагаются проверочные символы в кодовых словах Хэмминга?
5. По какому правилу строятся уравнения для нахождения проверочных символов в коде Хэмминга?
6. Какую информацию при декодировании кода Хэмминга дает синдром?
7. Каким образом обеспечивается обнаружение двойных ошибок в кодовых словах Хэмминга?

Лабораторная работа №8
«Определение пропускной способности дискретного канала связи с помехами»

1 Цель работы

- приобрести умение рассчитывать пропускную способность дискретного симметричного канала связи при наличии помех.

2 Основные теоретические сведения

Под ***каналом связи*** подразумевается совокупность средств, предназначенных для передачи информации от данного источника сообщений к адресату.

Если сигналы на входе и выходе канала представляют собой последовательности символов, составленные из алфавитов A и $B,$ то такой канал называется ***дискретным.***

Наличие помех в канале связи приводит к тому, что посланный сигнал с вероятностями, зависящими от самого канала, может переходить в различные выходные сигналы.

Модель дискретного канала задана, если для любых последовательностей передаваемых символов указано правило вычисления условной вероятности $p(a|b)$**.** Условные вероятности канала записывают в виде ***канальной матрицы.***

$$P(a|b)=\begin{bmatrix} p(a_1|b_1)\,p(a_1|b_2)...p(a_1|b_n) \\ p(a_2|b_1)\,p(a_2|b_2)...p(a_2|b_n) \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ p(a_n|b_1)\,p(a_n|b_2)...p(a_n|b_n) \end{bmatrix}$$

В условиях отсутствия помех ***скорость передачи информации*** по каналу связи определяется количеством информации, переносимым символом сообщения в единицу времени, и равна:

$$V = nH, \text{бит/сек.};$$

где n - количество символов, вырабатываемых источником сообщений за единицу времени; H - энтропия источника сообщений.

Скорость передачи информации также может быть представлена как

$$V = H / \tau,,\ \text{бит/сек.};$$

где τ - время передачи одного двоичного символа.

Таким образом, скорость передачи информации определяется относительно первичного алфавита и зависит от его энтропии.

Пропускная способность канала связи - это максимальная скорость передачи информации по данному каналу.

При отсутствии помех выражение для пропускной способности отличается от выражения для скорости тем, что пропускную способность характеризует максимальная энтропия:

$$C = nH_{\max} = n \cdot \log_2 q,\ \text{бит/сек.};$$

где q - основание кода.

При наличии помех пропускная способность канала связи определяется следующим образом:

$$C = n\Big[H(A) - H\big(A|B\big)\Big] = n\Big[H(B) - H\big(B|A\big)\Big],\ \text{бит/сек.};$$

где *H(A)*, *H(B)* - энтропии источника и получателя сообщений; *H(A\B), H(B\A)* - условные энтропии источника сообщений относительно получателя и получателя относительно источника.

3 Порядок выполнения работы

1) Изучить методические указания к лабораторной работе.
2) Пройти собеседование с преподавателем и получить задание для выполнения работы.
3) Определить значения совместных вероятностей и построить матрицу совместных вероятностей для объединенной системы.
4) Определить условные вероятности вида *p(a\b)* и построить соответствующую матрицу условных вероятностей.
5) Найти безусловные энтропии источника и получателя сообщений, а также условные энтропии.
6) Определить пропускную способность дискретного канала связи.
7) Оформить и защитить отчет по выполнению лабораторной работы.

4 Пример выполнения работы

Пусть требуется определить пропускную способность канала связи для двух систем *A* (источник) и *B* (получатель), если известны вероятности появления символов в сообщениях на выходе системы *A:*

$p(a_1) = 0,1$; $p(a_2) = 0,4$; $p(a_3) = 0,5$ и матрица условных вероятностей:

$$P(b|a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Также известно, что каждый символ сообщений вырабатывается за 0,01 сек.

Решение

Найдем значения совместных вероятностей и построим матрицу совместных вероятностей для объединенной системы:

$$p(a_1,b_1) = p(a_1) \cdot p(b_1|a_1) = 0.1 \cdot 1 = 0.1;$$

$$p(a_2,b_1) = p(a_2) \cdot p(b_1|a_2) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1;$$

$$p(a_3,b_1) = p(a_3) \cdot p(b_1|a_1) = 0.5 \cdot 0 = 0;$$

$$p(a_1,b_2) = p(a_1) \cdot p(b_2|a_1) = 0.1 \cdot 0 = 0;$$

$$p(a_2,b_2) = p(a_2) \cdot p(b_2|a_2) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3;$$

