МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра «Информационная безопасность»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____О.Г. Локтионова
«__» мая _____2016 г.

СРАВНЕНИЯ

Методические указания по выполнению практической работы
для студентов специальностей 10.05.03, 10.05.02, 10.03.01

Курск 2016

УДК 511.172

Составитель М.А. Ефремов

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *М.О. Таныгин*

Сравнения: методические указания по выполнению практической работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: М.А. Ефремов. Курск, 2016. 15 с. Библиогр.: с. 15.

Содержат основные теоретические сведения о сравнениях и способах их решения. Указывается порядок выполнения работы, правила оформления и содержание отчета.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по образованию в области информационной безопасности (УМО ИБ).

Предназначены для студентов специальностей 10.05.03, 10.05.02, 10.03.01 дневной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. . Уч.-изд.л. . Тираж 30 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель лабораторной работы – изучив теоретический материал, научиться решать сравнения различными способами.

2. ЗАДАНИЕ

Ознакомиться с теоретическим материалом. Решить сравнения одним из описанных способов. Оформить отчет.

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить задание.
2. Изучить теоретическую часть.
3. Решить сравнения под номером, соответствующим номеру по журналу.
4. Составить отчет.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Титульный лист.
2. Краткая теория.
3. Решение сравнений.
4. Вывод.

5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

5.1. Определения

Два целых числа a и b сравнимы по модулю натурального числа n (или равноостаточны при делении на n), если при делении на n они дают одинаковые остатки.

Эквивалентные формулировки: a и b сравнимы по модулю n, если их разность a-b делится на n, или если a может быть представлено в виде a = b + kn, где k — некоторое целое число. Например: 32 и -10 сравнимы по модулю 7, так как

$$32 = 7 \cdot 4 + 4 \text{ и } -10 = 7 \cdot (-2) + 4$$

Утверждение “a и b сравнимы по модулю n” записывается в виде:

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$$

5.2. Свойства равенства по модулю

Отношение сравнения по модулю обладает свойствами

- рефлексивности: для любого целого a справедливо $a \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$
- симметричности: если $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ то $b \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$
- транзитивности: если $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ и $b \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$, то $a \equiv c(\mathrm{mod}\ n)$

Любые два целых числа a и b сравнимы по модулю 1.

Для того, чтобы числа a и b были сравнимы по модулю n, необходимо и достаточно, чтобы их разность делилась на n.

Если числа a_1, a_2,.., a_n и b_1, b_2,.., b_n попарно сравнимы по модулю n, то их суммы $a_1+a_2+..+a_n$ и $b_1+b_2+..+b_n$, а также произведения $a_1 \cdot a_2 \cdot .. \cdot a_n$ и $b_1 \cdot b_2 \cdot .. \cdot b_n$ тоже сравнимы по модулю n.

Если числа a и b сравнимы по модулю n, то их степени a^k и b^k тоже сравнимы по модулю n при любом натуральном k.

Если числа a и b сравнимы по модулю n, и n делится на m, то a и b сравнимы по модулю m.

Для того, чтобы числа a и b были сравнимы по модулю n, представленному в виде его канонического разложения на простые сомножители p_i

$$n = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\propto_i}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$a \equiv b\left(mod\ p_i^{\propto_i}\right),\ \ i = 1,2,..,n$$

Отношение сравнения является отношением эквивалентности и обладает многими свойствами обычных равенств. Например, их можно складывать и перемножать: если

$$a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod\ n});\quad a_2 \equiv b_2(\mathrm{mod\ n}),\quad \text{то}$$

$$a_1 a_2 \equiv b_1 b_2(\mathrm{mod\ n});\quad a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2(\mathrm{mod\ n});$$

Сравнения нельзя делить друг на друга или на другие числа. Пример: $14 \equiv 20(\mathrm{mod}6)$, однако, сократив на 2, мы получаем ошибочное сравнение: $7 \equiv 10(\mathrm{mod}6)$. Правила сокращения для сравнений следующие.

- Можно делить обе части сравнения на число, взаимно простое с модулем: если $ac \equiv bc(\mathrm{mod\ n})$ и НОД $(c, n) = 1$, то $a \equiv b(\mathrm{mod\ n})$.
- Можно одновременно разделить обе части сравнения и модуль на их общий делитель: если $ac \equiv bc(\mathrm{mod\ n})$, то $a \equiv b(\mathrm{mod\ n})$.

Нельзя также выполнять операции со сравнениями, если их модули не совпадают.

Другие свойства:

- Если $a \equiv b(\mathrm{mod\ m_1})$ и $a \equiv b(\mathrm{mod\ m_2})$, то $a \equiv b(\mathrm{mod\ m})$, где $m = [m_1 \cdot m_2]$.

