

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 25.09.2022 14:58:17  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра городского, дорожного строительства  
и строительной механики



### **ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ И ЗАДАНИЯ ПО СТРОИТЕЛЬ- НОЙ МЕХАНИКЕ. Часть 2 (Для выполнения самостоятельных и практических работ студентами очной формы обучения)**

Методические рекомендации к выполнению самостоятельных и практических работ для студентов очного обучения, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (уровень бакалавриата), специальности 08.05.01 «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений», специальности 08.05.02 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей»

Курск 2017

УДК 530.1:372.853

Составитель: Л.Ю. Ступишин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.В. Масалов*

**Примеры расчетов и задания по строительной механике. Часть 2 (Для выполнения самостоятельных и практических работ студентами очной формы обучения) :** методические рекомендации к выполнению самостоятельных и практических работ для студентов очного обучения / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.Ю. Ступишин. - Курск, 2017. - 87 с.: ил. 61, табл. 10, прилож. 8. - Библиогр.: с.59.

Излагаются требования к выполнению и оформлению самостоятельной работы по строительной механике студентами очной формы обучения. Даны варианты заданий и приведены справочные материалы, необходимые для выполнения студентами самостоятельной работы.

Даны рекомендации по оформлению студентами самостоятельной работы и приведены примеры решения задач с необходимыми пояснениями, которые могут быть использованы преподавателями и студентами при проведении практических заданий.

Предназначены для студентов очной формы обучения, и полностью соответствуют требованиям Федерального государственного стандарта по направлению 08.03.01 «Строительство», а так же стандартов 08.05.01 «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений», 08.05.02 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать

. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л 5,06. Уч.-изд. л. 4,58 . Тираж 25 экз. Заказ. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение	4
2.1 Расчет неразрезной балки	5
2.1.1 Расчет неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов	5
2.1.2 Расчет неразрезной балки с помощью метода фокусов	12
2.1.3 Построение объемлющей эпюры моментов	28
2.2 Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений	31
2.3 Динамический расчет рамы	44
2.3.1 Определение собственной частоты колебаний	44
2.3.2 Расчет рамы на динамическую нагрузку	51
2.4 Расчет несвободной рамы на устойчивость	54
Библиографический список	59
Приложение №1. Задача № 5. Расчет неразрезной балки	60
Приложение №2. Задача № 6. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений	64
Приложение №3. Задача № 7. Динамический расчет рамы	70
Приложение № 4. Задача № 8. Расчет плоской рамы на устойчивость	75
Приложение № 5. Таблица значений фиктивных реакций простых балок	80
Приложение № 6. Таблица значений реактивных усилий и эпюр изгибающих моментов в статически неопределимых однопролетных балках	81
Приложение № 7. Таблица реактивных усилий и эпюр изгибающих моментов в сжато-изогнутых стержнях	85
Приложение № 8. Значение функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней	86

## 1 ВВЕДЕНИЕ

В процессе изучения курса строительной механики студентами очной формы обучения выполняются самостоятельные работы, которые служат для получения студентами навыков и умений анализа расчетных схем конструкций и проведения расчётов по этим схемам. Каждая работа является индивидуальным заданием и может включать одну или несколько задач по определенной теме курса. В зависимости от объёма часов, отведенных на изучение курса, лектором формируется набор задач, входящих в самостоятельную работу. Выполнение самостоятельной работы, как правило, завершает освоение соответствующего раздела курса.

Методические материалы содержат задания для студентов очной формы обучения и примеры расчета задач.

Выбор расчётных данных студентами очной формы обучения осуществляется по таблицам и расчётным схемам, приведенным в заданиях 1- 8. Все числовые данные, необходимые при расчете, выбираются из таблиц 2 – 9, причём номер строки таблицы с данными соответствует номеру студента по списку группы в журнале преподавателя, плюс шифр группы. Шифр группы определяется по таблице 1. Номер расчётной схемы, выбираемой студентом очной формы обучения, соответствует его номеру по журналу преподавателя.

Таблица 1

Профиль или специальность	Номер группы	Шифр группы
ПС	1	1
	2	2
	3	3
ГСХ	1	4
АД	1	5
ТГВ	1	6
ВВ	1	7
ЭУН	1	8
УЗС	1	9
САД	1	0

## 2.1 Расчет неразрезной балки

### 2.1.1 Расчет неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов

Задача № 5 переписывается из Приложения № 1. Для заданной неразрезной балки (Рис. 58) требуется:

1. с помощью уравнения трёх моментов найти и построить эпюры  $M$  и  $Q$  от постоянной нагрузки, распределённой по всей балке. Принять постоянную нагрузку, равной  $q_1$ ;
2. найти фокусные отношения и построить эпюры  $M$  и  $Q$  от последовательного нагружения каждого пролёта в отдельности заданной временной нагрузкой с помощью метода фокусов;
3. построить объемлющие эпюры моментов и поперечных сил в заданном пролете.

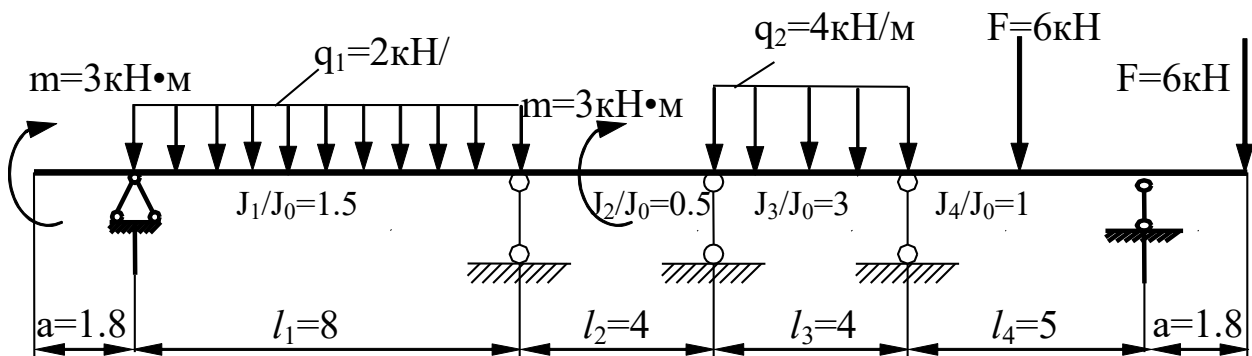


Рис. 1

Решение.

1. Вычисляем степень статической неопределимости балки (Рис. 24). Количество «лишних» связей равно количеству опорных связей за вычетом количества трех независимых уравнений равновесия на плоскости

$$L = C_{\text{оп}} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Основная система метода сил для всех неразрезных балок одна и та же.

2. Строим в основной системе метода сил (см. Рис. 24) грузовую эпюру от внешней нагрузки – эпюру пролетных моментов  $M^{\text{прол.}}$ .

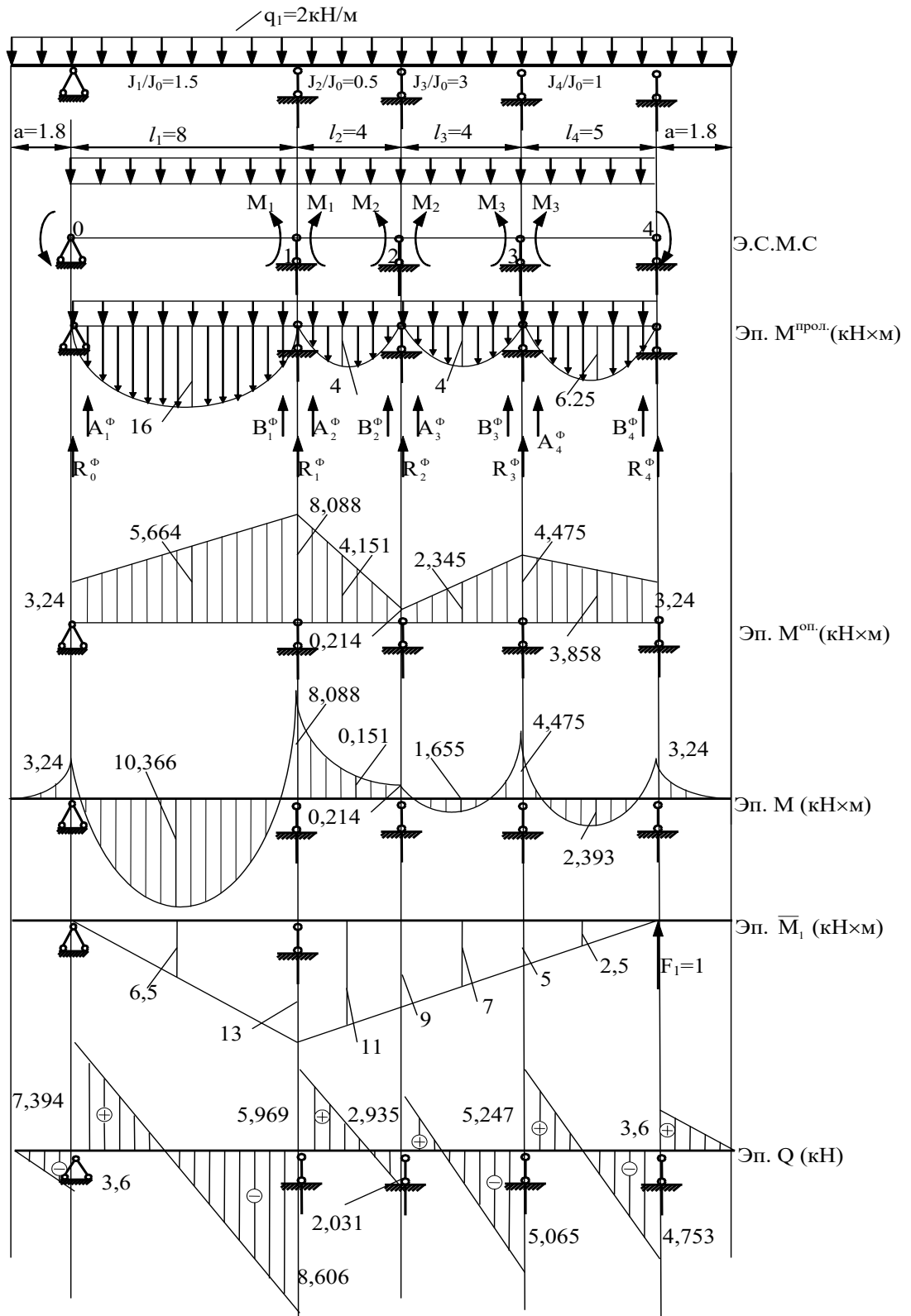


Рис. 2

3. Нумеруем опоры слева направо. Записываем систему уравнений трёх моментов.

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad M_0 l'_1 + 2M_1(l'_1 + l'_2) + M_2 l'_2 &= -6R_1^{\Phi'}, \\ (2) \quad M_1 l'_2 + 2M_2(l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 &= -6R_2^{\Phi'}, \\ (3) \quad M_2 l'_3 + 2M_3(l'_3 + l'_4) + M_4 l'_4 &= -6R_3^{\Phi'}. \end{aligned} \right\}$$

Вычисляем величины опорных моментов на крайних опорах

$$M_0 = \frac{-qa^2}{2} = \frac{2 \times 1.8^2}{2} = -3,24 \text{кНм};$$

$$M_4 = \frac{-qa^2}{2} = \frac{2 \times 1.8^2}{2} = -3,24 \text{кНм}.$$

4. Определяем величины приведенных длин и фиктивных реакций в пролетах:  $l'_i$ ,  $A_i^{\Phi}$ ,  $B_i^{\Phi}$ ,  $R_i^{\Phi}$  (см. Рис. 25).

$$l'_1 = l_1 \times \frac{J_0}{J_1} = 8 \times \frac{1}{1,5} = 5,333; \quad l'_2 = l_2 \times \frac{J_0}{J_2} = 4 \times \frac{1}{0,5} = 8;$$

$$l'_3 = l_3 \times \frac{J_0}{J_3} = 4 \times \frac{1}{3} = 1,333; \quad l'_4 = l_4 \times \frac{J_0}{J_4} = 5 \times \frac{1}{1} = 5.$$

$$\begin{aligned} 6R_1^{\Phi'} &= 6B_1^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_1} + 6A_2^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_2} = \frac{q \times l_1^3}{4} \times \frac{1}{1,5} + \frac{q \times l_2^3}{4} \times \frac{1}{0,5} = \frac{2 \times 8^3}{4} \times \frac{1}{1,5} + \\ &+ \frac{2 \times 4^3}{4} \times \frac{1}{0,5} = 170,667 + 64 = 234,667. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6R_2^{\Phi'} &= 6B_2^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_2} + 6A_3^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_3} = \frac{q \times l_2^3}{4} \times \frac{1}{0,5} + \frac{q \times l_3^3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 4^3}{4} \times \frac{1}{0,5} + \\ &+ \frac{2 \times 4^3}{4} \times \frac{1}{3} = 10,667 + 64 = 74,667. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6R_3^{\Phi'} &= 6B_3^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_3} + 6A_4^{\Phi} \times \frac{J_0}{J_4} = \frac{q \times l_3^3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{q \times l_4^3}{4} \times 1 = \frac{2 \times 4^3}{4} \times \frac{1}{3} + \\ &+ \frac{2 \times 5^3}{4} \times 1 = 10,667 + 62,5 = 73,167. \end{aligned}$$

5. Решаем систему уравнений и находим опорные моменты:

$$\left. \begin{aligned} -3,24 \times 5,333 + 2M_1 \times (5,333 + 8) + M_2 \times 8 &= -234,667, \\ M_1 \times 8 + 2M_2 \times (8 + 1,333) + M_3 \times 1,333 &= -74,667, \\ M_2 \times 1,333 + 2M_3 \times (1,333 + 5) + (-3,24) \times 5 &= -73,167, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 26,666M_1 + 8M_2 &= 17,279 - 234,667, \\ 8M_1 + 18,67M_2 + 1,333M_3 &= -74,667, \\ 1,333M_2 + 12,666M_3 &= 16,2 - 73,167. \end{aligned} \right\}$$

$$M_1 = \frac{-217,388 - 8M_2}{26,666}$$

$$M_3 = \frac{-56,967 - 1,333M_2}{12,666}$$

$$8 \times \left( \frac{-217,388 - 8M_2}{26,666} \right) + 18,666 \times M_2 + 1,333 \times \left( \frac{-56,967 - 1,333M_2}{12,666} \right) = -74,667.$$

$$16,126M_2 = -3,454,$$

$$M_2 = -0,214 \text{ кНм.}$$

$$M_1 = \frac{-217,388 - 8 \times (-0,214)}{26,666} = -8,088 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = \frac{-56,967 - 1,333 \times (-0,214)}{12,666} = -4,475 \text{ кНм.}$$

6. Строим эпюру  $M$  в соответствии с формулой

$$M = M^{\text{прол}} + M^{\text{оп.}}$$

7. Кинематическая проверка проводится по формуле

$$\sum \frac{\bar{M}_1 \times M}{EJ} = 0.$$

Единичная эпюра моментов строится для любой основной системы метода сил, выбранной для исходной балки. По возможности, единичная эпюра должна охватить максимальное число пролетов балки.



$$\begin{aligned}
\sum \frac{\bar{M}_1 \times M}{EJ} &= \frac{8}{6EJ_0 \times 1,5} \times (-13 \times 8,088 + 4 \times 6,5 \times 10,336) + \\
&+ \frac{4}{6EJ_0 \times 0,5} \times (-13 \times 8,088 - 9 \times 0,214 - 4 \times 11 \times 0,151) + \\
&+ \frac{4}{6EJ_0 \times 3} \times (-9 \times 0,214 + 4 \times 7 \times 1,655 - 4,475 \times 5) + \\
&+ \frac{5}{6EJ_0 \times 1} \times (-5 \times 4,475 + 4 \times 2,3925 \times 2,5) = \\
&= \frac{1}{6EJ_0} \times (-560,768 + 1433,259 - 841,152 - \\
&- 15,408 - 53,152 - 2,568 + 61,787 - 29,83 - 118,875 + 119,625) = \\
&= \frac{1}{6EJ_0} \times (-1621,753 + 1614,671).
\end{aligned}$$

Ошибка вычислений в процентах

$$\frac{-1621,753 + 1614,671}{1614,671} \times 100\% = 0,4\% < 1\%.$$

Построение эпюры поперечных сил “Q” ведется по эпюре моментов в соответствии с дифференциальными зависимостями.

Пролет 0-1

$$Q_{0-1} = \frac{q \times l_1}{2} - q \times x - \frac{M_{\text{ПР}} - M_{\text{Л}}}{l_1}.$$

$$Q_0 = \frac{2 \times 8}{2} - 0 - \frac{8,088 - 3,24}{8} = 8 - 0,606 = 7,394 \text{ кН}.$$

$$Q_1 = \frac{2 \times 8}{2} - 2 \times 8 - \frac{8,088 - 3,24}{8} = 8 - 16 - 0,606 = -8,606 \text{ кН}.$$

Пролет 1-2

$$Q_{1-2} = \frac{q \times l_2}{2} - q \times x + \frac{M_{\text{Л}} - M_{\text{ПР}}}{l_2}.$$

$$Q_1 = \frac{2 \times 4}{2} - 0 + \frac{8,088 - 0,214}{4} = 4 + 1,969 = 5,969 \text{ кН}.$$

$$Q_2 = \frac{2 \times 4}{2} - 2 \times 4 + \frac{8,088 - 0,214}{4} = 4 - 8 + 1,969 = -2,031 \text{ кН}.$$

Пролет 2-3

$$Q_{2-3} = \frac{q \times l_3}{2} - q \times x - \frac{M_{\text{ПР}} - M_{\text{Л}}}{l_3}.$$

$$Q_2 = \frac{2 \times 4}{2} - 0 - \frac{4,475 - 0,214}{4} = 4 - 1,065 = 2,935 \text{ кН},$$

$$Q_3 = \frac{2 \times 4}{2} - 2 \times 4 - \frac{4,475 - 0,214}{4} = 4 - 8 - 1,065 = -5,065 \text{ кН}.$$

Пролет 3-4

$$Q_{3-4} = \frac{q \times l_4}{2} - q \times x + \frac{M_{\text{Л}} - M_{\text{ПР}}}{l_4},$$

$$Q_3 = \frac{2 \times 5}{2} - 0 + \frac{4,475 - 3,24}{5} = 5 + 0,247 = 5,247 \text{ кН},$$

$$Q_4 = \frac{2 \times 5}{2} - 2 \times 5 + \frac{4,475 - 3,24}{5} = 5 - 10 + 0,247 = -4,753 \text{ кН}.$$

8. Определение опорных реакций проводим по эпюре “Q” вырезая и уравнивая опорные узлы.

Определяем реакцию в опоре 0 (см. Рис. 26)

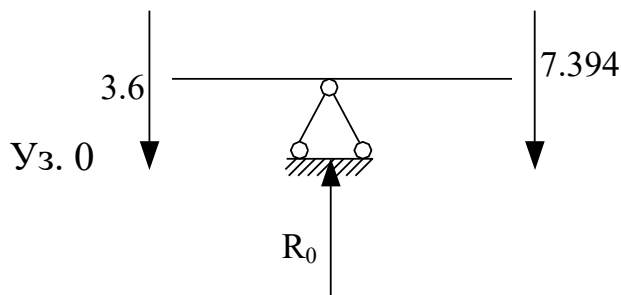


Рис. 3

$$\sum Y = 0; \quad -3,6 - 7,394 + R_0 = 0, \quad R_0 = 10,994 \text{ кН}.$$

Определяем реакцию в опоре 1 (см. Рис. 27)

$$\sum Y = 0; \quad -8,806 - 5,969 + R_1 = 0, \quad R_1 = 14,575 \text{ кН}.$$

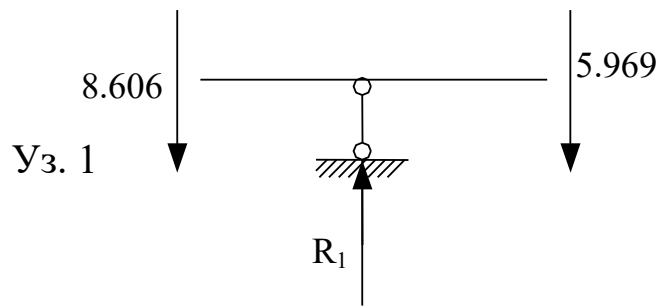


Рис. 4

Определяем реакцию в опоре 2 (см. Рис. 28)

$$\sum Y = 0; \quad -2,031 - 2,935 + R_2 = 0, \quad R_2 = 4.966 \text{ кН.}$$

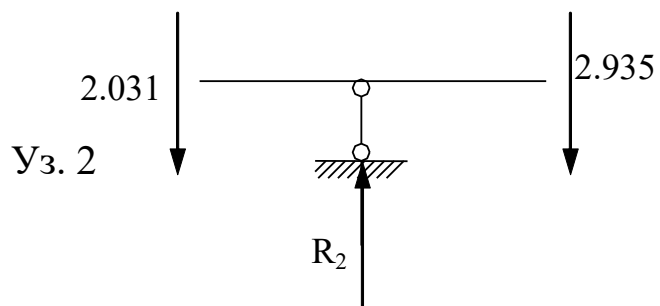


Рис. 5

Определяем реакцию в опоре 3 (см. Рис. 29)

$$\sum Y = 0; \quad -5,065 - 5,247 + R_3 = 0, \quad R_3 = 10.312 \text{ кН.}$$

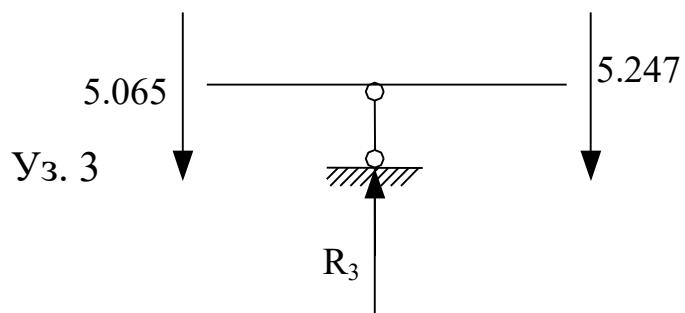


Рис. 6

Определяем реакцию в опоре 4 (см. Рис. 30)

$$\sum Y = 0; \quad -4,753 - 3,6 + R_4 = 0, \quad R_4 = 8,353 \text{ кН.}$$

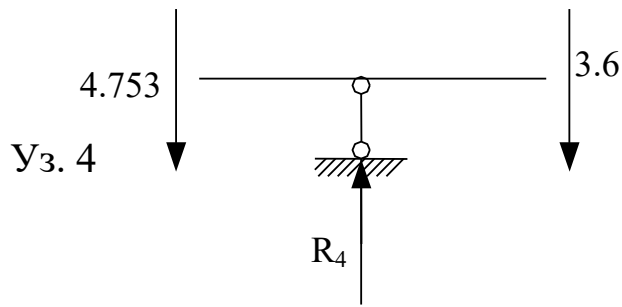


Рис. 7

9. Статическая проверка правильности построения эпюр.  
Приложив к балке внешние нагрузки и опорные реакции, убеждаемся в выполнении условий равновесия (см. Рис. 31)

$$\sum F_Y = 0; -2 \times 24.6 + 10.994 + 14.575 + 4.966 + 10.312 + 8.353 = -49.2 + 49.2 = 0$$

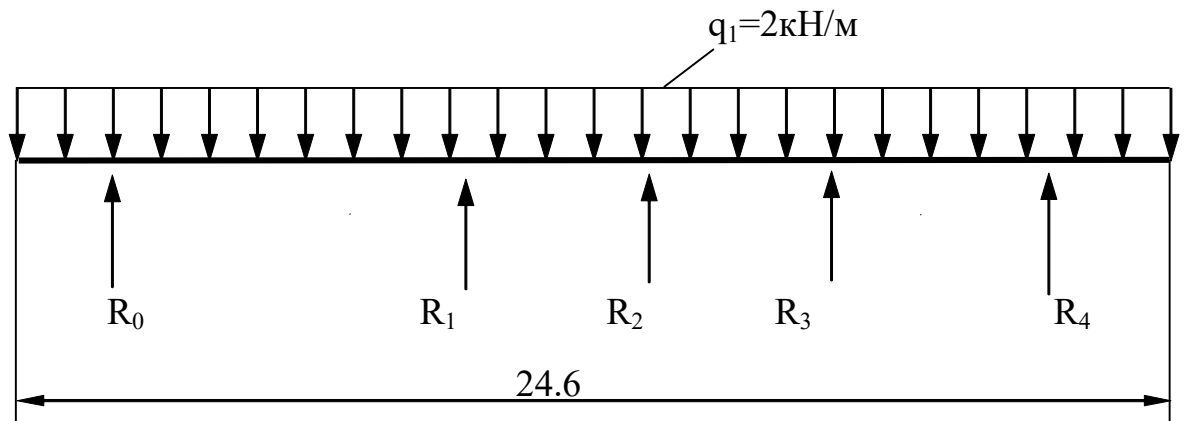


Рис. 8

### 2.1.2 расчет неразрезной балки с помощью метода фокусов

Расчет неразрезной балки с помощью метода фокусов ведется на разные виды механических нагрузок, которые в учебных целях, будем считать временными (см. Рис. 9).