$$p(a_3,b_2) = p(a_3) \cdot p(b_2|a_3) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1;$$

$$p(a_1,b_3) = p(a_1) \cdot p(b_3|a_1) = 0.1 \cdot 0 = 0;$$

$$p(a_2,b_3) = p(a_2) \cdot p(b_3|a_2) = 0.4 \cdot 0 = 0;$$

$$p(a_3,b_3) = p(a_3) \cdot p(b_3|a_3) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4;$$

$$P(a,b) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Найдем вероятности появления сигналов на входе системы *B* суммированием столбцов полученной матрицы:

$$p(b_1) = 0.1 + 0.1 = 0.2;$$

$$p(b_2) = 0.3 + 0.1 = 0.4;$$

$$p(b_3) = 0.4.$$

$$\sum_i p(b_i) = 0.2 + 0.4 + 0.4 = 1.$$

Найдем условные вероятности вида $p(b|a)$ и построим соответствующую матрицу условных вероятностей:

$p\left(a_1,b_1\right)=p\left(a_1,b_1\right)/\,p\left(b_1\right)=0.1/0,2=0,5;$

$p\left(a_2,b_1\right)=p\left(a_1,b_2\right)/\,p\left(b_2\right)=0/0.4=0;$

$p\left(a_3,b_1\right)=p\left(a_1,b_3\right)/\,p\left(b_3\right)=0/0.4=0;$

$p\left(a_1,b_2\right)=p\left(a_2,b_1\right)/\,p\left(b_1\right)=0.1/0.2=0.5;$

$p\left(a_2,b_2\right)=p\left(a_2,b_2\right)/\,p\left(b_2\right)=0.3/0.4=0.75;$

$p\left(a_3,b_2\right)=p\left(a_2,b_3\right)/\,p\left(b_3\right)=0/0.4=0;$

$p\left(a_1,b_3\right)=p\left(a_3,b_1\right)/\,p\left(b_1\right)=0/0.2=0;$

$p\left(a_2,b_3\right)=p\left(a_3,b_2\right)/\,p\left(b_2\right)=0.1/0.4=0;$

$p\left(a_3,b_3\right)=p\left(a_3,b_3\right)/\,p\left(b_3\right)=0.4/0.4=1;$

$$P\left(a,b\right)=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.75 & 0\\ 0 & 0.25 & 1\end{bmatrix}$$

Отсюда безусловные энтропии источника и получателя сообщений будут:

H(A) **=** - (0,l $\log_2$0,l + 0,4 $\log_2$0,4 + 0,5 $1og_2$0,5) = 0,332 + 0,528 + 0,5 = 1,36 бит/символ;

H(B) = - (0,2 $1og_2$0,2 + 0,4-$\log_2$0,4 + 0,4 $1og_2$0,4) = 0,464 + 0,528 + 0,528 = 1,520 бит/символ.

Условные энтропии будут:

H(A\B) = $-\sum_i\sum_j p\left(b_i\right)p\left(a_i\left|b_j\right.\right)\log_2 p\left(a_i\left|b_j\right.\right)$=-[0,2 0,5 $\log_2$0,5 + 0,4(0,75-$\log_2$0,75 + 0,25-$\log_2$0,25)] = 0,3244 + 0,2 = 0,5244 бит/символ;

H(B\A) =$-\sum_i\sum_j p\left(a_i\right)p\left(b_j\left|a_i\right.\right)\log_2 p\left(b_j\left|a_i\right.\right)$ = - [0,1*1*$\log_2$1 + 0,4(0,75 •log20,75 + 0,254$\log_2$0,25) + 0,5(0,84•$\log_2$0,8 + 0,24$\log_2$0,2)] = 0,3244 +
+ 0,2 = 0,3244 + 0,3610 = 0,6854 Бит/символ.

Пропускная способность канала связи будет:

C = *n[H(A)* - H(A\B)] = 100(1,36 - 0,524) $\approx$ 8,3 бит/сек; или

C = n[H(B) - H(B\A)] = 100(1,52 - 0,685) $\approx$ 8,3 бит/сек.