5.3. Связанные определения

5.3.1. Классы вычетов

Множество всех чисел, сравнимых с a по модулю n называется классом вычетов a по модулю n, и обычно обозначается $[a]_n$ или $\bar{a}_n$. Таким образом, сравнение $a \equiv b(\mathrm{mod\ n})$ равносильно равенству классов вычетов $[a]_n = [b]_n$.

Поскольку сравнение по модулю n является отношением эквивалентности на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$, то классы вычетов по модулю n представляют собой классы эквивалентности; их количество равно n. Множество всех классов вычетов по модулю n обозначается $\mathbb{Z}_n$или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ индуцируют соответствующие операции на множестве $\mathbb{Z}_n$:

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n$$

$$[a]_n \cdot [b]_n = [a \cdot b]_n$$

Относительно этих операций множество $\mathbb{Z}_n$ является конечным кольцом, а если n простое — конечным полем.

5.3.2. Свойства классов вычетов по модулю m

1. Для того, чтобы $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} = \bar{b}$.
2. Для того, чтобы $a \neq b(\mathrm{mod}\ m)$, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.
3. Любые m чисел, попарно несравнимые по модулю m, образуют полную систему вычетов.
4. Если $(a, m) = 1$ и x пробегает полную систему вычетов по модулю m, то $ax + b,\ b \in Z$, также пробегает полную систему вычетов по модулю m.
5. Если $(a, m) = 1$ и x пробегает приведённую систему вычетов по модулю m, то ax, также пробегает приведённую систему вычетов по модулю m.

5.3.3. Системы вычетов

Система вычетов позволяет осуществлять арифметические операции над конечным набором чисел, не выходя за его пределы. Полная система вычетов по модулю n — любой набор из n несравнимых между собой по модулю n целых чисел. Обычно в качестве полной системы вычетов по модулю n берутся наименьшие неотрицательные вычеты

$$0,1,..n-1$$

или абсолютно наименьшие вычеты, состоящие из чисел

$$0, \pm 1, \pm 2, .., \pm \frac{n-1}{2},$$

в случае нечётного n и чисел

$$0, \pm 1, \pm 2, .., \pm(\frac{n}{2} - 1), \frac{n}{2}$$

в случае чётного n.

Набор несравнимых чисел, взаимно простых с и n, называется приведённой системой вычетов.

5.4. Решение сравнений первой степени

В теории чисел, криптографии и других областях науки часто возникает задача отыскания решений сравнения первой степени вида

$$ax \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$$

Решить сравнение – значит найти все те x, которые удовлетворяют данному сравнению, при этом весь класс чисел по mod m считается за одно решение.

Решение такого сравнения начинается с вычисления НОД(a, m)=d. При этом возможны 2 случая:

- Если b не кратно d, то у сравнения нет решений.
- Если b кратно d, то у сравнения существует единственное решение по модулю $\frac{m}{d}$, или, что то же самое, d решений по модулю m. В этом случае в результате сокращения исходного сравнения на d получается сравнение:

$$a_1 x \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m_1),$$

где $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$ и $m_1 = \frac{m}{d}$ являются целыми числами, причем a_1 и m_1 взаимно просты. Поэтому число a_1 можно обратить по модулю m_1, то есть найти такое число c, что $c \cdot a_1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ m_1)$ (другими словами, $c \equiv a_1^{-1}(\mathrm{mod}\ m_1)$) . Теперь решение находится умножением полученного сравнения на c

$$x \equiv ca_1 x \equiv\ cb_1 \equiv a_1^{-1} b_1 (\mathrm{mod} m_1)$$

Практическое вычисление значения c можно осуществить разными способами: с помощью теоремы Эйлера, алгоритма Евклида, теории цепных дробей.

В частности, теорема Эйлера позволяет записать значение c в виде:

$$c \equiv a_1^{-1} \equiv a_1^{\varphi(m_1)-1} (\mathrm{mod} m_1)$$

Пример.

Для сравнения

$$4x \equiv 26(\mathrm{mod}\ 22)$$

имеем d = 2, поэтому по модулю 22 сравнение имеет два решения. Заменим 26 на 4, сравнимое с ним по модулю 22,

$$4x \equiv 4(\mathrm{mod}\ 22)$$

и затем сократим все три числа на 2:

$$2x \equiv 2(\mathrm{mod}\ 11)$$

Поскольку 2 взаимно просто с модулем 11, можно сократить левую и правую части на 2. В итоге получаем одно решение по модулю 11

$$x \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11),$$

эквивалентное двум решениям по модулю 22:

$$x \equiv 1(\mathrm{mod}\ 22) \text{ и } x \equiv 12(\mathrm{mod}\ 22).$$

Алгоритм решения сравнения $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ со взаимно простыми a и n состоит из двух частей:

1. Решаем сравнение $ax \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$. Для этого при помощи расширенного алгоритма Евклида ищем решение (x_0, y_0) уравнения $ax + ny = 1$. Взяв по модулю n последнее равенство, получим $ax_0 \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$.