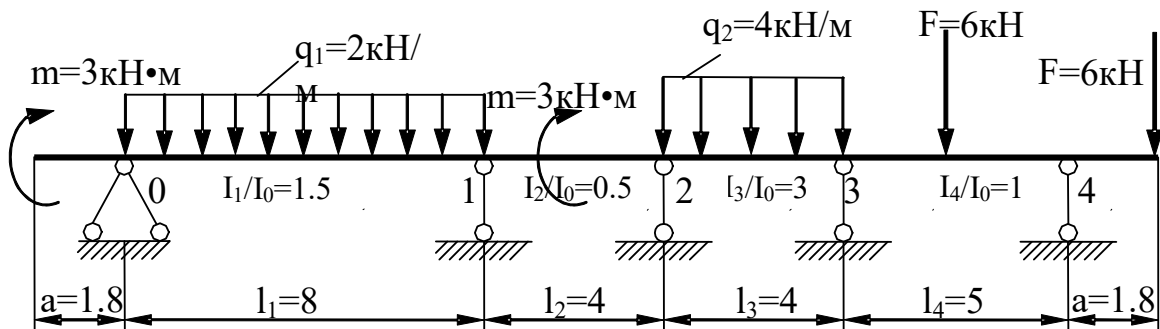


Рис. 9

Методика метода фокусов подразумевает расчет балки на загрузку только одного пролета, поэтому ниже расчет на каждую из нагрузок ведется по отдельности.

1. Определяем приведенные длины пролетов балки и фокусные отношения в пролетах, которые не зависят от вида нагружения, а лишь от геометрии балки.

Приведенные длины пролетов нами определялись в предыдущем разделе. Приведем из здесь заново.

$$l'_1 = l_1 \times \frac{J_0}{J_1} = 8 \times \frac{1}{1,5} = 5,333; \quad l'_2 = l_2 \times \frac{J_0}{J_2} = 4 \times \frac{1}{0,5} = 8;$$

$$l'_3 = l_3 \times \frac{J_0}{J_3} = 4 \times \frac{1}{3} = 1,333; \quad l'_4 = l_4 \times \frac{J_0}{J_4} = 5 \times \frac{1}{1} = 5.$$

Величины левых фокусных отношений равны

$$k_1 = \infty$$

$$k_2 = 2 + \frac{l'_1}{l'_2} \times \left( 2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{16}{\frac{3}{8}} \times \left( 2 - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{10}{3}.$$

$$k_3 = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \times \left( 2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{8}{\frac{3}{4}} \times \left( 2 - \frac{1}{\frac{10}{3}} \right) = \frac{61}{5} = 12,2.$$

$$k_4 = 2 + \frac{l_3'}{l_4'} \times \left( 2 - \frac{1}{k_3} \right) = 2 + \frac{4}{\frac{3}{5}} \times \left( 2 - \frac{1}{\frac{61}{5}} \right) = 2,5.$$

Правые фокусные отношения равны

$$k_4' = \infty.$$

$$k_3' = 2 + \frac{l_4'}{l_3'} \times \left( 2 - \frac{1}{k_4'} \right) = 2 + \frac{5}{\frac{4}{3}} \times \left( 2 - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{19}{2}.$$

$$k_2' = 2 + \frac{l_3'}{l_2'} \times \left( 2 - \frac{1}{k_3'} \right) = 2 + \frac{4}{\frac{3}{8}} \times \left( 2 - \frac{1}{\frac{19}{2}} \right) = \frac{44}{19}.$$

$$k_1' = 2 + \frac{l_2'}{l_1'} \times \left( 2 - \frac{1}{k_2'} \right) = 2 + \frac{8}{\frac{16}{3}} \times \left( 2 - \frac{1}{\frac{44}{19}} \right) = \frac{383}{88}.$$

2. Расчёт на загрузку правой консоли сосредоточенной силой (см. Рис. 33).

Определение опорных моментов. Момент в статически определимой консоли находим как

$$M_4 = -F \times a = -6 \times 1,8 = -10,8 \text{ кНм.}$$

Момент в третьем сечении  $M_3$  вычисляем из формулы фокусных отношений в пролете

$$\frac{M_4}{M_3} = -k_4, \quad M_3 = -\frac{M_4}{k_4} = -(-6 \times 1,8) \times \frac{1}{2,5} = 4,32 \text{ кНм.}$$

Для момента во втором  $M_2$  сечении получим

$$\frac{M_3}{M_2} = -k_3, \quad M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = -\frac{4,32}{12,2} = -0,3541 \text{ кНм.}$$

Аналогично, для первого сечения  $M_1$  имеем

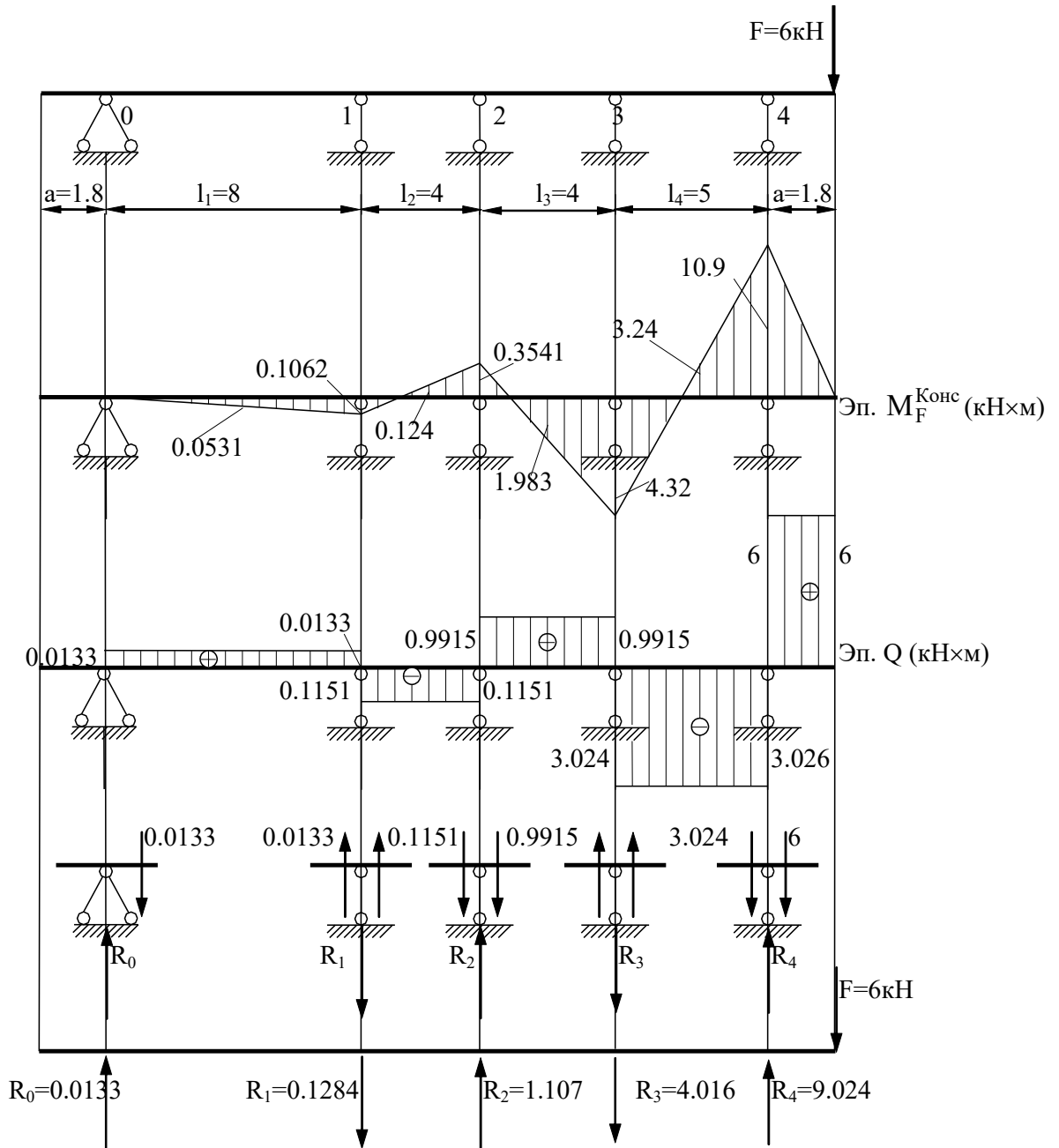


Рис. 10

$$\frac{M_2}{M_1} = -k_2, \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{-0.3541}{3.333} = 0.1062 \text{ кНм.}$$

В сечении над опорой 0 должен быть нулевой момент  $M_0$ , так как в настоящей задаче консоль не нагружена. Проверим это по формуле

$$\frac{M_1}{M_0} = -k_1, \quad M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-0.1062}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

Определение поперечных сил ведем по эпюре моментов

В консоли имеем

$$Q_4 = F = 6 \text{ кН.}$$

В пролете 3-4

$$Q_{3-4} = -\frac{M_4 + M_3}{l_4} = -\frac{10,8 + 4,32}{5} = -3,026 \text{ кН.}$$

В пролете 3-2

$$Q_{2-3} = \frac{M_3 + M_2}{l_3} = \frac{4,32 + 0,3541}{4} = 1,169 \text{ кН.}$$

В пролете 1-2

$$Q_{1-2} = -\frac{M_2 + M_1}{l_2} = -\frac{0,3541 + 0,1062}{4} = -0,1151 \text{ кН.}$$

В пролете 0-1

$$Q_{0-1} = \frac{M_1 + M_0}{l_1} = \frac{0,1062 + 0}{8} = 0,0133 \text{ кН.}$$

Определяем опорные реакции, вырезая опорные узлы и уравновешивая их  $\sum F_Y = 0$ ;

Из условия равновесия узла 0 имеем

$$R_0 - 0,0133 = 0, \quad R_0 = 0,0133 \text{ кН.}$$

Из условия равновесия узла 1 получим

$$R_1 + 0,0133 + 0,1151 = 0, \quad R_1 = -0,1283 \text{ кН.}$$

Аналогично, для узла 2, запишем

$$R_2 - 0,1151 - 1,169 = 0, \quad R_2 = 1,2841 \text{ кН.}$$

Реактивное усилие в третьем узле

$$R_3 + 1,169 + 3,026 = 0, \quad R_3 = -4,195 \text{ кН.}$$

Четвертая реакция балки

$$R_4 - 3,026 - 6 = 0, \quad R_4 = 9,026 \text{ кН.}$$

Статическая проверка (см. Рис. 33) выполняется

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0 \\ R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + R_4 - F &= \\ &= 0,0133 - 0,1283 + 1,2841 - 4,195 + 9,026 - 6 = 0. \end{aligned}$$

3. Расчёт на загрузку 4-ого пролёта (см. Рис. 34).



Находим величины фиктивных реакций при загрузении четвертого пролета сосредоточенной нагрузкой

$$6A_4^\Phi = 6B_4^\Phi = \frac{3}{8} \times F \times l_4^2 = \frac{3}{8} \times 6 \times 25 = 56,25 \text{ кНм}^2.$$

Определяем опорные моменты загруженного пролета

$$M_3 = -6 \frac{A_4^\Phi \times k_4' - B_4^\Phi}{l_4 \times (k_4' \times k_4 - 1)} = -\frac{56,25 \times \infty - 56,25}{5 \times (\infty \times 2,5 - 1)} = -\frac{56,25}{12,5} = -4,5 \text{ кНм}$$

$$M_4 = -\frac{6 \times (B_4^\Phi \times k_4 - A_4^\Phi)}{l_4 \times (k_4' \times k_4 - 1)} = -\frac{56,25 \times (2,5 - 1)}{5 \times (\infty \times 2,5 - 1)} = 0 \text{ кНм.}$$

Остальные опорные моменты находим по формулам фокусных отношений

Момент на второй опоре  $M_2$

$$\frac{M_3}{M_2} = -k_3, \quad M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = -\frac{4,5}{12,2} = 0,3689 \text{ кНм.}$$

Момент на первой опоре  $M_1$

$$\frac{M_2}{M_1} = -k_2, \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{-0,3689}{3,333} = -0,1107 \text{ кНм.}$$

Момент на нулевой опоре  $M_1$

$$\frac{M_1}{M_0} = -k_1, \quad M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-(-0,1107)}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

Определение поперечных сил.

Левая половина участка 4-3 дает

$$Q_4 = \frac{0 - 5,25}{2,5} = -2,1 \text{ кН.}$$

Из рассмотрения правой части участка 4-3 имеем

$$Q_{3-4} = \frac{5,25 + 4,5}{2,5} = 3,9 \text{ кН.}$$

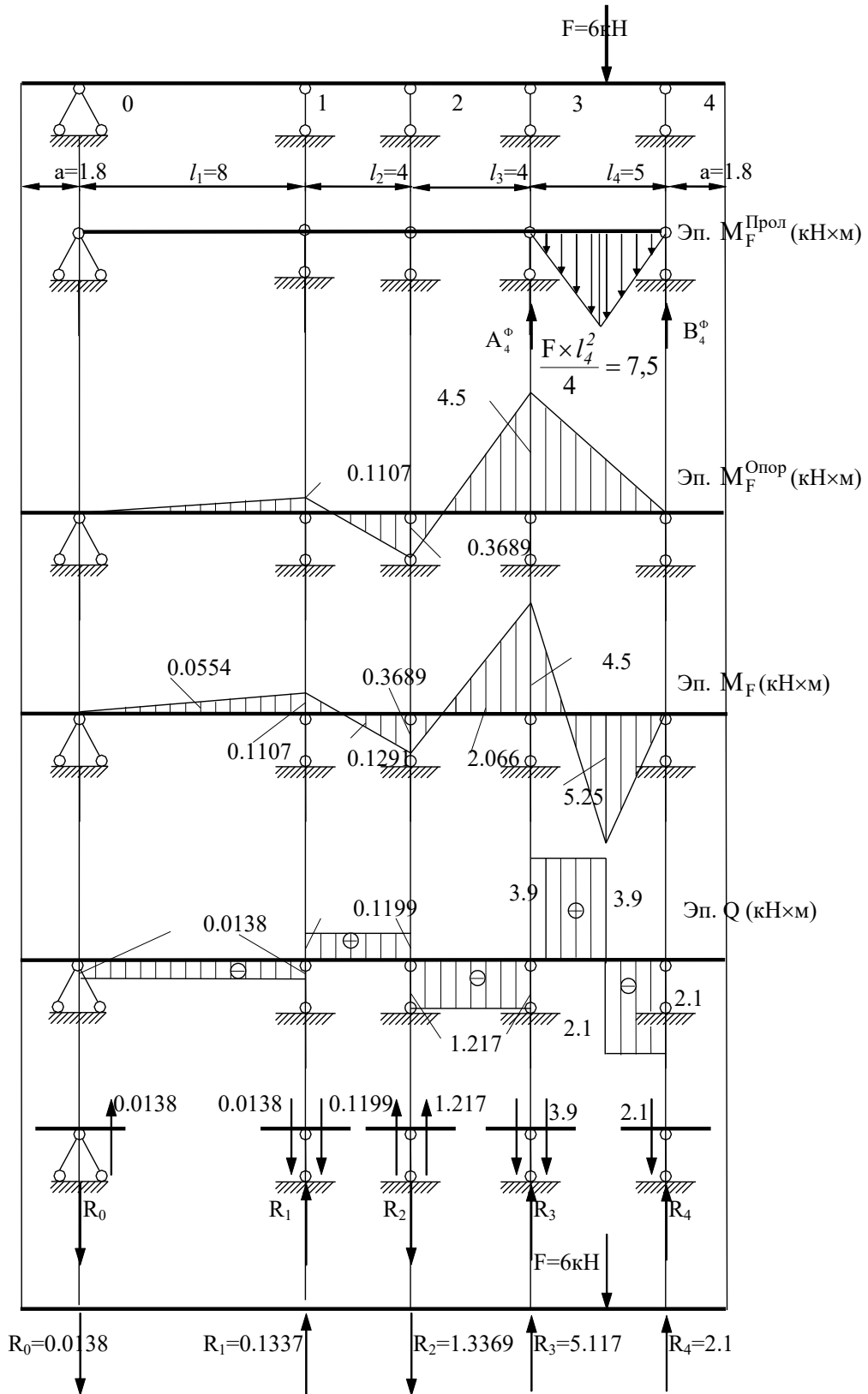


Рис. 11

Участок 1-2

$$Q_{1-2} = \frac{M_2 + M_1}{l_2} = \frac{0.3689 + 0.1107}{4} = 0.1199 \text{ кН.}$$

Участок 0-1

$$Q_{0-1} = -\frac{M_1 + M_0}{l_1} = -\frac{0.1107 + 0}{8} = -0.0138 \text{ кН.}$$

Определение опорных реакций балки.

$$\sum F_Y = 0; \quad R_0 + 0.0138 = 0, \quad R_0 = -0.0138 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_1 - 0.0138 - 0.1199 = 0, \quad R_1 = 0.1337 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_2 + 0.1199 + 1.217 = 0, \quad R_2 = -1.3369 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_3 - 1.217 - 3.9 = 0, \quad R_3 = 5.117 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_4 - 2.1 = 0, \quad R_4 = 2.1 \text{ кН.}$$

Статическая проверка.

$$\sum F_Y = 0,$$

$$-R_0 + R_1 - R_2 + R_3 + R_4 - F =$$

$$= -0.0138 + 0.1337 - 1.3369 + 5.117 + 2.1 - 6 = 0.$$

4. Расчёт на загрузку 3-его пролёта распределенной интенсивностью (см. Рис. 35).

Определение фиктивных реакций загруженного пролёта

$$6A_3^\Phi = 6B_3^\Phi = \frac{q_2 \times l_3^3}{4} = \frac{4 \times 4^3}{4} = 64 \text{ кНм}^2.$$

Определение опорных моментов загруженного пролёта.

$$M_2 = -6 \frac{A_3^\Phi \times k_3' - B_3^\Phi}{l_3 \times (k_3' \times k_3 - 1)} = -\frac{64 \times (9.5 - 1)}{4 \times (9.5 \times 12.2 - 1)} = \frac{544}{459.6} = -1.18 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = -\frac{6 \times (B_3^\Phi \times k_3 - A_3^\Phi)}{l_3 \times (k_3' \times k_3 - 1)} = -\frac{64 \times (12.2 - 1)}{4 \times (9.5 \times 12.2 - 1)} = -\frac{716.8}{459.6} = -1.56 \text{ кНм.}$$

Нм.

Вычисление опорных моментов незагруженного пролёта

$$\frac{M_2}{M_1} = -k_2, \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{1.18}{3.333} = 0.35 \text{ кНм.}$$

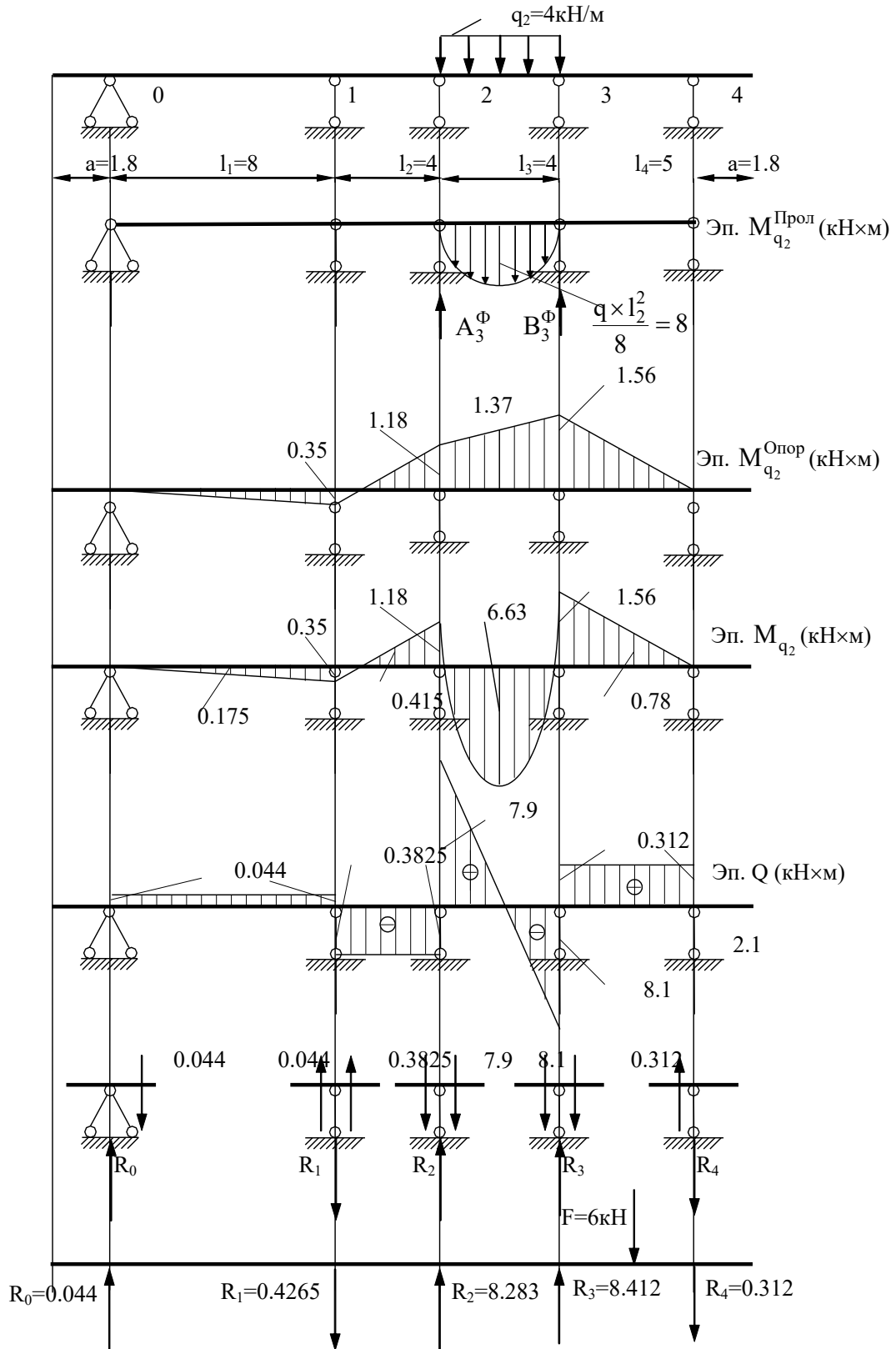


Рис. 12

$$\frac{M_1}{M_0} = -k_1, \quad M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-0.35}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = -k_4', \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4'} = -\frac{1.56}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

Определение поперечных сил по участкам.

$$Q_{3-4} = \frac{M_4 + M_3}{l_4} = \frac{1.56 + 0}{5} = 0.312 \text{ кН.}$$

$$Q_{2-3} = \frac{q_2 \times l_3}{2} - q \times x + \frac{M_3 + M_2}{l_3} \text{ кН.}$$

$$Q_2 = \frac{4 \times 4}{2} - 4 \times 0 - \frac{1.56 - 1.18}{4} = 8 - 0.095 = 7.9 \text{ кН.}$$

$$Q_3 = \frac{4 \times 4}{2} - 4 \times 4 - \frac{1.56 - 1.18}{4} = 8 - 16 - 0.095 = -8.1 \text{ кН.}$$

$$Q_{1-2} = -\frac{M_2 + M_1}{l_2} = -\frac{1.18 + 0.35}{4} = -0.3825 \text{ кН.}$$

$$Q_{0-1} = \frac{M_1 + M_0}{l_1} = -\frac{0.35 + 0}{8} = 0.044 \text{ кН.}$$

Определение опорных реакций балки.

$$\sum F_Y = 0; \quad R_0 - 0.044 = 0, \quad R_0 = 0.044 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; \quad R_1 + 0.044 + 0.3825 = 0, \quad R_1 = -0.4265 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; \quad R_2 - 0.3825 - 7.9 = 0, \quad R_2 = 8.2825 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_3 - 8.1 - 0.312 = 0, \quad R_3 = 8.412 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; \quad R_4 + 0.312 = 0, \quad R_4 = -0.312 \text{ кН.}$$

Статическая проверка.

$$\sum F_Y = 0,$$

$$R_0 - R_1 + R_2 + R_3 - R_4 - q_2 \times l_3 =$$

$$= 0.044 - 0.4265 + 8.2825 + 8.412 - 0.312 - 4 \times 4 = 0.$$

5. Расчёт на загрузку 2-ого пролёта сосредоточенным моментом (см. Рис 36).