5 Варианты заданий

Номер варианта определяется как порядковый номер студента в журнале преподавателя

Таблица 1 – Вероятности появления символов в сообщениях на выходе источника

Вариант	Символы алфавита				Вариант	Символы алфавита			
	a_1	a_2	a_3	a_4		a_1	a_2	a_3	a_4
1	0,23	0,27	0,39	0,11	13	0,24	0,16	0,28	0,32
2	0,21	0,32	0,09	0,38	14	0,15	0,41	0,35	0,09
3	0,18	0,42	0,25	0,15	15	0,25	0,35	0,09	0,31
4	0,08	0,26	0,32	0,34	16	0,40	0,17	0,20	0,23
5	0,37	0,13	0,09	0,41	17	0,40	0,10	0,17	0,33
6	0,16	0,31	0,24	0,29	18	0,36	0,08	0,14	0,42
7	0,10	0,40	0,31	0,19	19	0,19	0,31	0,08	0,42
8	0,24	0,27	0,16	0,33	20	0,34	0,18	0,26	0,22
9	0,15	0,25	0,42	0,18	21	0,31	0,19	0,41	0,09
10	0,17	0,42	0,33	0,08	22	0,37	0,15	0,23	0,25
11	0,40	0,30	0,08	0,22	23	0,22	0,08	0,29	0,41
12	0,26	0,31	0,24	0,19	24	0,12	0,30	0,18	0,40

Таблица 2 – Матрицы переходных вероятностей $P(b|a)$

Вар.	Пер. симв.	Принятые символы				Вар.	Пер. симв.	Принятые символы			
		b_1	b_2	b_3	b_4			b_1	b_2	b_3	b_4
1	a_1	0,95	0,03	0,02	0	4,	a_3	0,98	0,02	0	0
7	a_2	0,02	0,97	0,01	0	ю,	a_2	0,03	0,96	0,01	0
13	a_3	0	0	0,99	0,01	16,	a_3	0	0,02	0,94	0,04
19	a_4	0	0,02	0,04	0,94	22	a_4	0	0,01	0,02	0,97
2	a_5	0,97	0,02	0,01	0	5,	$a\backslash$	0,94	0,03	0,02	0,01
8	a_2	0,02	0,98	0	0	П,	a_2	0,01	0,99	0	0
14	a_3	0	0,02	0,95	0,03	17,	a_3	0	0,03	0,96	0,01
20	a_4	0	0	0,01	0,99	23	a_4	0	0,01	0,04	0,95
3	a_1	0,96	0,03	0,01	0	6,	a_3	0,99	0,01	0	0
9	a_2	0,03	0,95	0,02	0	12,	a_2	0,02	0,94	0,03	0,01
15	a_3	0	0,01	0,97	0,02	18,	a_3	0	0,02	0,98	0
21	a_4	0	0	0,02	0,98	24	a_4	0	0,01	0,03	0,96

6 Контрольные вопросы

1) Что понимают под каналом связи?

2. Какие каналы связи называют дискретными?

3. Каким образом задают описание дискретного канала связи с помехами?

4. Как определяют скорость передачи информации по дискретному каналу связи?

5. Что такое пропускная способность канала связи?

6. Как определяется пропускная способность дискретного канала при отсутствии помех?

7. Как определяется пропускная способность дискретного канала с помехами?

Список использованных источников

1. Хмелевская, А.В. Основы теории информации и кодирования [Текст]: учеб. пособие / А.В. Хмелевская, А.М. Потапенко; Юго-Зап.гос. ун-т. - Курск, 2016. - 220 с. Библиогр.: с.210

2. Гультяева, Т. А. Основы теории информации и криптографии [Электронный ресурс]: конспект лекций / Т. А. Гультяева. - Новосибирск: НГТУ, 2010. - 88 с. - ISBN 978-5-7782-1425-5: Б. ц.

3. Белов, В. М. Теория информации [Текст]: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» / В. М. Белов, С. Н. Новиков, О. И. Солонская. - Москва: Горячая линия - Телеком, 2017. - 144 с. : - Библиогр.: с. 142-143. - ISBN 978-5-9912-0237-4 Б.ц.

4. Тихонов В. И. Случайные процессы. Примеры и задачи [Текст]: учебное пособие / В. И. Тихонов; под ред. В. В. Сизых. - М.: Горячая линия - Телеком, 2012 - .Т. 5 : Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. – 400 с.

5. Акулиничев, Ю. П. Теория электрической связи [Текст]: учебное пособие / Ю. П. Акулиничев. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010. – 240 с.

6. Биккенин, Р. Р.Теория электрической связи [Текст]: учебное пособие / Р. Р. Биккенин, М. Н. Чесноков. - М.: Академия, 2010. – 336 с.

7. Холево, А. С. Квантовые системы, каналы, информация [Текст]: учебное пособие / А. С. Холево. - М.: МЦНМО, 2010. – 328 с.

8. Котоусов А.С. Теория информации. Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2003.

9. Липкин И.А. Статистическая радиотехника. Теория информации и кодирования. – М.: Вузовская книга, 2002.