2. Умножим на b равенство $ax_0 \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$. Получим $a(bx_0) \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$, откуда решением исходного сравнения $ax \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ будет $x \equiv bx_0(\mathrm{mod}\ n)$

Лемма.

Если НОД(k,m)=1, то равенство $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, m)$ эквивалентно $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

Доказательство.

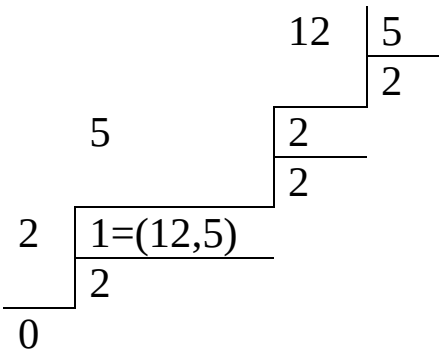
Из $ak \equiv bk(\mathrm{mod}\, m)$ $ak = bk\ (\mathrm{mod}\ m)$ следует, что $(a - b) \cdot k$ делится на m. Но поскольку k и m взаимно просты, то $a - b$ делится на m, то есть $a \equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

Пример 1.

Решить сравнение $5x \equiv 26(\mathrm{mod}\ 12)$.

Решение. $d = (5,12) = 1$, следовательно, сравнение имеет единственное решение.

Способ №1. Решаем сравнение $5U \equiv 1(\mathrm{mod}\ 12)$, где U – мультипликативно-обратный элемент к 5 по модулю 12.



i	Остатки	Частные	x_i	y_i
-1	12	-	1	0
0	5	-	0	1
1	2	2	1-0*2=1	0-1*2=-2
2	1=d	2	0-1*2=-2	1-(-2)*2=5=U
3	0	2	-	-

$$x \equiv 26 \cdot 5(\mathrm{mod}\ 12) = 10(\mathrm{mod}12)$$

130 | 12
10
0

$x \equiv 10(\mathrm{mod}12)$ – решение исходного сравнения.

Способ №2. (Способ Эйлера).

$$\varphi(12) = 4;\ \ U = 5^{4-1} = 5^3 = 125$$
$$x \equiv 26 \cdot 125(\mathrm{mod}12) = 3250(\mathrm{mod}12) = 10(\mathrm{mod}12)$$
$$x \equiv 10(\mathrm{mod}12)$$

Пример 2. Решить сравнение $2775x \equiv 825(\mathrm{mod}\ 624)$
Решение.

2775 | 624
4
279

825 | 624
1
201

$$2775 \equiv 825(\mathrm{mod}624) \Leftrightarrow 279x \equiv 201(\mathrm{mod}12)$$

624 | 279
2
279 | 66
4
66 | 15
4
15 | 6
2
6 | 3=(624,279)=d
2
0

d=3|201, следовательно, сравнение $279x \equiv 201(\mathrm{mod}12)$, а, значит, и исходное сравнение, разрешимо и имеет 3 решения по модулю 624.

$$\left.\begin{array}{l} 279 = 3 \cdot 93 \\ 624 = 3 \cdot 208 \\ 201 = 3 \cdot 67 \end{array}\right\} \Rightarrow 279x \equiv 201(\mathrm{mod}12) \Leftrightarrow 93x \equiv 67(\mathrm{mod}208)$$

						208	93	
						186	2	
					93	22		
					88	4		
				22	5			
				20	4			
			5	2				
			4	2				
	2		1=(208,93)=d					
	2		2					
	0							

С помощью расширенного алгоритма Евклида находим мультипликативно-обратный элемент U к 93 по модулю 208.

i	Остатки	Частные	x_i	y_i
-1	208	-	1	1
0	93	-	0	0
1	22	2	1-0*2=1	0-1*2=-2
2	5	4	0-1*4=-4	1-(-2)*4
3	2	4	1-(-4)*4=17	-2-9*4=-38
4	$1=d$	2	-4-17*2=-38	9-(-38)*2=85=dU
5	0	2	-	-