Определяем фиктивные реакции загруженного пролёта

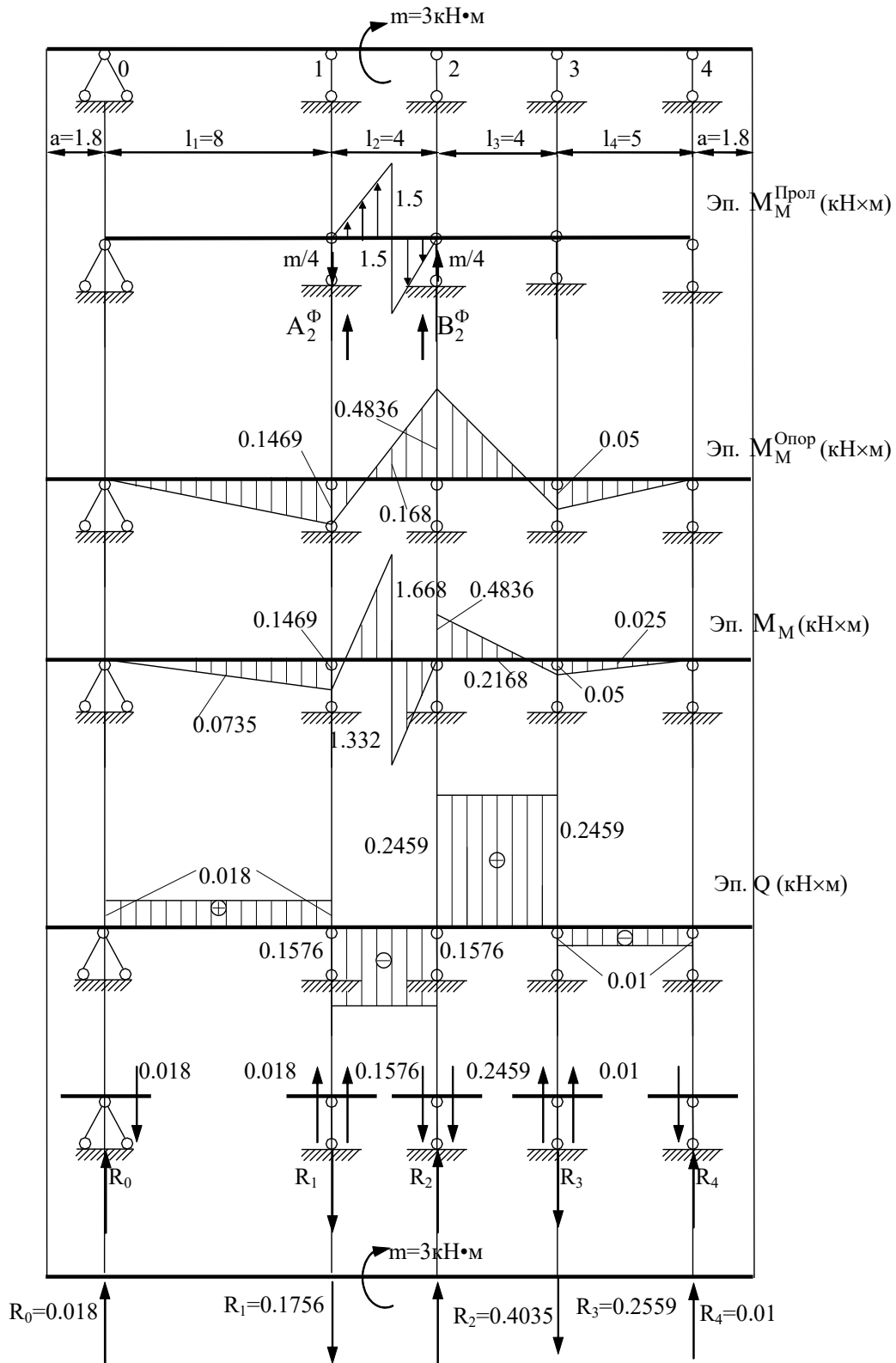


Рис. 13

$$-6A_2^\Phi = 6B_2^\Phi = \frac{m \times l_2}{4} = \frac{3 \times 4}{4} = 3 \text{ кНм}^2.$$

Определение опорных моментов загруженного пролета

$$M_1 = -6 \frac{A_2^\Phi \times k_2' - B_2^\Phi}{l_2 \times (k_2' \times k_2 - 1)} = -\frac{-(-3 \times (2,316 - 3))}{4 \times (2,316 \times 3,333 - 1)} = \frac{3,948}{26,877} = 0,1469$$

кНм.

$$M_2 = -\frac{6 \times (B_2^\Phi \times k_2 - A_2^\Phi)}{l_2 \times (k_2' \times k_2 - 1)} = -\frac{3 \times 3,333 + 3}{4 \times (2,316 \times 3,333 - 1)} = -\frac{12,999}{26,877} = -0,4836$$

кНм.

Опорные моменты незагруженных пролетов

$$\frac{M_1}{M_0} = -k_1, \quad M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-0,1469}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_2}{M_3} = -k_3', \quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3'} = -\frac{-0,4836}{9,5} = 0,05 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = -k_4', \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4'} = -\frac{0,05}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

Определение поперечных сил по эюре моментов.

$$Q_{3-4} = -\frac{M_4 + M_3}{l_4} = -\frac{0,05 + 0}{5} = -0,01 \text{ кН.}$$

$$Q_{2-3} = \frac{M_3 + M_2}{l_3} = \frac{0,05 + 0,4836}{4} = 0,2459 \text{ кН.}$$

$$Q_{1-2} = -\frac{M_2 + M_1}{l_2} = -\frac{0,4836 + 0,1469}{4} = -0,1576 \text{ кН.}$$

$$Q_{0-1} = \frac{M_1 + M_0}{l_1} = \frac{0,1469 + 0}{8} = 0,018 \text{ кН.}$$

Определение опорных реакций:

$$\sum F_Y = 0; \quad R_0 - 0,018 = 0, \quad R_0 = 0,018 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_1 + 0,018 + 0,1576 = 0, \quad R_1 = -0,1756 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_2 - 0,1576 - 0,2459 = 0, \quad R_2 = 0,4035 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_3 + 0,2459 + 0,01 = 0, \quad R_3 = -0,2559 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_4 - 0,01 = 0, \quad R_4 = 0,01 \text{ кН.}$$

Статическая проверка правильности построения эюр.

$$\sum F_Y = 0,$$

$$R_0 - R_1 + R_2 + R_3 - R_4 = \\ = 0,018 - 0,1756 + 0,4035 - 0,2559 + 0,01 = 0.$$

6. Расчёт на загрузку 1-ого пролёта распределенной интенсивностью (см. Рис 37).

Вычисляем фиктивные реакции загруженного пролёта

$$6A_1^\Phi = 6B_1^\Phi = \frac{q_1 \times l_1^3}{4} = \frac{2 \times 8^3}{4} = 256 \text{ кНм}^2.$$

Определение опорных моментов загруженного пролёта

$$M_0 = -6 \frac{A_1^\Phi \times k_1' - B_1^\Phi}{l_1 \times (k_1' \times k_1 - 1)} = -\frac{(256 \times 4,352 - 256)}{8 \times (\infty \times 4,352 - 1)} = 0 \text{ кНм.}$$

$$M_2 = -6 \frac{B_1^\Phi \times k_1 - A_1^\Phi}{l_1 \times (k_1' \times k_1 - 1)} = -\frac{(256 \times \infty - 256)}{8 \times (\infty \times 4,352 - 1)} = -\frac{256}{34,816} = -7,353 \text{ кНм.}$$

Опорные моменты незагруженных пролётов находим по формулам фокусных отношений

$$\frac{M_1}{M_2} = -k_2', \quad M_2 = -\frac{M_1}{k_2'} = -\frac{-(-7,353)}{2,316} = 3,175 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_2}{M_3} = -k_3', \quad M_3 = -\frac{M_2}{k_3'} = -\frac{-3,175}{9,5} = -0,3342 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = -k_4', \quad M_4 = -\frac{M_3}{k_4'} = -\frac{0,3342}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

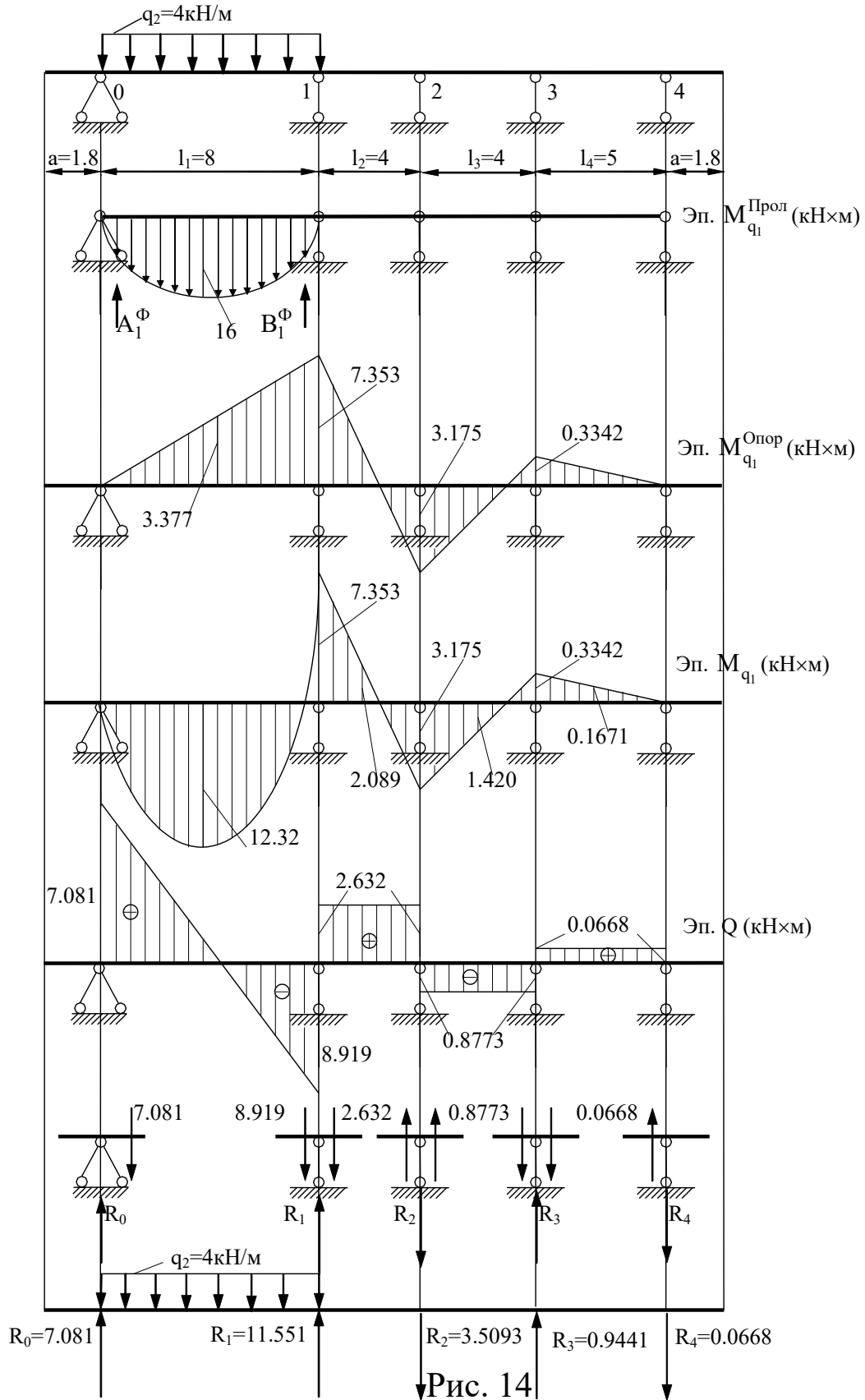
Определяем поперечные силы по пролетам

$$Q_{3-4} = \frac{M_4 + M_3}{l_4} = \frac{0,3342 + 0}{5} = 0,0668 \text{ кН.}$$

$$Q_{2-3} = -\frac{M_3 + M_2}{l_3} = -\frac{3,175 + 0,3342}{4} = -0,8773 \text{ кН.}$$

$$Q_{1-2} = \frac{M_2 + M_1}{l_2} = \frac{3,175 + 7,353}{4} = 2,632 \text{ кН.}$$





$$Q_{0-1} = \frac{q_1 \times l_1}{2} - q_1 \times x - \frac{M_1 + M_0}{l_1} .$$

$$Q_0 = \frac{2 \times 8}{2} - 2 \times 0 - \frac{7,353 - 0}{8} = 8 - 0,919 = 7,081 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = \frac{2 \times 8}{2} - 2 \times 8 - \frac{7,353 - 0}{8} = 8 - 16 - 0,919 = -8,919 \text{ кН.}$$

Определение опорных реакций:

$$\sum F_Y = 0; R_0 - 7.081 = 0, R_0 = 7.081; \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; R_1 - 8.919 - 2.632 = 0, R_1 = 11.551 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; R_2 + 2.632 + 0.8773 = 0, R_2 = -3.5093 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; R_3 - 0.8773 - 0.0668 = 0, R_3 = 0.9441 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0; R_4 + 0.668 = 0, R_4 = -0.0668 \text{ кН.}$$

Статическая проверка:

$$\sum F_Y = 0,$$

$$R_0 + R_1 - R_2 + R_3 - R_4 - q_1 \times l_1 =$$

$$= 7,081 + 11,551 - 3,5093 + 0,9441 - 0,0668 - 2 \times 8 = 0.$$

7. Расчёт на загрузку левой консоли сосредоточенным моментом (см. Рис 38).

Момент в консоли  $M_0 = 3 \text{ кНм.}$

Определение опорных моментов незагруженных пролетов

$$\frac{M_0}{M_1} = -k'_1, M_1 = -\frac{M_0}{k'_1} = -\frac{1.8 \times 3}{4.352} = -1.241 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = -k'_2, M_2 = -\frac{M_1}{k'_2} = -\frac{-1.241}{2.316} = 0.5358 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_2}{M_3} = -k'_3, M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = -\frac{0.5358}{9.5} = -0.0564 \text{ кНм.}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = -k'_4, M_4 = -\frac{M_3}{k'_4} = -\frac{-0.0564}{\infty} = 0 \text{ кНм.}$$

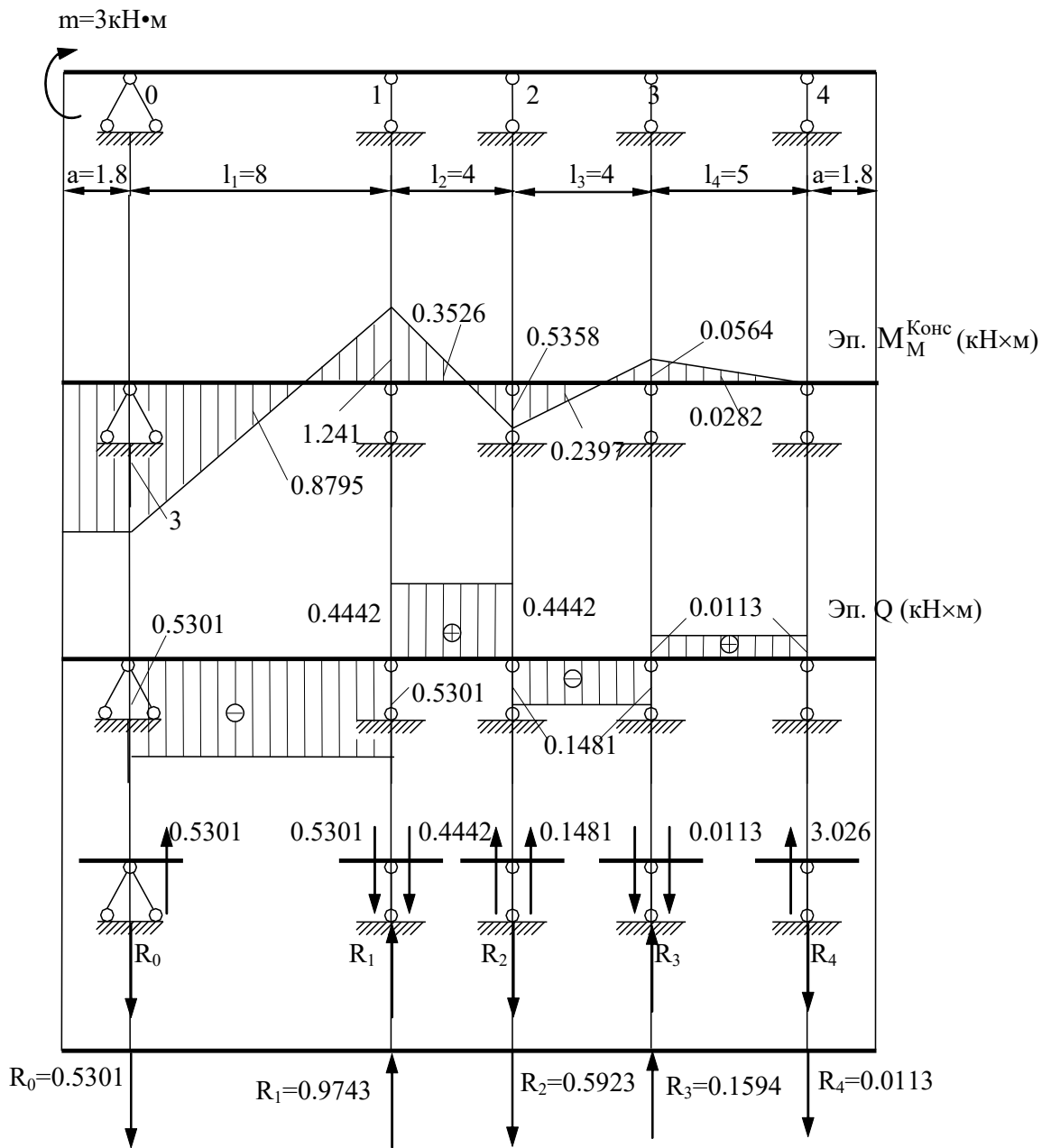


Рис. 15

Определение поперечных сил:

$$Q_{3-4} = \frac{M_4 + M_3}{l_4} = \frac{0,0564 + 0}{5} = 0,0113 \text{ кН.}$$

$$Q_{2-3} = -\frac{M_3 + M_2}{l_3} = -\frac{0,0564 + 0,5358}{4} = -0,1481 \text{ кН.}$$

$$Q_{1-2} = \frac{M_2 + M_1}{l_2} = \frac{1,241 + 0,5358}{4} = 0,4442 \text{ кН.}$$

$$Q_{0-1} = -\frac{M_1 + M_0}{l_1} = -\frac{3 + 1,241}{8} = -0,5301 \text{ кН.}$$

Определение опорных реакций:

$$\sum F_Y = 0; R_0 + 0.5301 = 0, \quad R_0 = -0.5301 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_1 - 0.5301 - 0.4442 = 0, \quad R_1 = 0.9743 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_2 + 0.4442 + 0.1481 = 0, \quad R_2 = -0.5923 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_3 - 0.1481 - 0.0113 = 0, \quad R_3 = 0.1594 \text{ кН.}$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_4 + 0.0113 = 0, \quad R_4 = -0.0113 \text{ кН.}$$

Статическая проверка:

$$\sum F_Y = 0,$$

$$-R_0 + R_1 - R_2 + R_3 - R_4 =$$

$$= -0,5301 + 0,9743 - 0,5923 + 0,1594 - 0,0113 = 0.$$

### 2.1.3 Построение объемлющей эпюры моментов

Примем (в учебных целях), что в разделе 3.5.1 мы вели расчет на постоянную нагрузку (например, собственный вес).

Во втором разделе 3.5.2 расчет балки велся на временные нагрузки в пролетах.

В настоящем разделе мы будем строить объемлющую эпюру моментов с целью определения наибольших в пролете изгибающих моментов при различных сочетаниях постоянной и временных нагрузок.

Построение объемлющей эпюры моментов ведем по формулам

$$M_{\text{сечения}}^{\max} = M_{\text{сечения}}^{\text{пост.нагр}} + M_{\text{сечения}}^{\text{врем.нагр}},$$

$$M_{\text{сечения}}^{\min} = M_{\text{сечения}}^{\text{пост.нагр}} - M_{\text{сечения}}^{\text{врем.нагр}}.$$

1. Построение объемлющей эпюры моментов будем вести в табличной форме (см. табл. 2) и рисунок 39.

Таблица 2

Номер сечения	$M_{\text{пост}},$ кН×м	M от временной нагрузки, кН×м						$M_{\text{max}},$ кН×м	$M_{\text{min}},$ кН×м
		на левой консоли	в 1-м пролёте	во 2-м пролёте	в 3-м пролёте	в 4-м пролёте	на правой консоли		
-1	0	3	0	0	0	0	0	3	0
а	-0.81	3	0	0	0	0	0	0	-0.81
0	-3.24	3	0	0	0	0	0	0	-3.24
б	10.336	0.8795	12.32	0.0735	0.175	-0.0554	0.0531	23.84	10.28
1	-8.088	-1.241	-7.353	0.1469	0.35	-0.1107	0.1062	-7.485	-16.79
в	-0.151	-0.3526	-2.089	-1.668/ 1.332	-0.415	0.1291	-0.124	-0.0219/ 1.31	-4.676/ -3.008
2	-0.214	0.5358	3.175	-0.4836	-1.18	0.3689	-0.3541	3.866	-2.232
г	1.655	0.2397	1.4204	-0.2168	6.63	-2.066	1.983	11.93	-0.6278
3	-4.475	-0.0564	-0.3342	0.05	-1.56	-4.5	4.32	-0.105	-10.93
д	2.3925	-0.0282	-0.1671	0.025	-0.78	5.25	-3.24	7.668	-1.822
4	-3.24	0	0	0	0	0	-10.8	0	-14.04

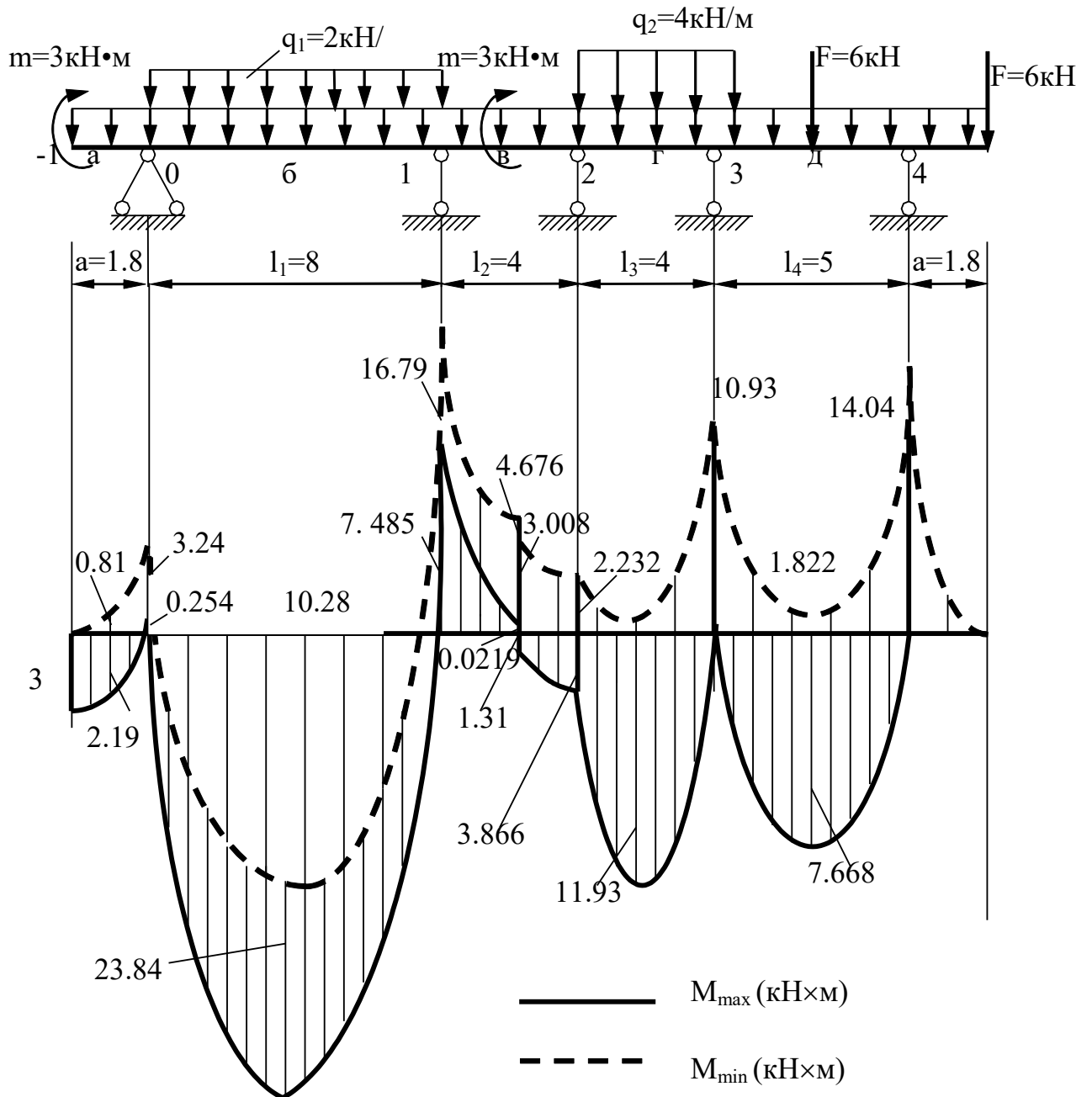


Рис. 16

Заметим, что речь не идет об одновременном действии всех временных нагрузок. На рисунке 9 все нагрузки приведены лишь для справки.

## 2.2 Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Задача № 6 переписывается из Приложения №2. Для заданной неразрезной балки (Рис. 59) требуется:

1. провести расчёт рамы методом перемещений на заданную нагрузку и построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .
2. выполнить статическую проверку эпюр.

По заданию моменты инерции стержней с горизонтальной осями обозначены  $J_1$ , а стержни с вертикальной осью  $J_2$ . Согласно заданным соотношениям между ними получены величины моментов инерции на рисунке 40.

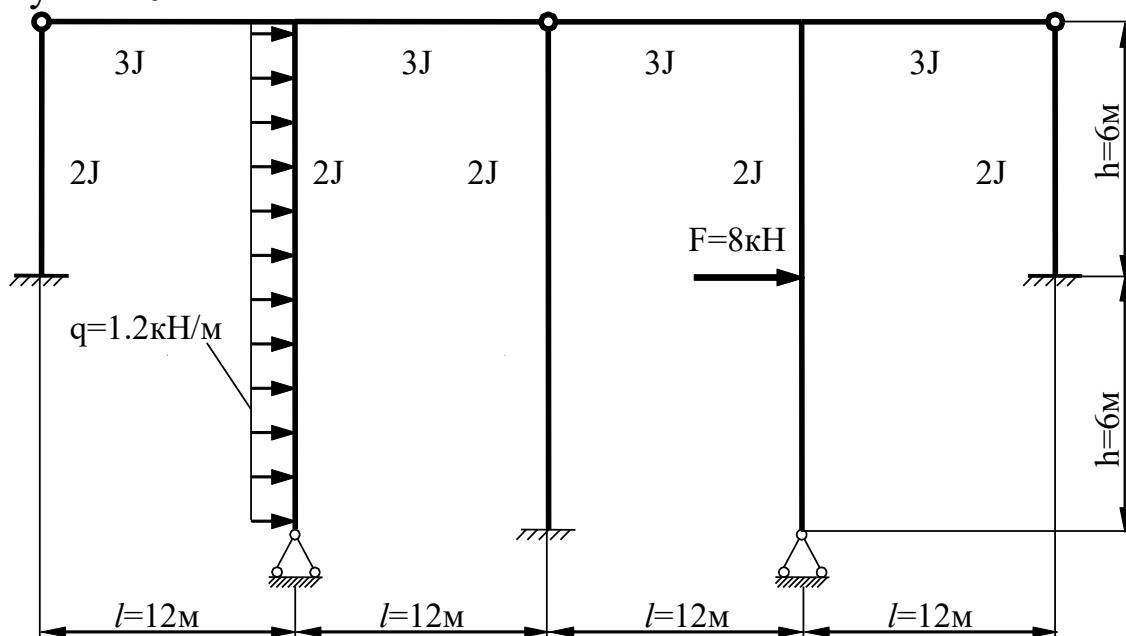


Рис. 17

Решение.

1. Вычисляем степень кинематической неопределимости по формуле

$$n = n_y + n_L = 2 + 1 = 3.$$

Где  $n_y$  – количество жестких узлов, равное количеству неизвестных углов поворота узлов рамы;

$n_L$  – количество неизвестных линейных смещений рамы.

2. Записываем систему канонических уравнений метода перемещений

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

3. Выбираем основную систему метода перемещений (ОСМП) добавляя в жесткие узлы связи, запрещающие их повороты, и по направлению возможных линейных перемещений связи, запрещающие перемещения (см. Рис. 41).

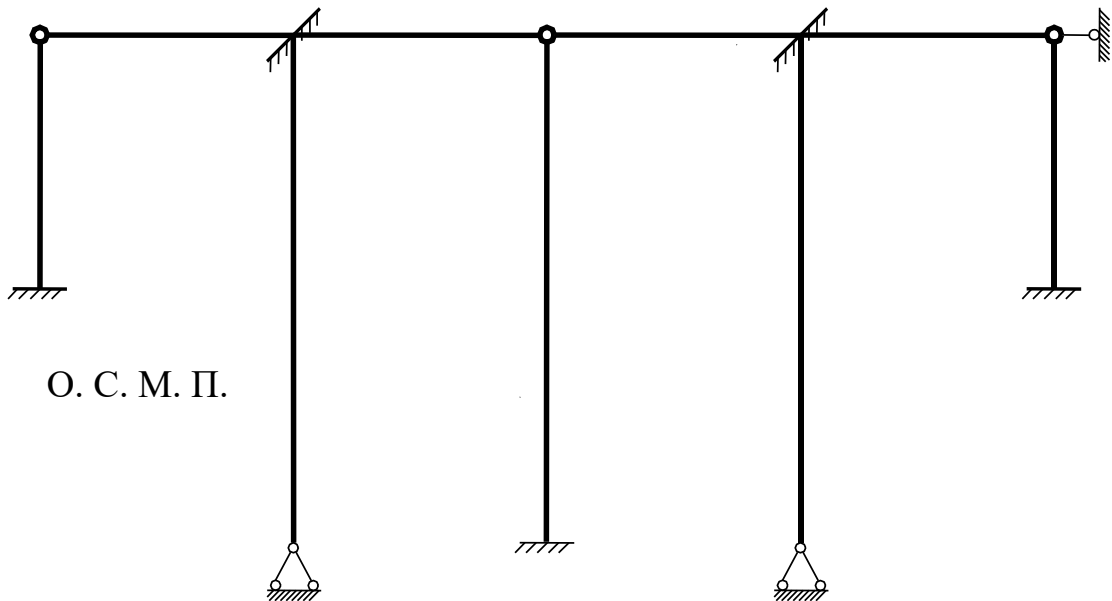


Рис. 18

Эквивалентную систему метода перемещений (ЭСМП) получаем после приложения к ОСМП заданной нагрузки и неизвестных пока перемещений, которые должны появиться после деформирования рамы под действием нагрузки (см. Рис. 42).

Учитывая, что рама симметрична относительно вертикальной оси, используем группировку неизвестных углов поворота жестких узлов рамы, и выбираем их в виде симметричных и антисимметричных составляющих.

Неизвестные  $Z_2$  и  $Z_3$  антисимметричные, а неизвестная  $Z_1$  симметричная. Следовательно коэффициенты канонического уравнения  $r_{21} = r_{12} = 0$ , и  $r_{31} = r_{13} = 0$ .



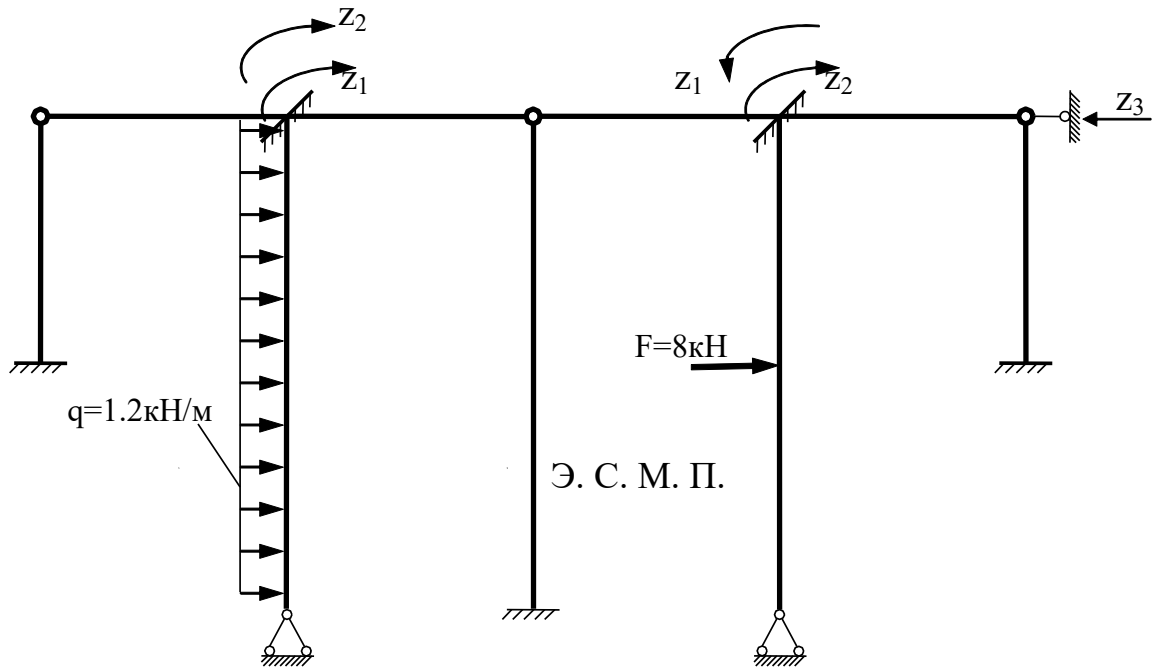


Рис. 19

3. Построение единичных  $\overline{M}_{ij}$ , и грузовой  $M_F$  эпюр в основной системе метода перемещений ведем с использованием таблиц метода перемещений, приведенных в Приложении 2 настоящих методических указаний (см. Рис.43, Рис.44, Рис.45, Рис. 46).

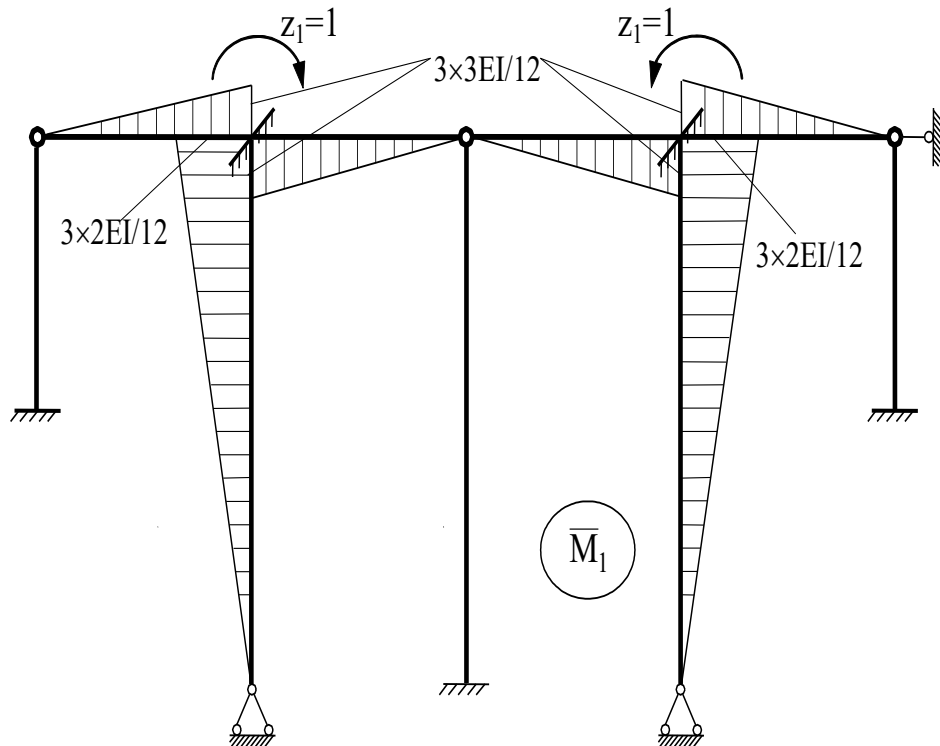


Рис. 20

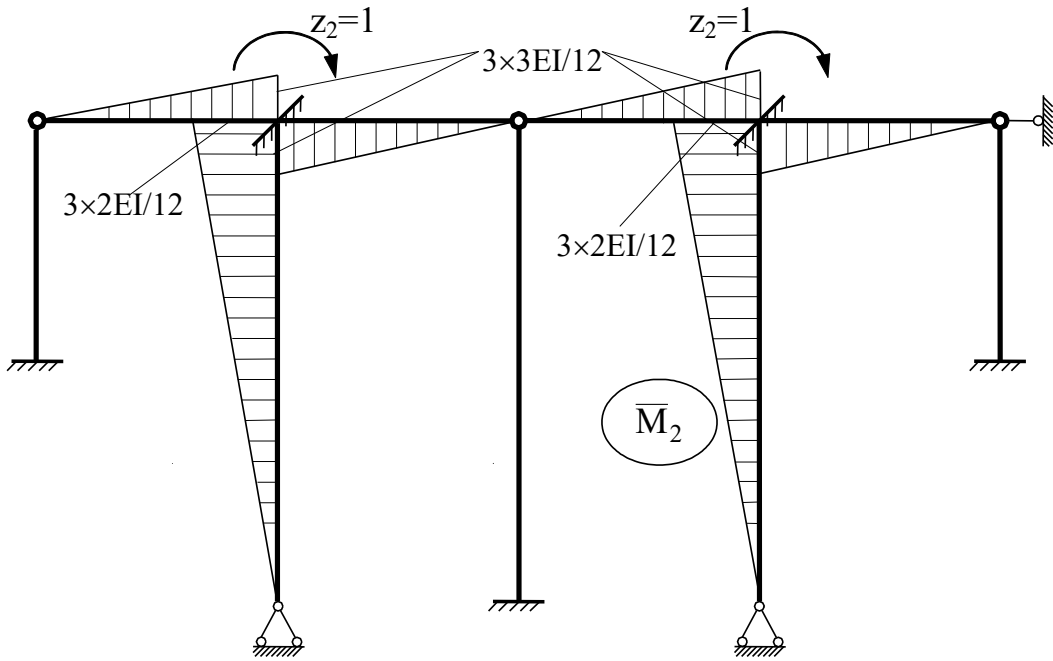


Рис. 21

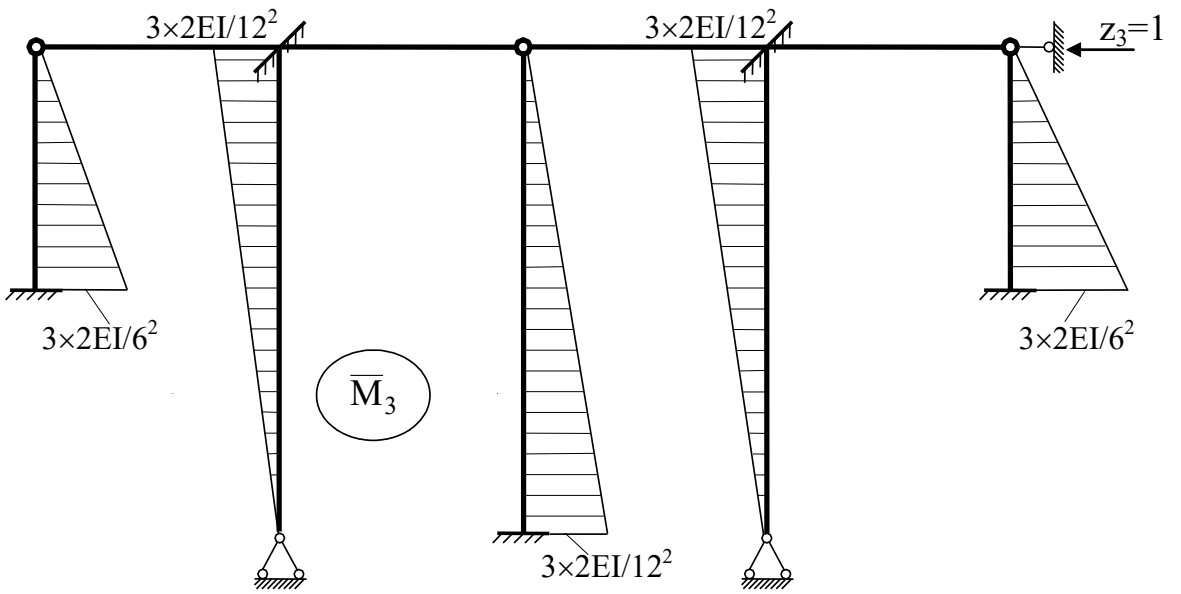


Рис. 22

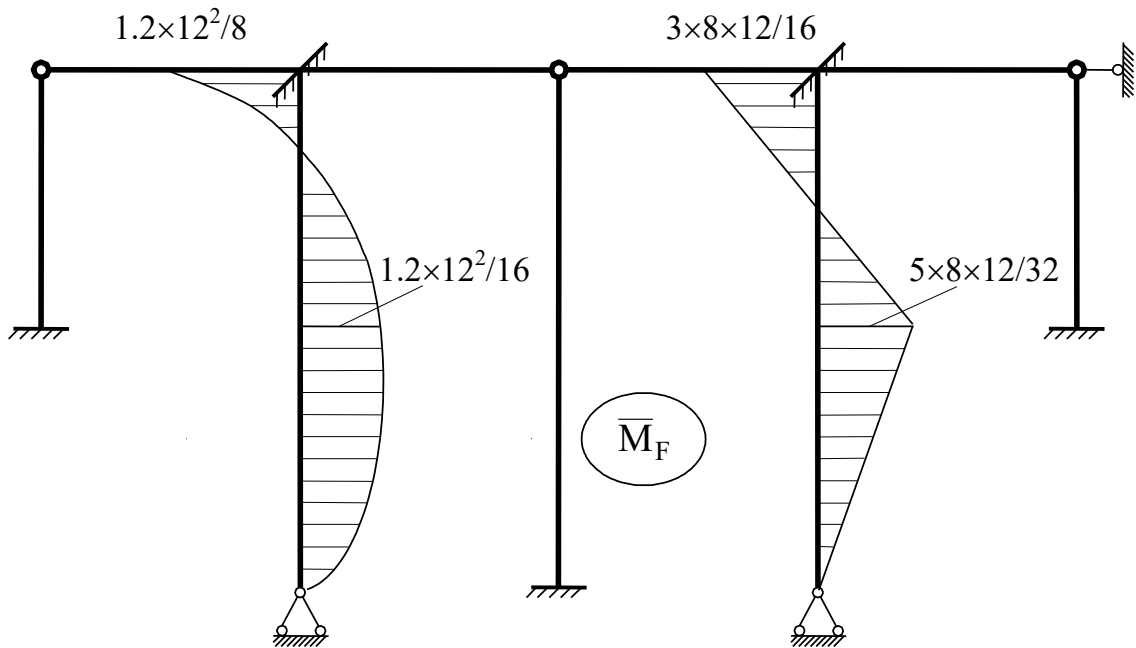


Рис. 23

5. Определение единичных  $r_{ij}$  и грузовых  $R_{iF}$  коэффициентов канонических уравнений метода перемещений ведем статическим методом, вырезая на единичных и грузовой эпюрах узлы и элементы рамы и уравнивая их.

Коэффициент  $r_{11}$ , имеющий смысл реактивного момента, находим из условия равновесия узлов (Рис. 47)

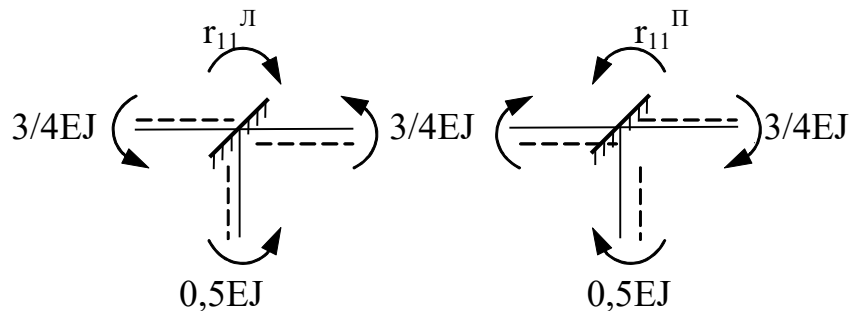


Рис. 24

$$r_{11} = r_{11}^I + r_{11}^{II} = 2EJ \times \left(0,5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 4EJ.$$

Аналогично находим коэффициент  $r_{22}$  (см. Рис. 48).

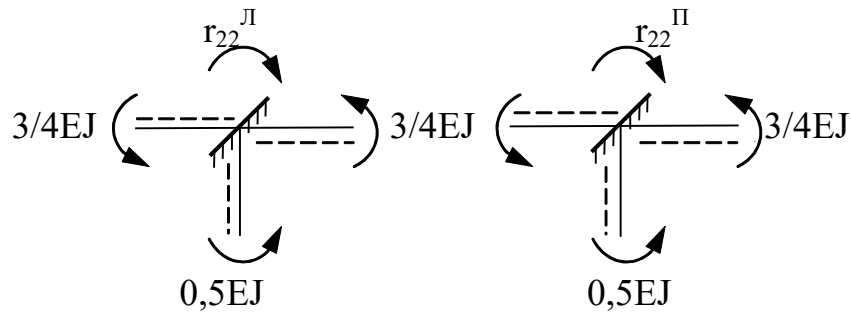


Рис.25

$$r_{22} = r_{22}^I + r_{22}^{II} = 2EJ \times \left(0,5 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) = 4EJ.$$

Находим коэффициент  $r_{23}$  (см. Рис. 49).