$$x_1 = 67 \cdot 85(\mathrm{mod}208) = 5695(\mathrm{mod}208) = 79$$

$$x_2 = 79 + 208 = 287$$

$$x_3 = 79 + 2 \cdot 208 = 495$$

6. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

№1. $2781x \equiv 1452(\mathrm{mod}951)$

№2. $5980x \equiv 2300(\mathrm{mod}1555)$

№3. $2703x \equiv 597(\mathrm{mod}1011)$

№4. $3370x \equiv 1355(\mathrm{mod}1835)$

№5. $4272x \equiv 1686(\mathrm{mod}1167)$

№6. $3249x \equiv 1674(\mathrm{mod}1203)$

№7. $3393x \equiv 1836(\mathrm{mod}1293)$

№8. $3507x \equiv 573(\mathrm{mod}1329)$

№9. $3681x \equiv 1950(\mathrm{mod}1371)$

№10. $3336x \equiv 844(\mathrm{mod}2012)$

№11. $2652x \equiv 2304(\mathrm{mod}1461)$

№12. $2930x \equiv 1560(\mathrm{mod}1046)$

№13. $4023x \equiv 2160(\mathrm{mod}1437)$

№14. $3837x \equiv 753(\mathrm{mod}1389)$

№15. $2610x \equiv 2304(\mathrm{mod}1383)$

№16. $2155x \equiv 3560(\mathrm{mod}2215)$

№17. $2958x \equiv 1608(\mathrm{mod}1126)$

№18. $3086x \equiv 2838(\mathrm{mod}1142)$

№19. $2760x \equiv 2340(\mathrm{mod}1497)$

№20. $3090x \equiv 1592(\mathrm{mod}1114)$

№21. $4395x \equiv 2610(\mathrm{mod}1555)$

№22. $3948x \equiv 2496(\mathrm{mod}1388)$

№23. $3435x \equiv 2106(\mathrm{mod}1257)$

№24. $2160x \equiv 807(\mathrm{mod}1317)$

№25. $3550x \equiv 3390(\mathrm{mod}1985)$

№26. $3915x \equiv 2358(\mathrm{mod}1437)$

№27. $2720x \equiv 2640(\mathrm{mod}1636)$

№28. $3507x \equiv 573(\mathrm{mod}1329)$

№29. $3681x \equiv 1950(\mathrm{mod}1371)$

№30. $3336x \equiv 844(\mathrm{mod}2012)$

№31. $2652x \equiv 2304(\mathrm{mod}1461)$

№32. $2930x \equiv 1560(\mathrm{mod}1046)$

№33. $4023x \equiv 2160(\mathrm{mod}1437)$

№34. $3837x \equiv 753(\mathrm{mod}1389)$

№35. $2610x \equiv 2304(\mathrm{mod}1383)$

№36. $2155x \equiv 3560(\mathrm{mod}2215)$

№37. $2958x \equiv 1608(\mathrm{mod}1126)$

№38. $3086x \equiv 2838(\mathrm{mod}1142)$

№39. $2760x \equiv 2340(\mathrm{mod}1497)$

№40. $3090x \equiv 1592(\mathrm{mod}1114)$

№41. $4395x \equiv 2610(\mathrm{mod}1555)$

№42. $3948x \equiv 2496(\mathrm{mod}1388)$

№43. $3435x \equiv 2106(\mathrm{mod}1257)$

№44. $2160x \equiv 807(\mathrm{mod}1317)$

№45. $3550x \equiv 3390(\mathrm{mod}1985)$

№46. $3915x \equiv 2358(\mathrm{mod}1437)$

№47. $2720x \equiv 2640(\mathrm{mod}1636)$

№48. $4272x \equiv 1686(\mathrm{mod}1167)$

№49. $3249x \equiv 1674(\mathrm{mod}1203)$

№50. $3393x \equiv 1836(\mathrm{mod}1293)$

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое взаимно простые числа?
2. Перечислите свойства сравнений.
3. Что такое классы вычетов?
4. Назовите свойства классов вычетов.
5. Что такое полная и приведённая системы вычетов?
6. Что такое мультипликативно-обратные по модулю элементы?
7. Функция Эйлера и её свойства.
8. Что такое мультипликативные функции?
9. Какова формула для вычисления функции Эйлера.
10. Назовите условия разрешимости сравнения.

8. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник – практикум по теории чисел. М.: Учпедгиз, 1972.

2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука,1995.

3. Гайнов А.Т. Теория чисел. Изд - во НГУ, 1995.

4. Галочкин А.И., Нестеренко Н.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд - во МГУ, 1995.

5. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел. М.: Просвещение,1970.

6. Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Г. Сборник задач по элементарной математике. М.: Просвещение, 1973.

7. Пензин Ю.Г., Клейменов В.Ф. Сравнения. Учебно-методические разработки (тексты лекций). Изд-во ИГУ, 1998.

8. И.М. Виноградов «Элементы высшей математики» М., «Высшая школа», 1999

9. Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин «Сборник задач по алгебре и теории чисел» М., «Просвещение», 1993

10. Ю.С. Харин, В.И. Берник, Г.В. Матвеев, С.В. Ажевич «Математические и компьютерные основы криптологии» Минск, «Новое знание», 2003