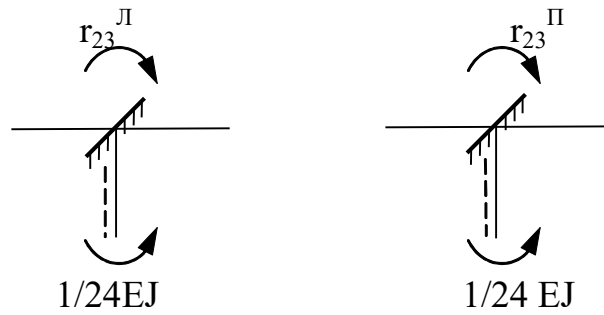


Рис. 26

$$r_{23} = r_{23}^I + r_{23}^{II} = 1/12EJ.$$

Коэффициент  $r_{33}$  имеет смысл реактивного усилия, поэтому может быть уравновешен только поперечными силами, имеющимися на рассеченных участках (Рис. 50).

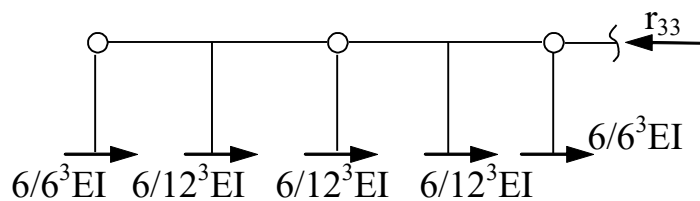
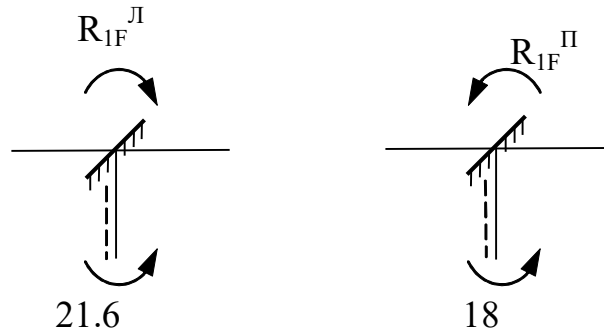


Рис. 27

$$r_{33} = EJ \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{288} + \frac{1}{288} + \frac{1}{288} \right) = \frac{19}{288} EJ.$$

Находим грузовой коэффициент  $R_{IF}$ , имеющий смысл реактивного момента из условия равновесия моментов в узлах (Рис.51).



$$R_{1F} = R_{1F}^I + R_{1F}^{II} = 21,6 - 18 = 3,6 \text{ кНм.}$$

Аналогично, имеем  $R_{2F}$  (Рис. 28).

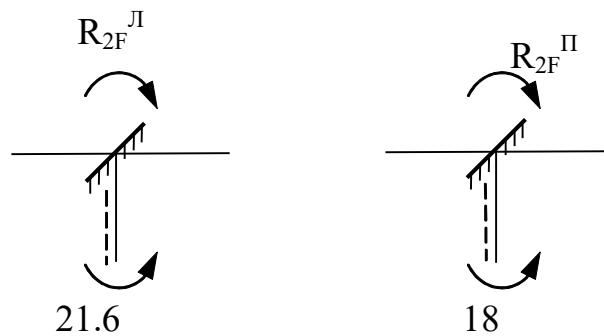


Рис. 28

$$R_{1F} = R_{1F}^I + R_{1F}^{II} = 21,6 + 18 = 39,6 \text{ кНм.}$$

Коэффициент  $R_{3F}$  имеет смысл реактивного усилия (см. Рис. 53)

$$R_{3F} = 14,5 \text{ кН.}$$

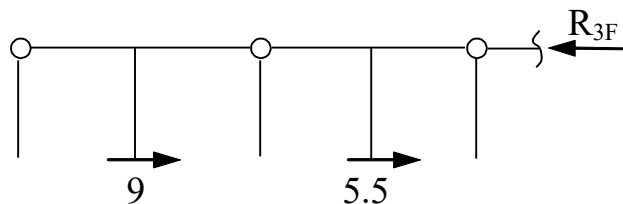


Рис. 29

6. Определение перемещений  $Z_1, Z_2, Z_3$  из уравнений

$$4EJ \times Z_1 + 3,6 = 0.$$

$$\begin{cases} 4EJ \times Z_2 + \frac{1}{12} EJ \times Z_3 + 39,6 = 0, \\ \frac{1}{12} EJ \times Z_2 + \frac{19}{288} EJ \times Z_3 + 14,5 = 0. \end{cases}$$

Получаем из первого уравнения

$$Z_1 = -\frac{3,6}{4EJ} = -\frac{0,9}{EJ}.$$

Решая систему из двух уравнений, находим

$$z_3 = \frac{-212,886}{EJ}; \quad z_2 = \frac{-5,465}{EJ}.$$

7. Эпюру моментов  $M$  в раме можно построить по формуле

$$M = \bar{M}_1 \times Z_1 + \bar{M}_2 \times Z_2 + \bar{M}_3 \times Z_3 + M_F.$$

На рисунках 54-56 показаны эпюры, соответствующие рем первым слагаемым формулы.

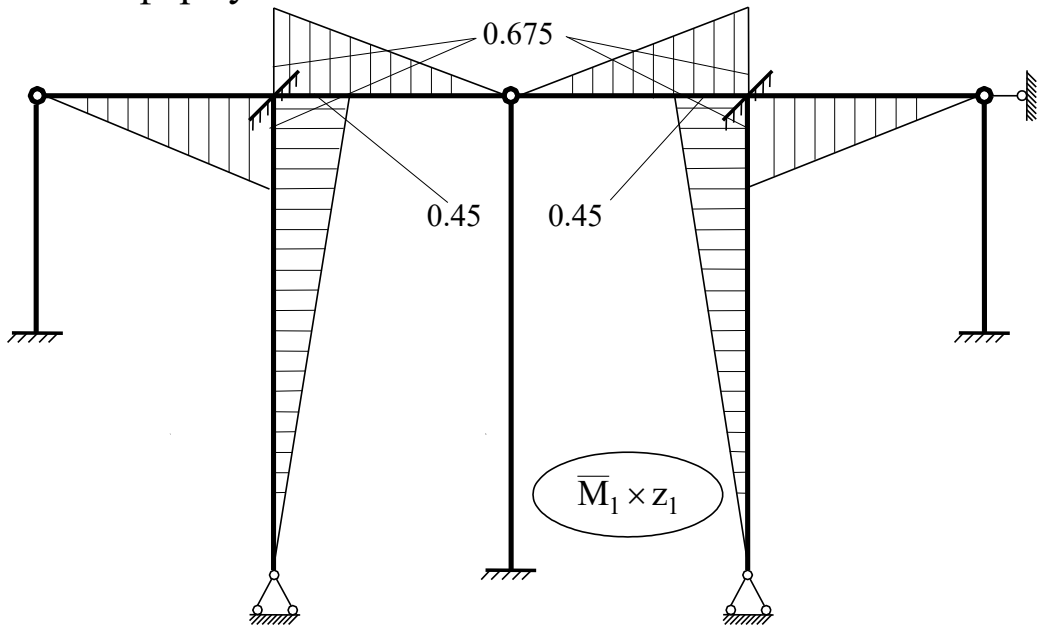


Рис. 30

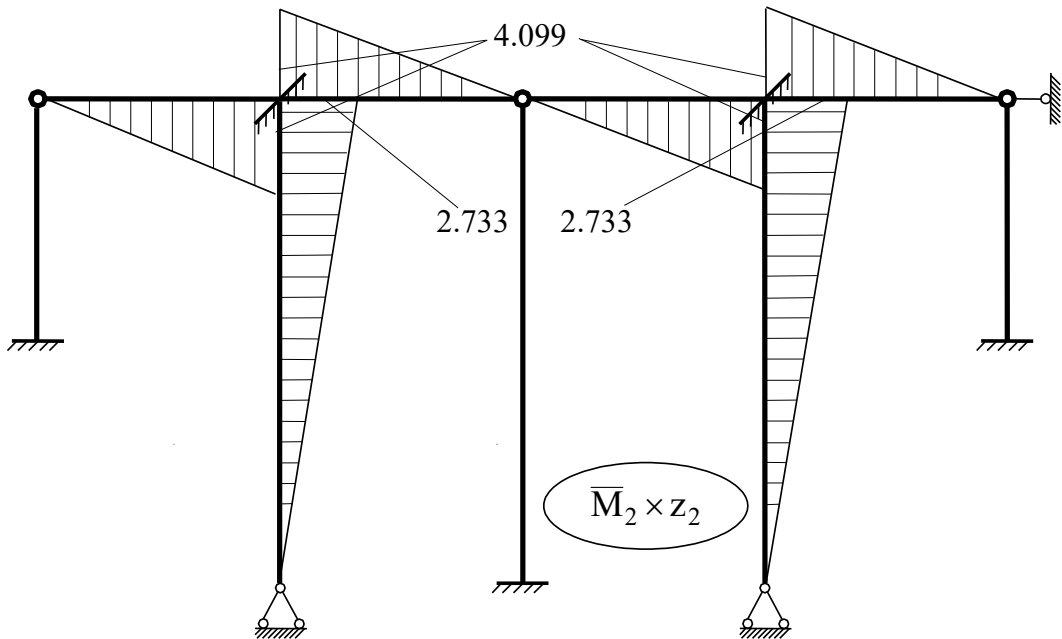


Рис. 31

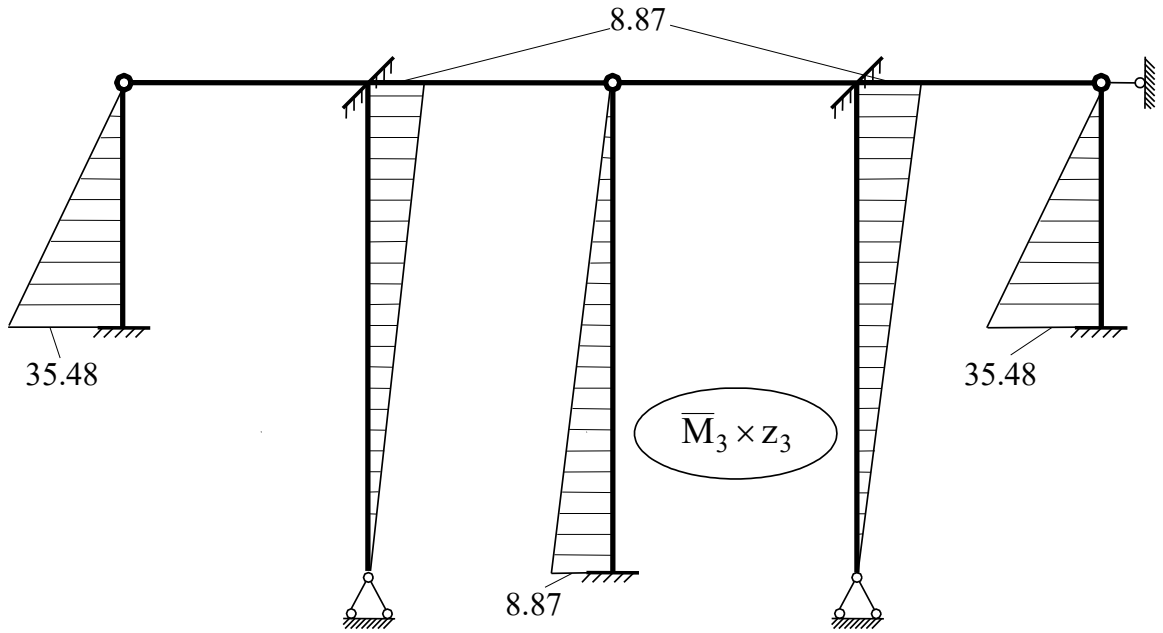


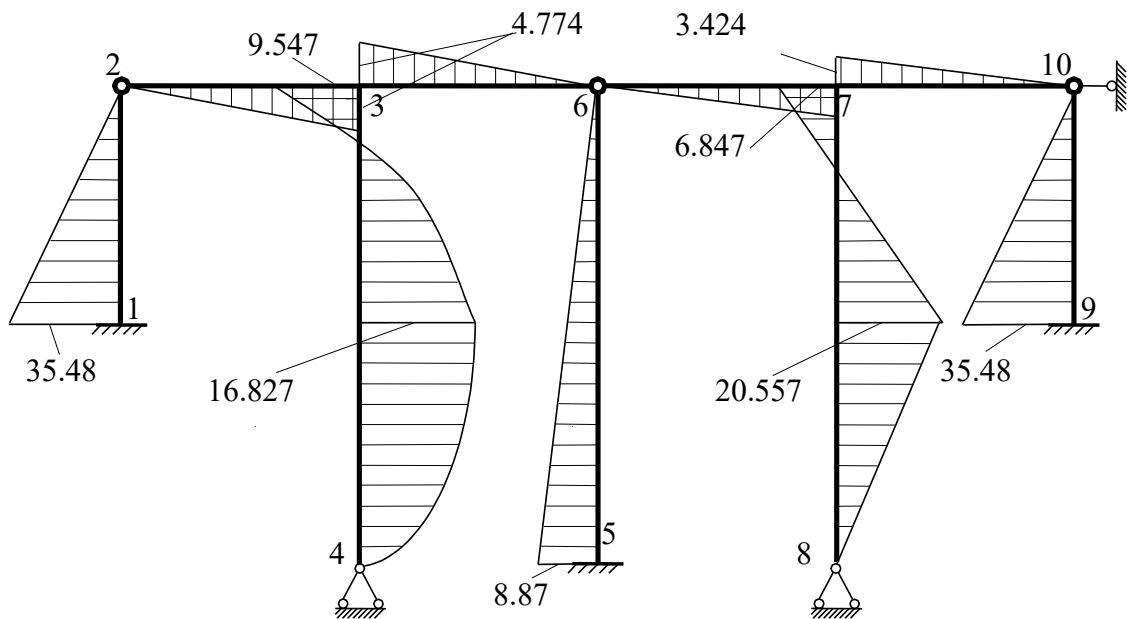
Рис. 32

Окончательная эпюра моментов показана на Рис. 57.  
 Выполним статическую проверку равновесия узлов (см. Рис. 58).  
 Равновесие узла 3.

$$\sum M_3 = 4,774 + 4,774 - 9,547 = 9,548 - 9,547 = 0,001 \text{ кНм.}$$

Ошибка вычислений

$$\frac{0.001}{9,547} \times 100\% = 0,01\%.$$



Эпюра "М" (кНм)

Рис. 33

Из равновесия узла 7 имеем

$$\sum M_3 = 3,424 + 3,424 - 6,847 = 6,848 - 6,847 = 0,001 \text{ кНм.}$$

Ошибка вычислений

$$\frac{0,001}{6,847} \times 100\% = 0,015\%.$$

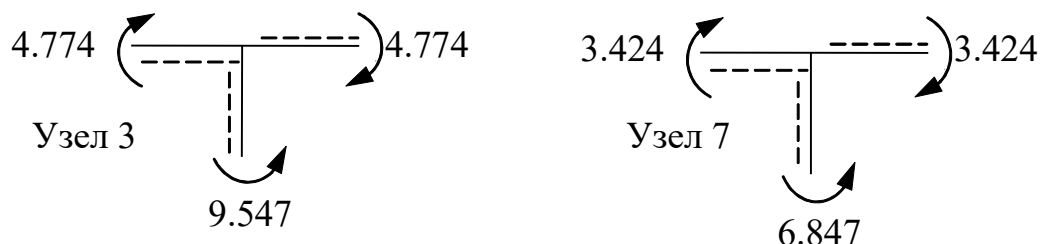
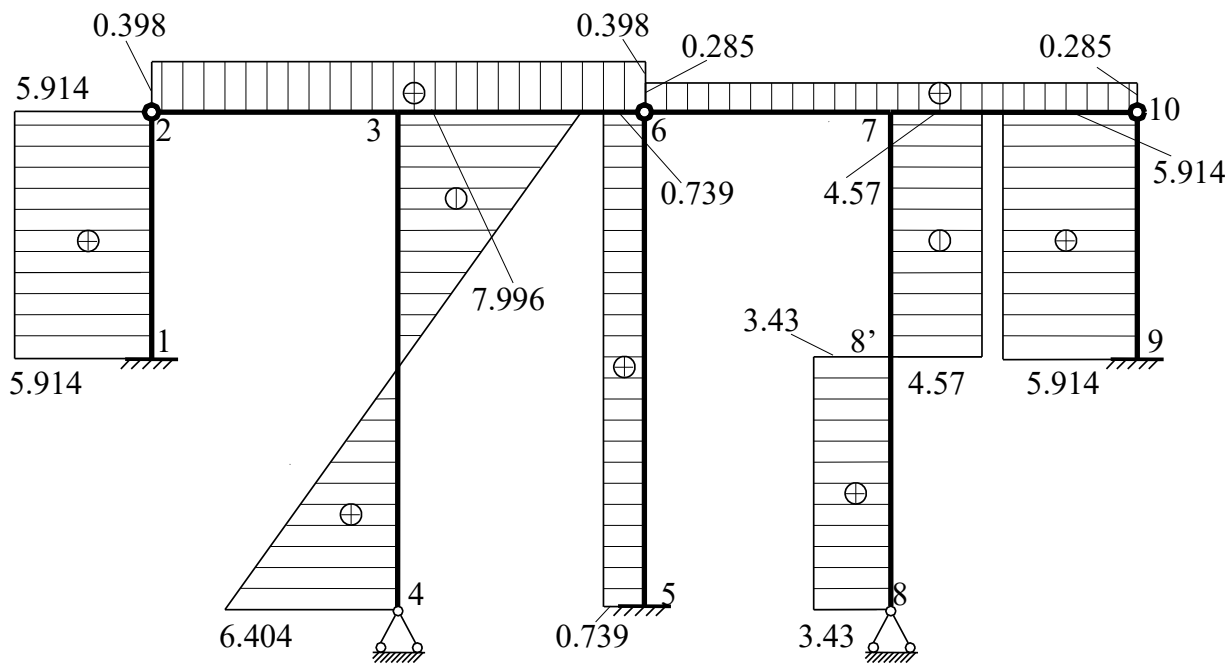


Рис. 34

9. Построение эпюры  $Q$  ведем по эпюре моментов, дифференцируя по участкам (см. Рис. 59)



Эпюра "Q" (кН)

Рис. 35

$$Q_{1-2} = \frac{35,481 - 0}{6} = 5,914 \text{ (кН)}; \quad Q_{2-3} = \frac{4,774 - 0}{12} = 0,398 \text{ (кН)};$$

$$Q_{3-6} = \frac{4,774 - 0}{12} = 0,398 \text{ (кН)}; \quad Q_{5-6} = \frac{8,87 - 0}{12} = 0,739 \text{ (кН)};$$



$$Q_{6-7} = \frac{3,424 - 0}{12} = 0,285(\text{кН}); \quad Q_{7-10} = \frac{3,424 - 0}{12} = 0,285(\text{кН});$$

$$Q_{9-10} = \frac{35,481 - 0}{6} = 5,914(\text{кН});$$

$$Q_{4-3} = \frac{q \times l}{2} - q \times x - \frac{11,37 + 23,05}{2}$$

$$Q_{4(x=0)} = \frac{1,2 \times 12}{2} - 1,2 \times 0 - 0,796 = 6,404(\text{кН}).$$

$$Q_{3(x=12)} = \frac{1,2 \times 12}{2} - 1,2 \times 12 - 0,796 = -7,996(\text{кН}).$$

$$Q_{8-8'} = \frac{20,557 - 0}{6} = 3,43(\text{кН});$$

$$Q_{8'-7} = -\frac{6,847 + 20,577}{6} = -4,57(\text{кН}).$$

10. Построение эпюры N ведем, вырезая и уравновешивая узлы рамы (см. Рис. 60-62).

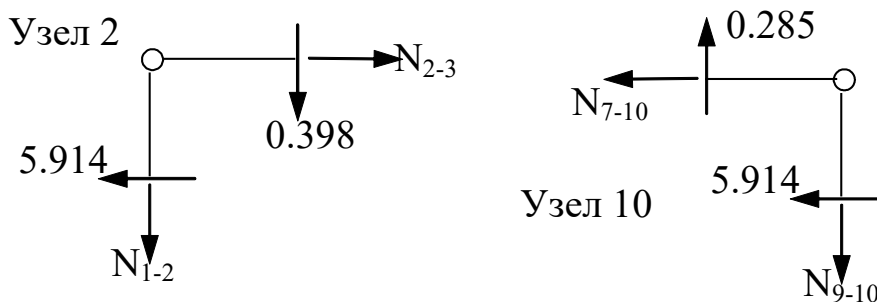


Рис. 36

Из равновесия узла 2 имеем (Рис. 36)

$$\sum F_Y = 0; \quad -N_{1-2} - 0,398 = 0; \quad N_{1-2} = -0,398 \text{кН}.$$

$$\sum F_X = 0; \quad N_{2-3} - 5,914 = 0; \quad N_{2-3} = 5,914 \text{кН}.$$

Из равновесия узла 10 имеем

$$\sum F_Y = 0; \quad -N_{9-10} + 0,285 = 0; \quad N_{9-10} = 0,285 \text{кН}.$$

$$\sum F_X = 0; \quad -N_{7-10} - 5,914 = 0; \quad N_{7-10} = -5,914 \text{кН}.$$

Из равновесия узла 3 имеем (см. Рис. 61)

$$\sum F_Y = 0; \quad -N_{3-4} - 0,398 + 0,398 = 0; \quad N_{3-4} = 0 \text{кН}.$$

$$\sum F_X = 0; \quad N_{3-6} - 5,914 + 7,996 = 0; \quad N_{3-6} = -2,082 \text{кН}.$$

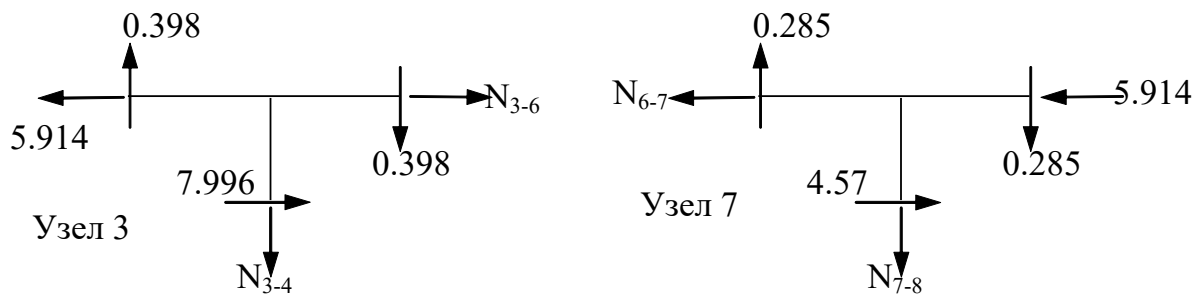


Рис. 37

Из равновесия узла 7 имеем (см. Рис. 61)

$$\sum F_Y = 0; \quad -N_{7-8} - 0.285 + 0.285 = 0; \quad N_{7-8} = 0 \text{ кН},$$

$$\sum F_X = 0; \quad -N_{6-7} - 5.914 + 4.57 = 0; \quad N_{6-7} = -1.344 \text{ кН}.$$

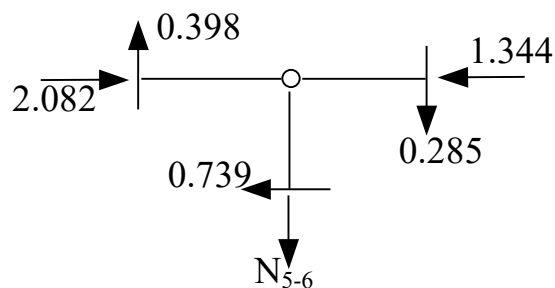


Рис. 38

Из равновесия узла 6 имеем (см. Рис. 62)

$$\sum F_Y = 0; \quad -N_{5-6} + 0.398 - 0.285 = 0; \quad N_{5-6} = 0.113 \text{ кН}.$$

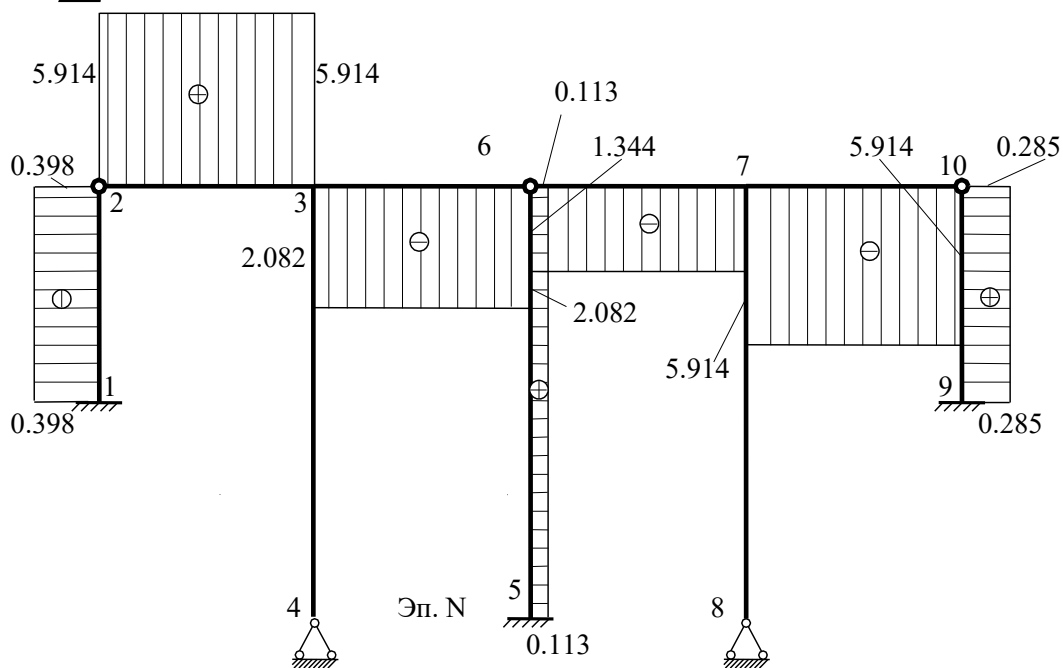


Рис. 39

11. Статическая проверка правильности построения эпюр проводится из условия равновесия рамы под действием внешних сил и внутренних усилий в сечениях, проведенных вблизи опорных закреплений (см. Рис. 64).

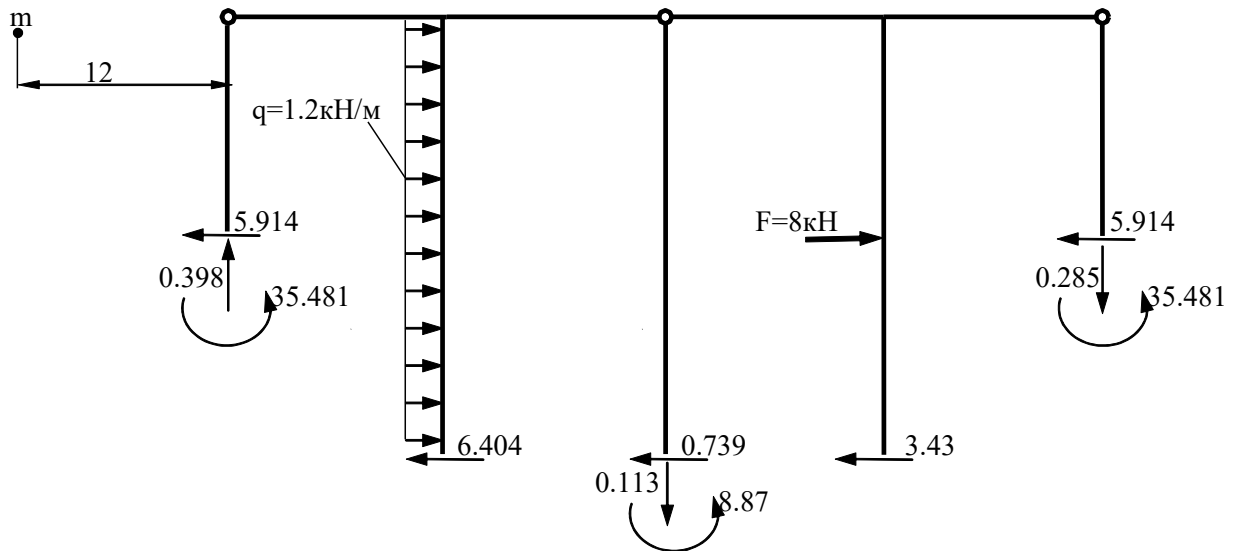


Рис. 40

Условие равновесия в направлении горизонтальной оси

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; \\ -5,914 + 1,2 \times 12 - 6,604 - 0,739 + 8 - 3,43 - 5,914 &= \\ &= 22,4 - 22,401 = -0,001.\end{aligned}$$

Ошибка вычислений

$$\frac{0,001}{22,4} \times 100\% = 0,004\%.$$

Условие равновесия в направлении вертикальной оси

$$\sum F_y = 0; \quad \sum F_y = 0,398 - 0,113 - 0,285 = 0,398 - 0,398 = 0.$$

Равновесие относительно произвольно выбранной точки

$$\begin{aligned}\sum M_m &= 0; \\ \sum M_m &= 5,914 \times 6 - 35,481 - 0,398 \times 12 + 6,404 \times 12 - \\ &- 1,2 \times 12 \times 6 + 0,739 \times 12 + 0,113 \times 36 - 8,87 + 3,42 \times 12 - \\ &- 8 \times 6 + 5,914 \times 6 + 0,285 \times 60 - 35,481 = -219,008 + 219,012 = -0,004.\end{aligned}$$

Ошибка вычислений

$$\frac{0,004}{219,008} \times 100\% = 0,002\%.$$

Условия выполняются. Эпюры построены верно.

## 2.3 Динамический расчет рамы

### 2.3.1 Определение собственной частоты колебаний

Задача № 7 переписывается из Приложения № 3. Для заданной рамы (Рис. 60) требуется:

1. определить частоты собственных колебаний масс;
2. построить эпюру динамических изгибающих моментов.

По заданию имеем соотношения для масс  $m_1/m=3$ , и моментов инерции  $J_1/J=1$ ;  $J_2/J=1$ . Частоту возмущающей нагрузки  $\Theta$  в учебных целях следует принять равной 0,6 от частоты основного тона свободных колебаний.

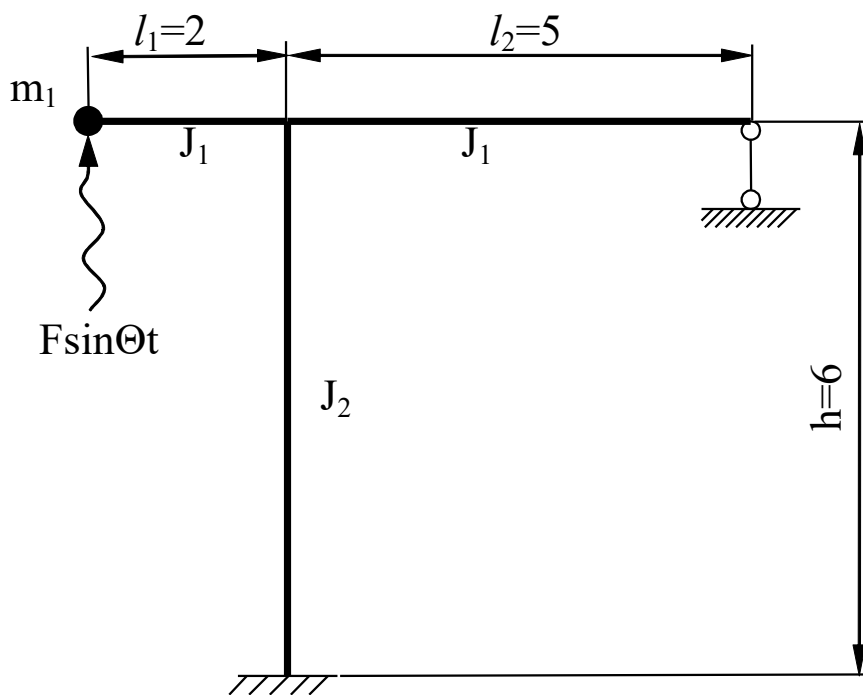


Рис.41

Решение.

1. Определяем количество степеней свободы системы  
 $n_{СВ}=2$ .
2. Согласно полученному количеству степеней свободы записываем частотный определитель

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & \delta_{11}m_1 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_1 - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициенты определителя находятся по формулам

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \times \bar{M}_j}{EJ} dx.$$

Физический смысл коэффициентов - перемещения в направлении степеней свободы массы в заданной (статически неопределимой) раме. Для вычисления перемещений необходимо построить эпюры моментов  $M_1$  и  $M_2$  в заданной раме (см. Рис. 66).

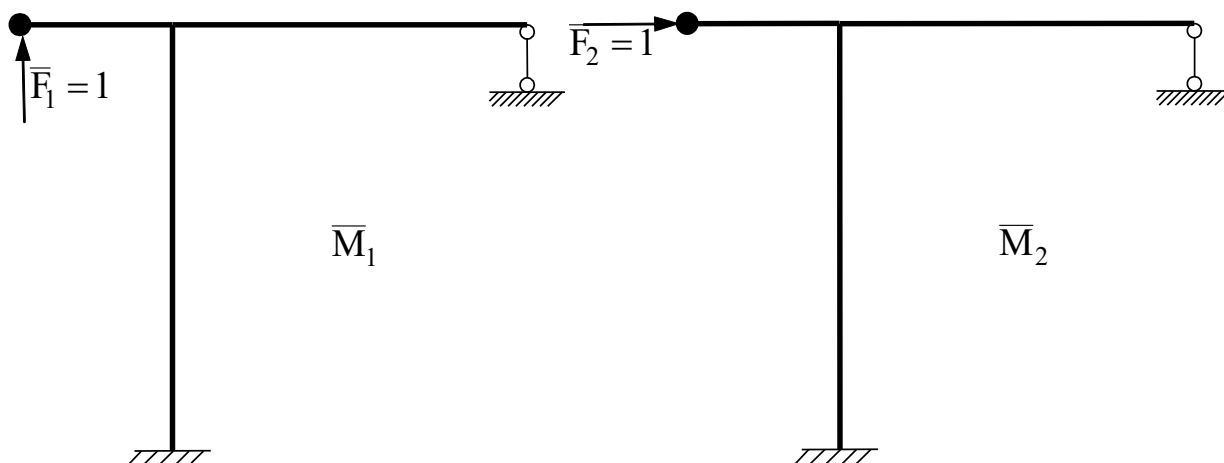


Рис. 42

3. Для вычисления коэффициентов частотного определителя, прикладываем единичные силы в направлении степеней свободы и раскрываем статическую неопределимость рамы.

По методу сил рама неопределима один раз  $L=1$ . По методу перемещений  $n=1$ . Для построения эпюр используем метод сил.

4. Построение эпюры  $\bar{M}_1$ .

Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11}^1 \times X_1 + \Delta_{1F}^1 = 0.$$

Эквивалентная система метода сил показана на рисунке 67.

На рисунках 68 и 69 приведены единичная и грузовая эпюры метода сил.

Единичный коэффициент канонического уравнения имеет вид

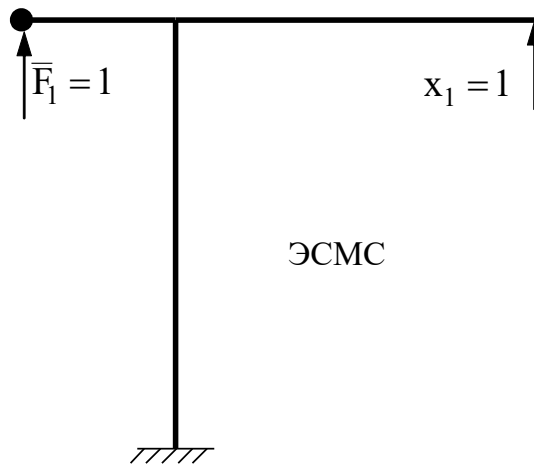


Рис. 43

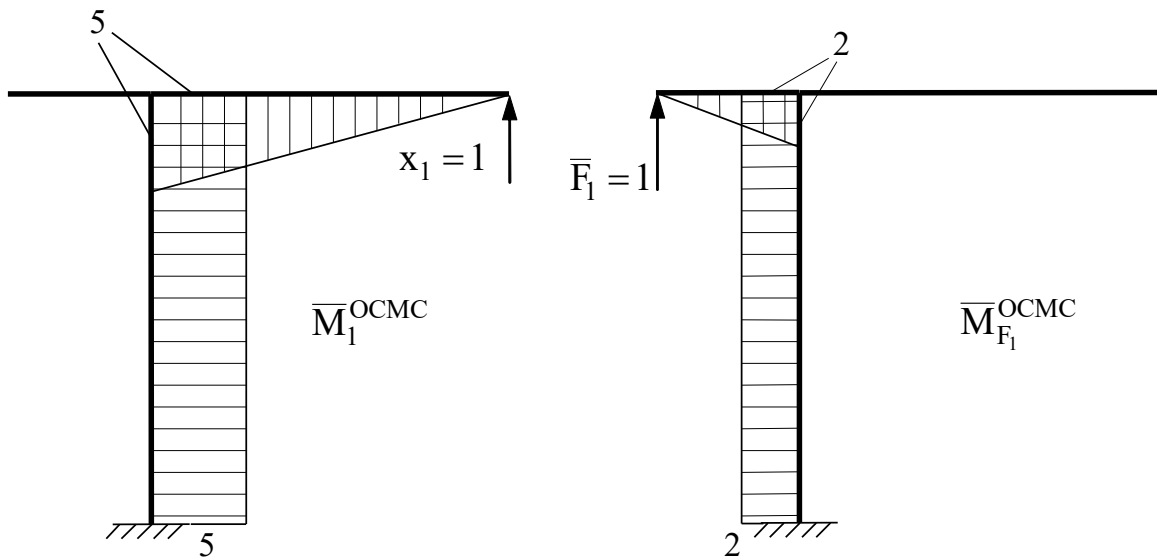


Рис. 44

$$\delta_{11}^1 = \sum \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{5 \times 5}{2} \times \frac{2}{3} + 5 \times 6 \times 5 \right) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{125}{3} + 150 \right) = \frac{575}{3EJ}.$$

$$\Delta_{1F}^1 = \sum \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_{F_1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \times \frac{6}{6} (-2 \times 2 \times 5 - 2 \times 5 \times 2 - 5 \times 2 - 5 \times 2) = -\frac{60}{EJ}$$

Решаем каноническое уравнение

$$\frac{575}{3EJ} \times X_1 - \frac{60}{EJ} = 0; \quad X_1 = \frac{180}{575} \times \frac{36}{115} = 0,098 \text{ кН.}$$

Строим эпюру моментов в заданной раме по формуле

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_1^{\text{OCMC}} \times X_1 + \bar{M}_{F_1}.$$

На рисунке 69 показана окончательная эпюра.

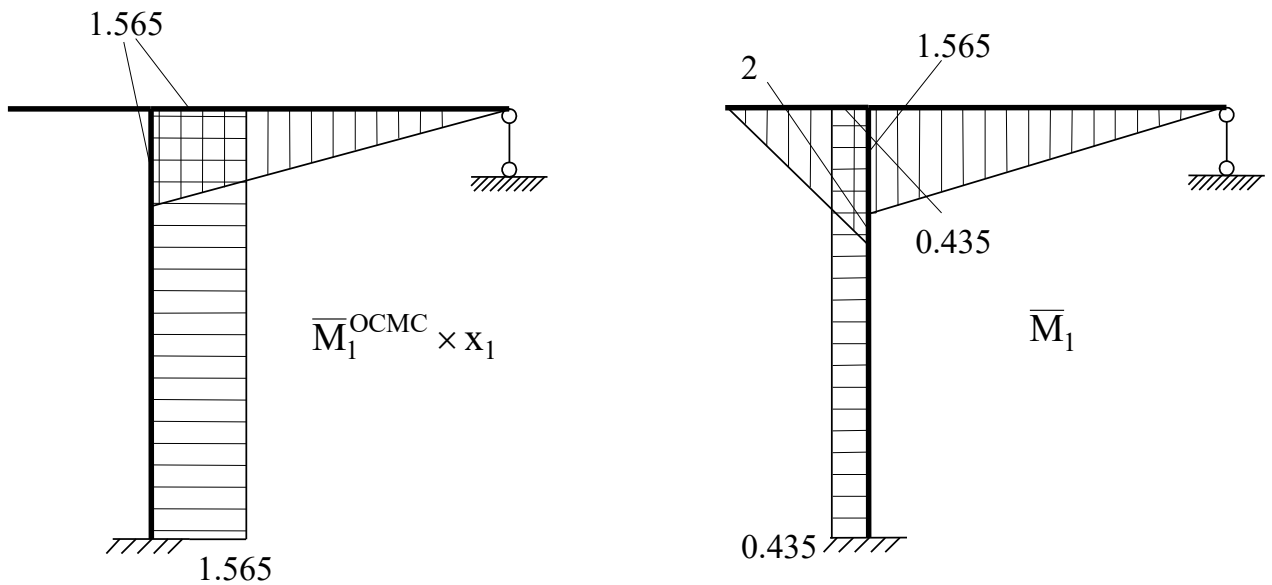


Рис. 45

Проверка равновесия в узле на эпюре моментов (см. Рис. 70).

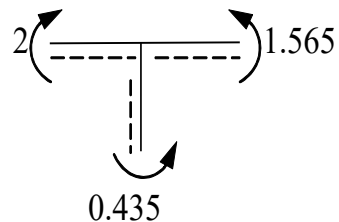


Рис. 46

$$\sum M_{y3} = 0; 2 - 1,565 - 0,435 = 0.$$

Кинематическая проверка.

$$\begin{aligned} \sum \frac{\bar{M}_1^{\text{ОСМС}} \times \bar{M}_1}{EJ} &= \frac{1}{EJ} \times \frac{5}{6} (2 \times 5 \times 1,565) + \\ &= \frac{1}{EI} \times \frac{6}{6} ((-2 \times 0,435 \times 5) - 2 \times 0,435 - 5 \times 0,435 - 5 \times 0,435) = \\ &= \frac{1}{EI} (13,04 - 13,05). \end{aligned}$$

Процент ошибки

$$\frac{13.04 - 13.05}{13.04} \times 100\% = 0.08\% < 1\%.$$

5. Построение эпюры  $\bar{M}_2$  ведем аналогично предыдущей.

$$\delta_{11}^2 \times X_1^2 + \Delta_{2F}^2 = 0.$$

Учитывая, что единичная эпюра в ОСМС для первой и второй задачи одинаковы, имеем  $\delta_{11}^1 = \delta_{11}^2$ .

На рисунке 71 показана эквивалентная система и грузовая эпюра.

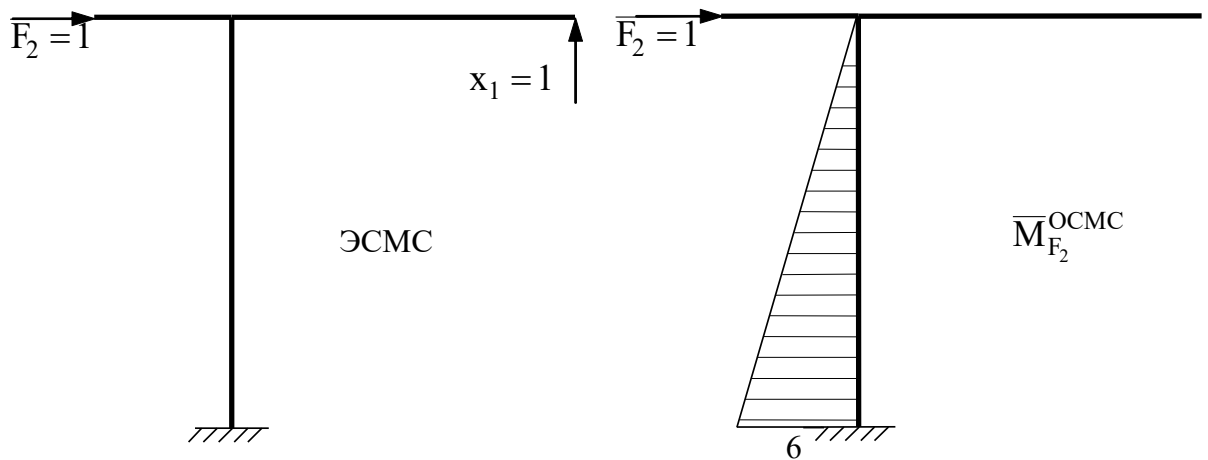


Рис. 47

Грузовой коэффициент

$$\Delta_{2F}^2 = \sum \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_{F_2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \times \frac{6}{6} (-2 \times 5 \times 6 - 6 \times 5) = -\frac{90}{EJ}.$$

$$\frac{575}{3EJ} \times X_1^2 - \frac{90}{EJ} = 0;$$

$$X_1^2 = \frac{270}{575} \times \frac{54}{115} = 0,2205 \text{ кН.}$$

Эпюру строим по формуле (см. Рис. 72)

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1^{\text{ОСМС}} \times X_1 + \bar{M}_{F_2}.$$

Кинематическая проверка:



$$\begin{aligned} \sum \frac{\bar{M}_1^{\text{OCMC}} \times \bar{M}_2}{EJ} &= \frac{1}{EJ} \times \frac{5}{6} (2 \times 5 \times 2,348) + \\ \frac{1}{EJ} \times \frac{6}{6} &((-2 \times 3,652 \times 5) + 2 \times 2,348 \times 5 + 5 \times 2,348 - 5 \times 3,652) = \\ &= \frac{1}{EJ} (54,79 - 54,79) = 0. \end{aligned}$$

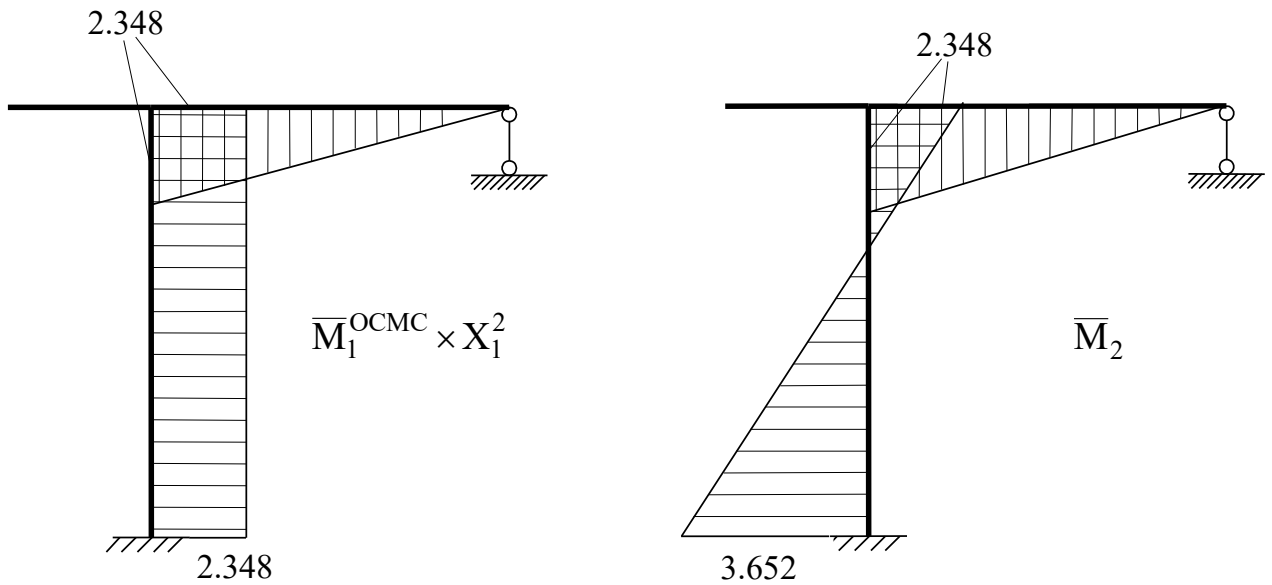


Рис. 48

6. Определение коэффициентов частотного определителя  $\delta_{11}$ ;  $\delta_{22}$ ;  $\delta_{12}$ ;  $\delta_{21}$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{5 \times 1,565}{2} \times \frac{2}{3} \times 1,565 \right) + \frac{1}{EJ} \left( \frac{2 \times 2}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 \right) + \\ &+ \frac{1}{EJ} (0,435 \times 6 \times 0,435) = \frac{1}{EJ} (4,082 + 2,667 + 1,135) = \frac{7,884}{EJ}. \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \frac{\bar{M}_2 \times \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{5 \times 2,348}{2} \times \frac{2}{3} \times 2,348 \right) +$$

$$\frac{1}{EJ} \times \frac{6}{6} (2 \times 2,348 \times 2,348 + 2 \times 3,652 \times 3,652 - 2,348 \times 3,652 - 3,652 \times 2,348) =$$

$$= \frac{9,187}{EJ} + \frac{20,55}{EJ} = \frac{29,737}{EJ}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\bar{M}_2 \times \bar{M}_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \times \frac{5}{6} (2 \times 1,562 \times 2,348) +$$

$$\frac{1}{EJ} \times \frac{6}{6} (2 \times 3,652 \times 0,435 - 2 \times 2,348 \times 0,435 - 2,348 \times 0,435 + 3,652 \times 0,435) =$$

$$= \frac{6,124}{EJ} + \frac{1,702}{EJ} = \frac{7,826}{EJ}.$$

7. Определение частоты основного тона свободных колебаний.

Введя обозначение  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ , раскроем частотный определитель

$$\lambda^2 - \lambda(\delta_{11} \times m_1 + \delta_{22} \times m_2) + \delta_{11} \times m_1 \times \delta_{22} \times m_2 - \delta_{12}^2 \times m_1 \times m_2 = 0.$$

Решение квадратного уравнения имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta_{11} \times m_1 + \delta_{22} \times m_2}{2} \pm \sqrt{(\delta_{11} \times m_1 - \delta_{22} \times m_2)^2 - 4\delta_{12}^2 \times m_1 \times m_2} =$$

$$= \frac{56,43m}{EJ} \pm \sqrt{\frac{10076m^2}{(EJ)^2}}.$$

$$\lambda_1 = \frac{56,43m}{EJ} + \sqrt{\frac{10076m^2}{(EJ)^2}} = \frac{56,43m}{EJ} + \frac{100,4m}{EJ} = \frac{156,8m}{EJ}.$$

$$\lambda_2 = \frac{56,43m}{EJ} - \sqrt{\frac{10076m^2}{(EJ)^2}} = \frac{56,43m}{EJ} - \frac{100,4m}{EJ} = -\frac{43,97m}{EJ}.$$

Отбросив отрицательные корни, получаем

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{156,8m}{EJ}}} = 0,077 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Собственная частота колебаний

$$\omega = 0,077 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

### 2.3.2 Расчет рамы на динамическую нагрузку

По результатам приведенного выше расчета принимаем частоту вынуждающей нагрузки на 40% ниже собственной частоты колебаний, чтобы избежать резонанса

$$\Theta = 0,6\omega = 0,0462 \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

1. Количество степеней свободы определялось выше  $n_{CB}=2$ .
2. Система уравнений, описывающая гармонические колебания рамы, записанная в форме метода сил

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12}^* \times \mathfrak{T}_1 + \delta_{12} \times \mathfrak{T}_2 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \times \mathfrak{T}_1 + \delta_{22}^* \times \mathfrak{T}_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

3. Коэффициенты канонического уравнения находим, используя результаты предыдущего раздела, по формулам

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \times \Theta^2} = \frac{7,884}{EJ} - \frac{1}{3m \times 0,002 \frac{EJ}{m}} = \frac{7,884}{EJ} - \frac{1}{0,006EJ} = -\frac{158,8}{EJ}$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_1 \times \Theta^2} = \frac{29,737}{EJ} - \frac{1}{3m \times 0,002 \frac{EJ}{m}} = \frac{29,737}{EJ} - \frac{1}{0,006EJ} = -\frac{136,9}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{22} = \frac{7,826}{EJ}.$$

4. Для определения грузовых коэффициентов  $\Delta_{iF}$  строим грузовую эпюру (см. Рис.73).

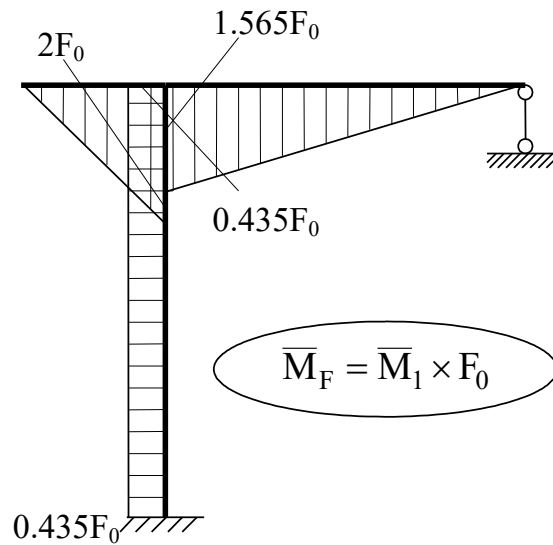


Рис. 49

Тогда коэффициенты определяются как

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_F}{EJ} = \sum \frac{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1 \times F_0}{EJ} = \delta_{11} \times F_0 = \frac{7,884}{EJ} F_0.$$

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{\bar{M}_2 \times \bar{M}_F}{EJ} = \sum \frac{\bar{M}_2 \times \bar{M}_1 \times F_0}{EJ} = \delta_{12} \times F_0 = \frac{7,826}{EJ} F_0.$$

5. Определение амплитудных значений динамических сил  $\mathfrak{S}_1$  и  $\mathfrak{S}_2$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1587,8}{EJ} \times \mathfrak{S}_1 + \frac{7,826}{EJ} \times \mathfrak{S}_2 + \frac{7,884}{EJ} F_0 &= 0, \\ \frac{7,826}{EJ} \times \mathfrak{S}_1 - \frac{136,9}{EJ} \times \mathfrak{S}_2 + \frac{7,826}{EJ} F_0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} -158,8 \times \mathfrak{S}_1 + 7,826 \times \mathfrak{S}_2 &= -7,884 F_0, \\ 7,826 \times \mathfrak{S}_1 - 136,9 \times \mathfrak{S}_2 &= -7,826 F_0. \end{aligned} \right\}$$

Решив систему, получаем

$$\mathfrak{S}_2 = 0.06 F_0, \quad \mathfrak{S}_1 = 0.0526 F_0.$$

6. Построение эпюры динамических изгибающих моментов ведем по формуле

$$M_g = \bar{M}_1 \times \mathfrak{S}_1 + \bar{M}_2 \times \mathfrak{S}_2 + M_{F_0}.$$

Первое и второе слагаемые показаны на Рис. 74.

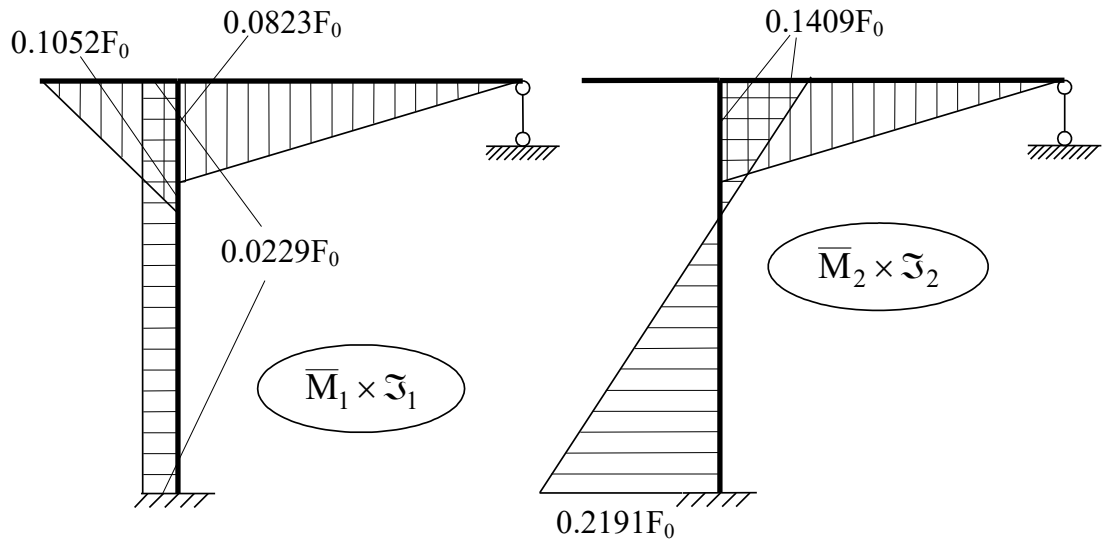


Рис. 50

Эпюра динамических моментов в раме показана на Рис. 75

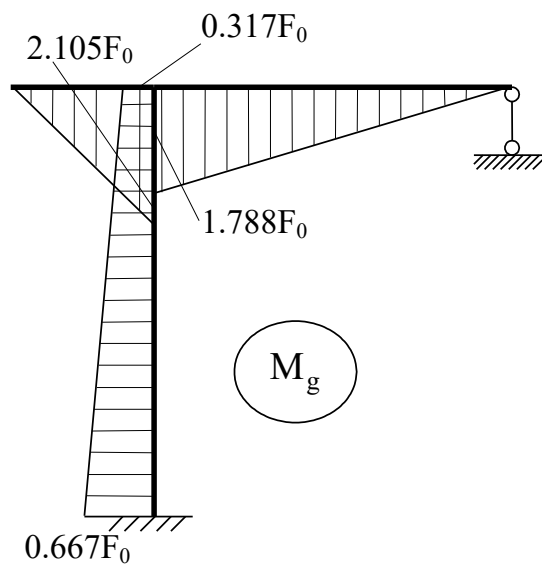


Рис. 51

## 2.4 Расчет несвободной рамы на устойчивость

Задача № 8 переписывается из Приложения № 4. Для заданной рамы (Рис. 61) требуется:

1. выбрать основную систему и записать уравнения устойчивости в форме метода перемещений;
2. построить единичные эпюры моментов с учётом влияния продольных сил;
3. определить коэффициенты векового уравнения и вычислить значение критической силы.

По заданию моменты инерции горизонтальных стержней приняты  $J_1$ , вертикальных -  $J_2$ . Для заданного отношения вычислены моменты инерции, показанные на рисунке 76.

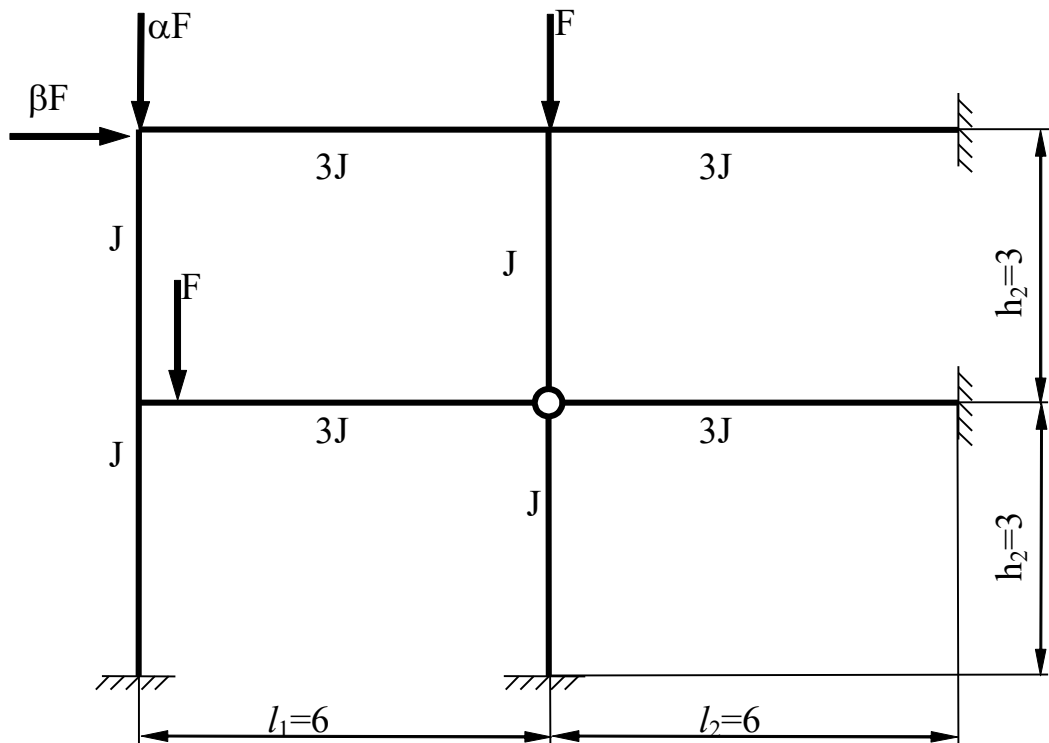


Рис. 52

Решение

1. Вычисляем степень кинематической неопределимости  $n = n_y + n_J = 0 + 2 = 2$ .
2. Выбираем основную систему метода перемещений ОСМП, и эквивалентную систему метода перемещений ЭСМП (см. Рис. 77).

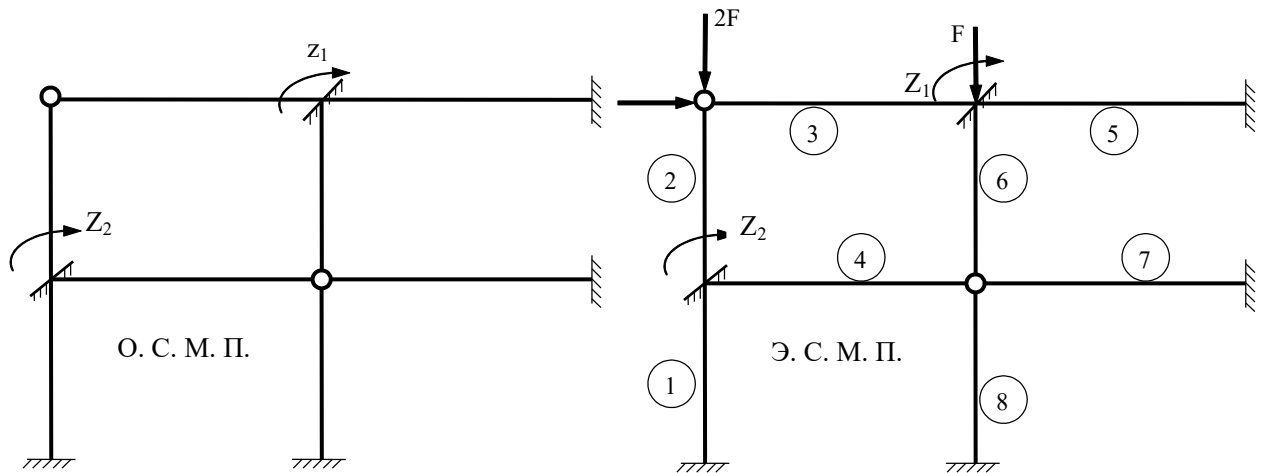


Рис. 53

## 3. Записываем определитель устойчивости

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad r_{11} \times r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

## 4. Строим единичные эпюры с помощью таблиц приложения 3.

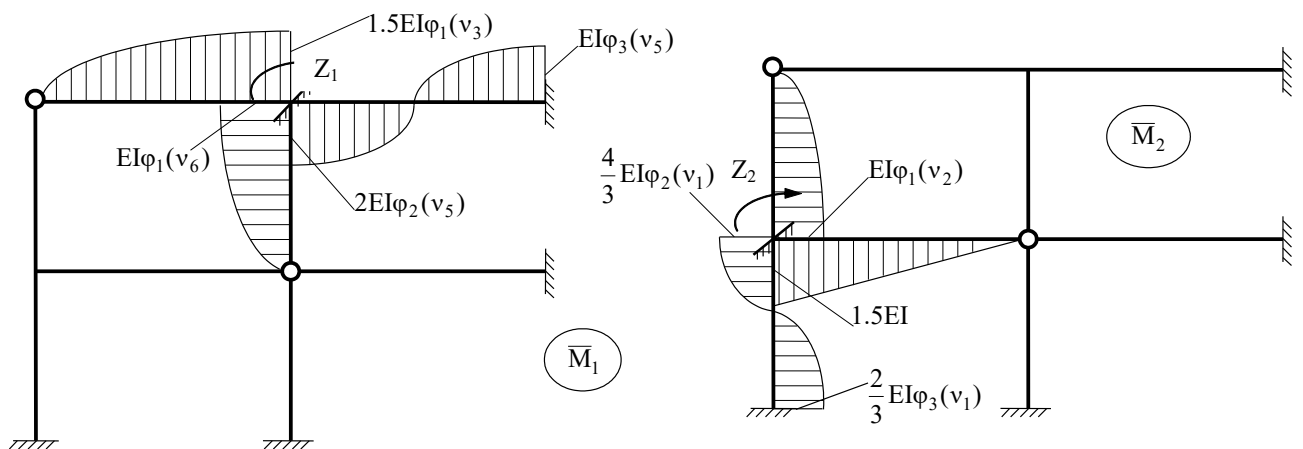


Рис. 54

5. Определение коэффициентов  $r_{ij}$  частотного определителя  
Коэффициент  $r_{11}$  находим из условия равновесия узла (см. Рис. 79)

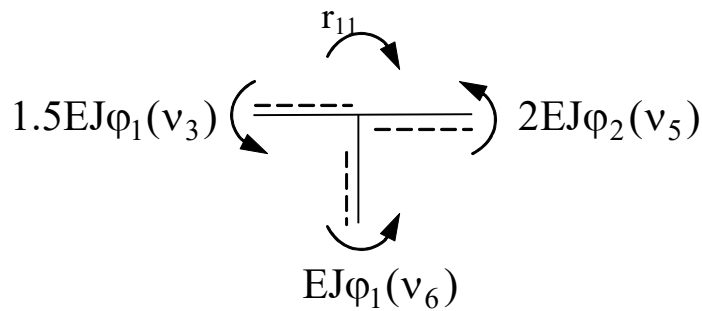


Рис. 55

$$r_{11} = 2EJ\varphi_2(v_5) + EJ\varphi_1(v_6) + 1.5EJ\varphi_1(v_3).$$

Коэффициент  $r_{22}$

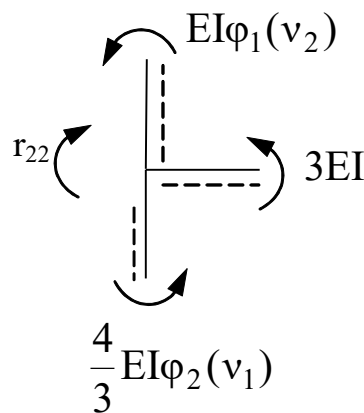


Рис. 56

$$r_{22} = EJ\varphi_1(v_2) + 3EJ + \frac{4}{3}EJ\varphi_2(v_1).$$

$$r_{12} = r_{21} = 0.$$

Подставив коэффициенты в уравнение устойчивости

$$(2EJ\varphi_2(v_5) + EJ\varphi_1(v_6) + 1.5EJ\varphi_1(v_3)) \times (EJ\varphi_1(v_2) + 3EJ + \frac{4}{3}EJ\varphi_2(v_1)) = 0$$

6. Определение коэффициентов векового уравнения ведем методом итераций. Величина параметра определяется формулой

$$v = l \times \sqrt{\frac{F_{cr}}{EJ}}.$$

Находим соотношения между параметрами

$$v_1 = 3 \times \sqrt{\frac{3F}{EJ}} = 5,2 \times \sqrt{\frac{F}{EJ}}, \quad v_5 = 6 \times \sqrt{\frac{F}{3EJ}} = 3,46 \times \sqrt{\frac{F}{EJ}},$$



$$v_2 = 3 \times \sqrt{\frac{2F}{EJ}} = 4,24 \times \sqrt{\frac{F}{EJ}}, \quad v_6 = 3 \times \sqrt{\frac{F}{3EJ}},$$

$$v_3 = 6 \times \sqrt{\frac{F}{3EJ}} = 3,46 \times \sqrt{\frac{F}{EJ}}.$$

Тогда

$$\frac{v_2}{v_1} = 0,82; \quad v_2 = 0,82v_1,$$

$$\frac{v_3}{v_1} = 0,67; \quad v_3 = 0,67v_1,$$

$$\frac{v_5}{v_1} = 0,67; \quad v_5 = 0,67v_1.$$

$$\frac{v_6}{v_1} = 0,58; \quad v_6 = 0,58v_1.$$

Уравнение приобретает вид

$$(2EJ\varphi_2(0,67v_1) + EJ\varphi_1(0,58v_1) + 1,5EI\varphi_1(0,67v_1)) \times$$

$$\times (EJ\varphi_1(0,82v_1) + 3EJ + \frac{4}{3}EI\varphi_2(v_1)) = 0.$$

Или

$$(2\phi_2(0,67v_1) + \phi_1(0,58v_1) + 1,5\phi_1(0,67v_1)) \times (\phi_1(0,82v_1) + 3 + \frac{4}{3}\phi_2(v_1)) = 0$$

Первая итерация. Принимаем  $v_1 = 6,0$ . По таблице находим

$$\varphi_2(4,0) = 0,2933, \quad \varphi_1(3,5) = -0,4894, \quad \varphi_1(4,0) = -2,1726,$$

$$\varphi_1(4,9) = 4,1463, \quad \varphi_2(6,0) = -5,1589.$$

Вычисляем навязку на первой итерации

$$\Delta_1 = (2 \times 0,2933 - 0,4894 - 1,5 \times 2,1726) \times (4,1463 + 3 - \frac{4}{3} \times 5,1589) -$$

$$- 3,16 \times 0,27 = -0,85.$$

Принимаем на второй итерации  $v_1 = 6,1$ . По таблице приложения 3 находим

$$\varphi_2(4,1) = 0,2424, \quad \varphi_1(3,5) = -0,4894, \quad \varphi_1(4,1) = -2,9806,$$

$$\varphi_1(5,0) = 3,3615, \quad \varphi_2(6,1) = -8,2355.$$

Невязка на второй итерации

$$\Delta_2 = (2 \times 0,2424 - 0,4894 - 1,5 \times 2,9806) \times (3,3615 + 3 - \frac{4}{3} \times 8,2355) =$$

$$= -4,48 \times (-4,26) = +20,69.$$

Строим график невязок (см. Рис. 81).

7. Вычисление значения критической силы по формуле

$$v = l \times \sqrt{\frac{F_{cr}}{EJ}}.$$

Получаем

$$F = \frac{36EJ}{27,04} = 1,33EJ.$$

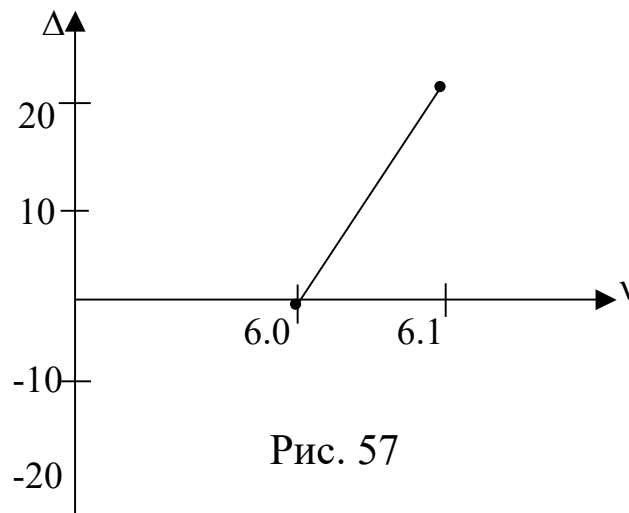


Рис. 57

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Ступишин Л.Ю., Трушин С.И. Строительная механика плоских стержневых систем: Учеб. Пособие.-2 е изд./ Под ред. С.И.Трушина. – М.: ИНФРА-М, 2014. -278с.
2. Леонтьев, Н.Н. Строительная механика [Текст]: учебник / Н.Н. Леонтьев; Изд. АСВ, Москва, 1999. 506 с.
3. Саргсян, А.Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов [Текст]: учебник/ А.Е. Саргсян, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчвелашвили; Под ред. А.Е. Саргсяна, Высш. шк., Москва. 2000. 235с.
4. Дарков, А.В. Строительная механика [Текст]: учебник/ А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников; Высшая школа, Москва. 1986. 607 с.
5. Строительная механика. Стержневые системы [Текст]: учебник /Под общей редакцией А.Ф. Смирнова, Стройиздат, Москва, 1981. 512 с.
6. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем /Под общей редакцией Г.К. Клейна; Высшая школа, Москва, 1980. 384 с.
7. . Анохин Н.Н Строительная механика в примерах и задачах. Часть 1. Статически определимые системы: Учеб. Пос. – М: Изд-во АСВ, 2000. -334 с.
8. . Анохин Н.Н Строительная механика в примерах и задачах. Часть 2. Статически неопределимые системы: Учеб. Пос. – М: Изд-во АСВ, 2000. -464 с.

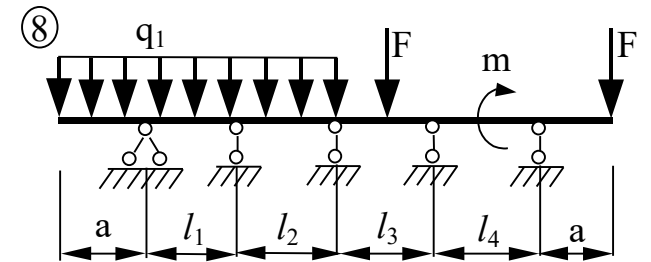
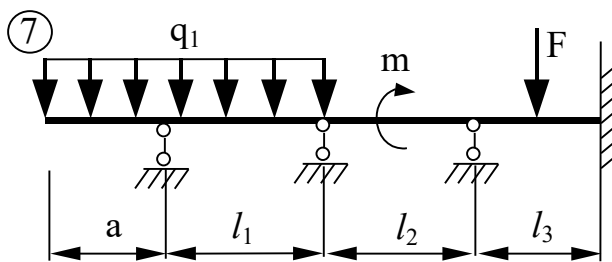
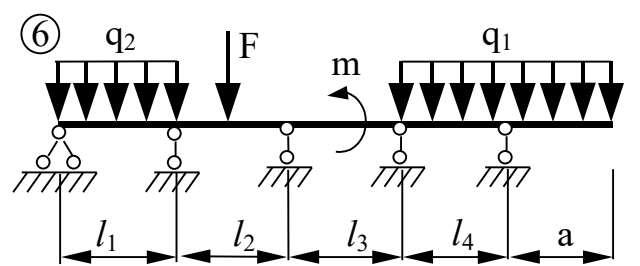
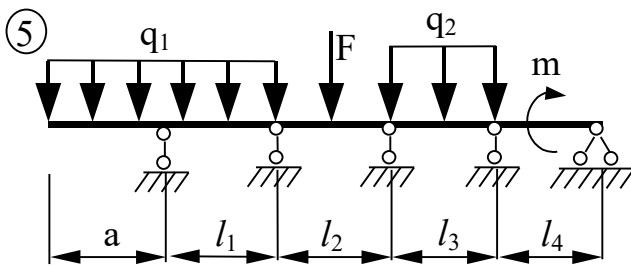
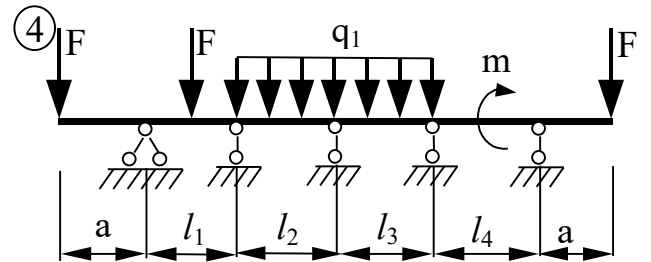
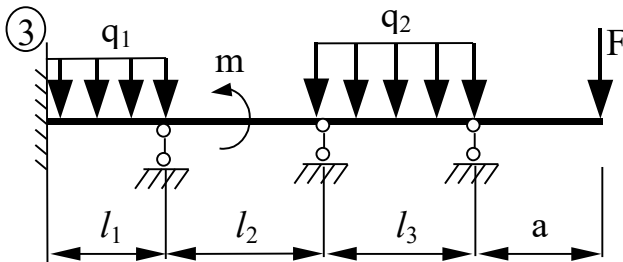
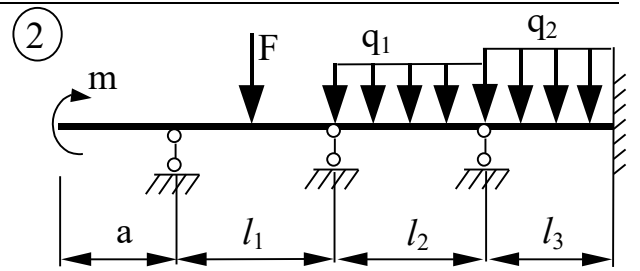
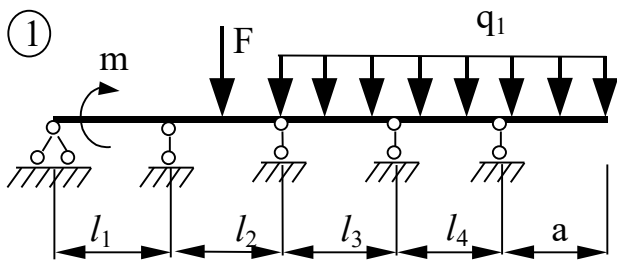
## Задача № 5. Расчет неразрезной балки

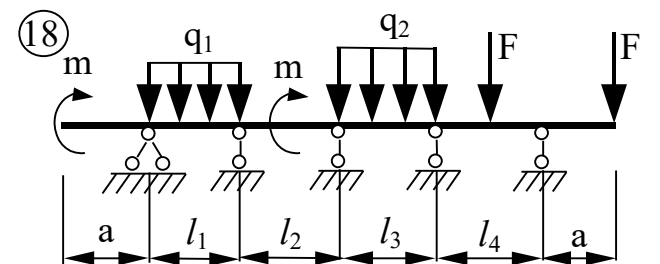
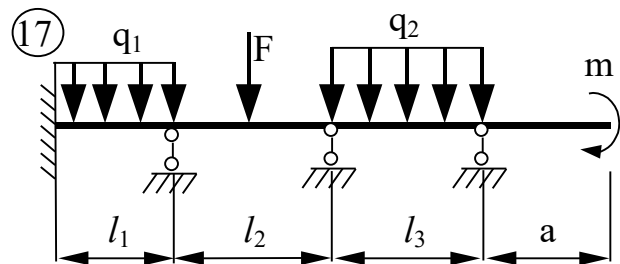
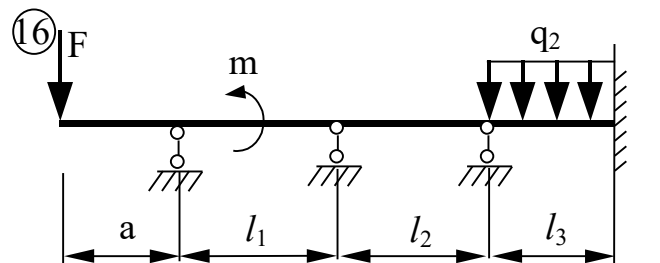
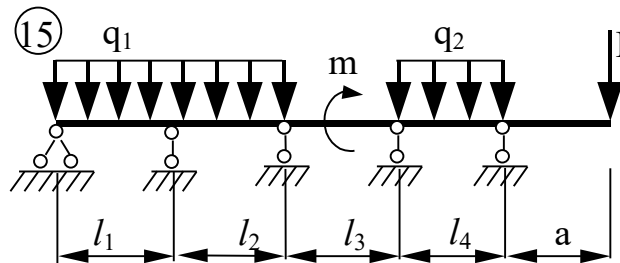
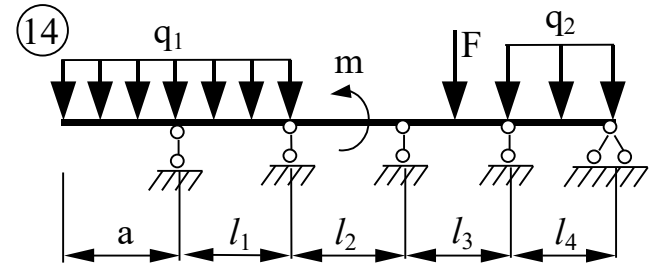
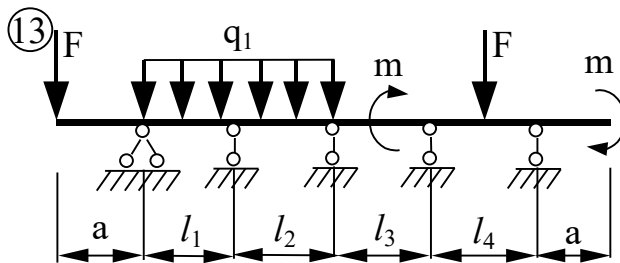
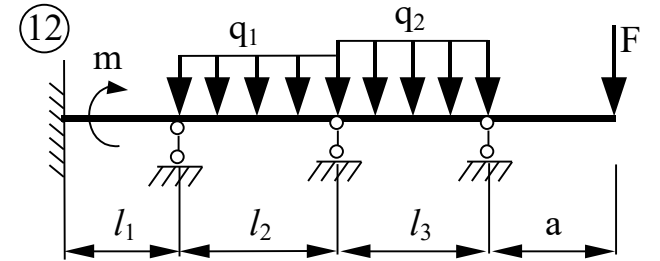
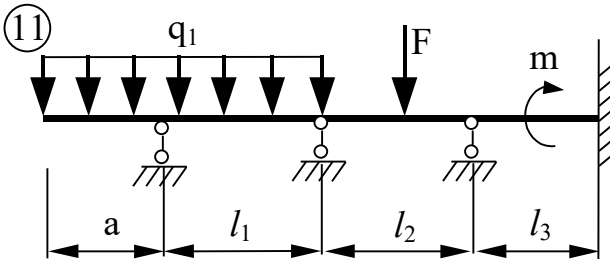
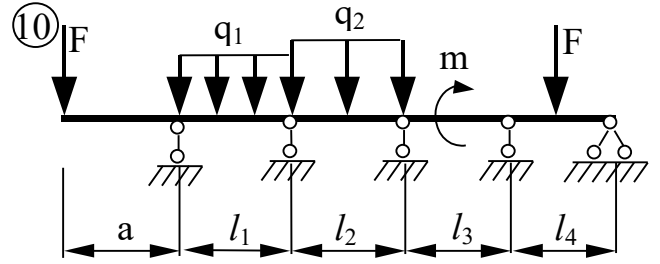
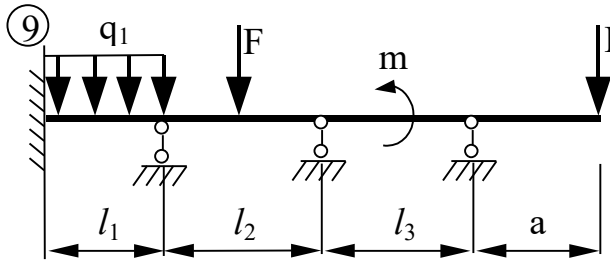
1. С помощью уравнения трех моментов найти опорные моменты и построить эпюры  $M$  и  $Q$  от постоянной нагрузки, распределенной по всей балке. Принять постоянную нагрузку, равной  $q_1$ .
2. Найти фокусные отношения и построить эпюры  $M$  и  $Q$  от последовательного нагружения каждого пролета в отдельности заданной временной нагрузкой.
3. Построить объемлющие эпюры моментов в одном из пролетов балки.

ТАБЛИЦА № 3

Номер по журналу + шифр группы	Длина пролетов, м				Длина консоли, d м	Относительные величины моментов инерции для пролетов				Временные нагрузки			
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$		$\frac{J_1}{J_0}$	$\frac{J_2}{J_0}$	$\frac{J_3}{J_0}$	$\frac{J_4}{J_0}$	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м	F кН	m кН·м
	1	6	4	6		5	1,8	1,5	1,0	1,5	1,0	1,0	0
2	6	3	4	5	1,0	2,5	2,0	3,0	1,0	1,0	0	0	2,6
3	3	4	6	6	1,5	1,0	2,0	2,0	1,0	0,8	1,2	0	0
4	6	2	6	3	1,5	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0	0	12	0
5	5	6	5	6	1,0	2,0	3,0	3,0	2,0	1,0	2,0	0	0
6	4	6	6	5	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,0	0	11	0
7	6	3	5	6	1,0	2,0	1,0	2,0	1,5	1,5	2,0	0	0
8	5	6	3	4	1,5	1,5	1,5	2,0	1,5	1,5	0	0	2,0
9	5	6	6	4	1,5	1,0	2,0	1,2	1,0	1,0	0	13	0
10	6	5	5	6	1,0	0,8	1,2	1,0	1,0	1,0	2,0	0	0
11	5	5	8	7	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	2,0	0	0	2,0
12	4	6	6	5	1,0	0,5	2,0	2,0	2,0	1,0	0	14	0
13	3	6	4	3	2,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	0	0
14	4	5	5	4	1,6	2,0	1,8	1,0	1,5	0,8	0	16	0
15	5	4	4	3	1,5	1,5	1,5	1,0	1,0	1,5	1,0	0	0
16	6	4	4	5	0,8	0,8	2,0	3,0	0,5	0,5	0	18	0

17	3	6	5	3	0,5	1,0	2,0	1,0	2,0	1,8	1,0	0	0
18	5	6	2	4	2,0	2,5	1,0	2,0	1,5	1,0	0	1,0	0
19	4	5	3	6	1,0	1,0	3,0	1,6	0,8	0,6	1,2	0	0
20	6	4	4	5	1,8	1,5	0,5	3,0	1,0	2,0	0	16	0
21	4	5	4	6	1,0	2,0	1,6	1,0	1,0	1,5	2,0	0	0
22	5	4	3	6	1,2	1,0	2,0	2,0	2,0	1,2	0	0	2,0
23	3	5	3	5	1,5	2,5	2,0	1,5	0,5	1,0	0	14	0
24	6	4	4	6	2,0	2,0	0,5	0,5	2,0	2,0	1,8	0	0
25	3	5	4	6	1,0	1,0	2,0	0,5	1,0	1,5	0	5	0





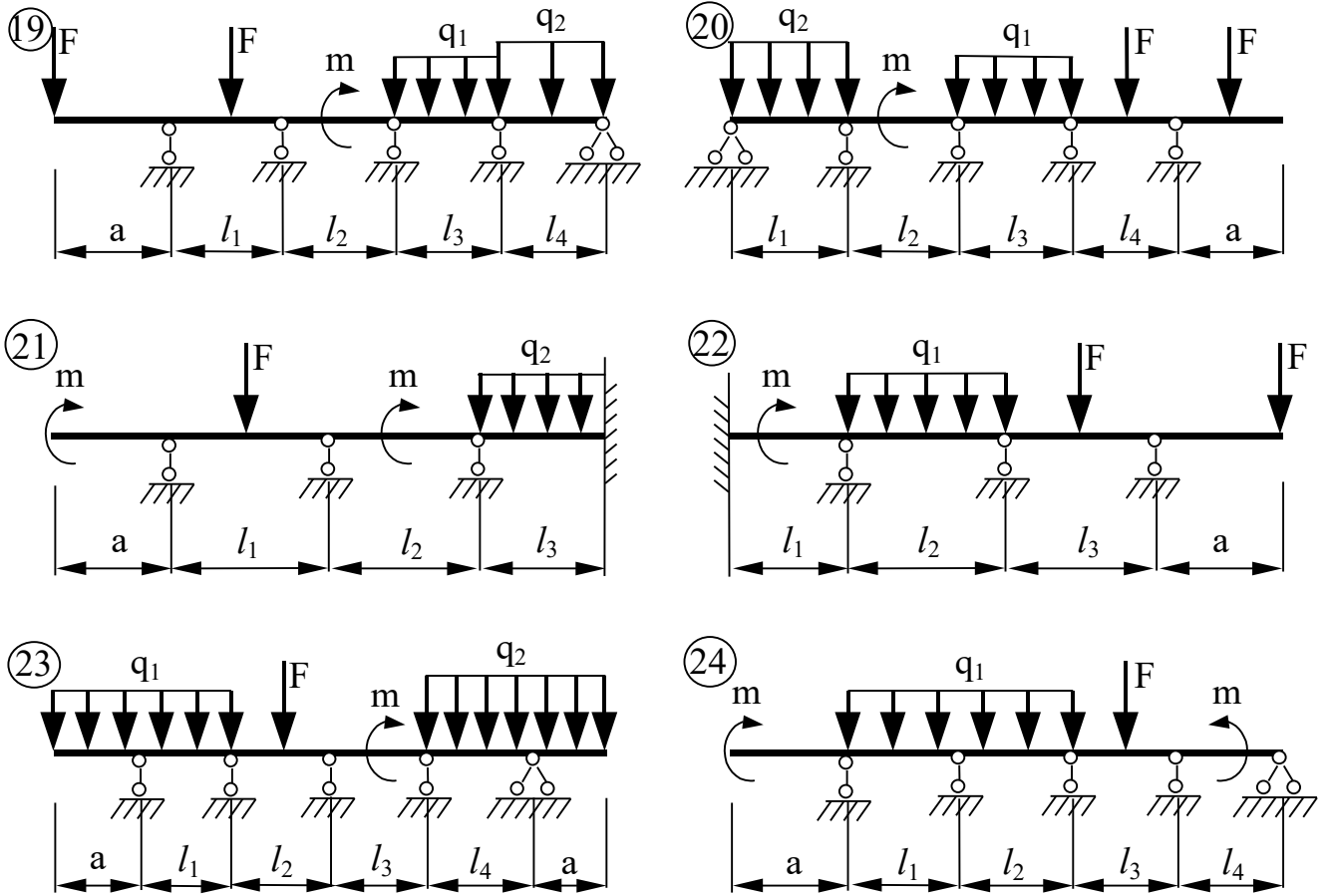


Рис. 58

### Задача № 6. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Для заданной рамы требуется:

1. провести расчет рамы методом перемещений на заданную нагрузку и построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ;
2. выполнить статическую проверку эпюр.

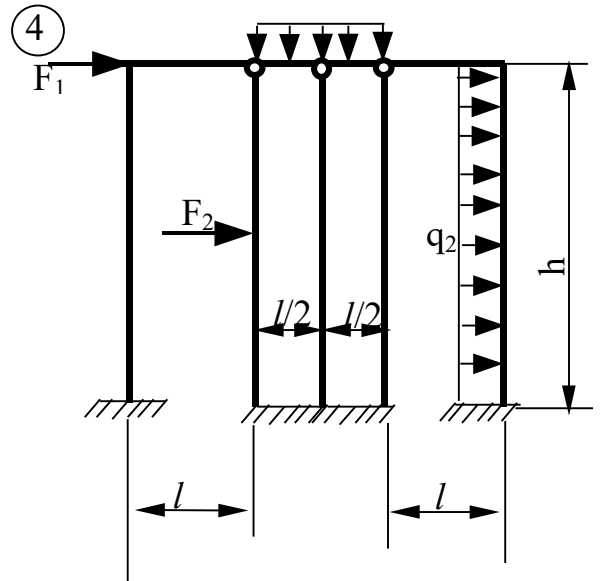
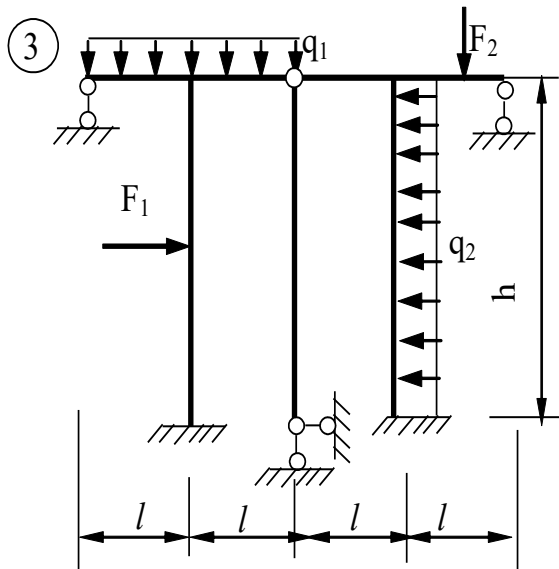
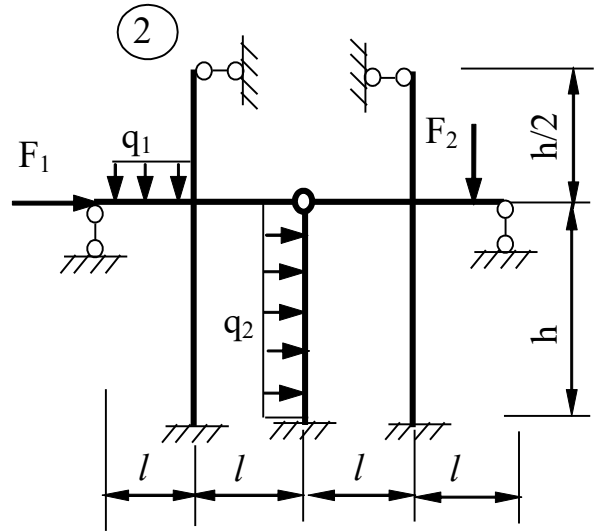
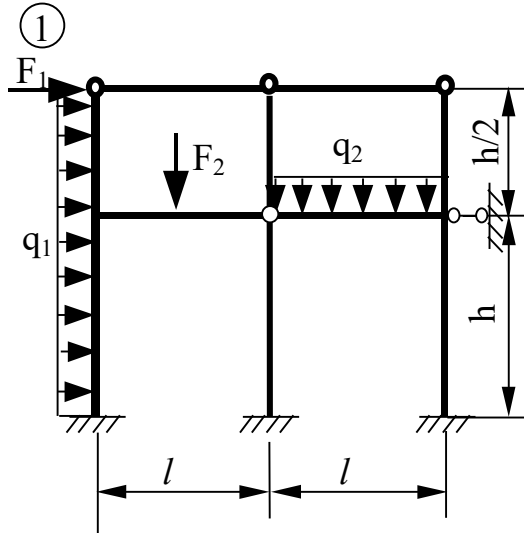
Примечание: моменты инерции стержней с горизонтальной и наклонной осями обозначены  $J_1$ , а стержней с вертикальной осью -  $J_2$

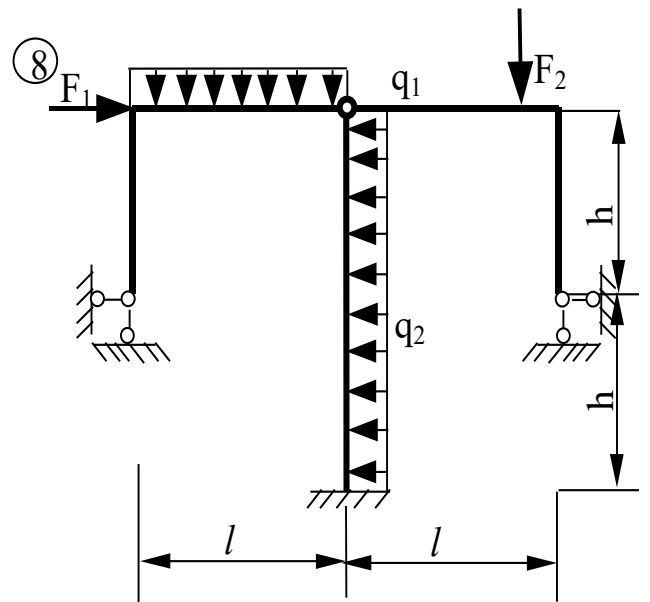
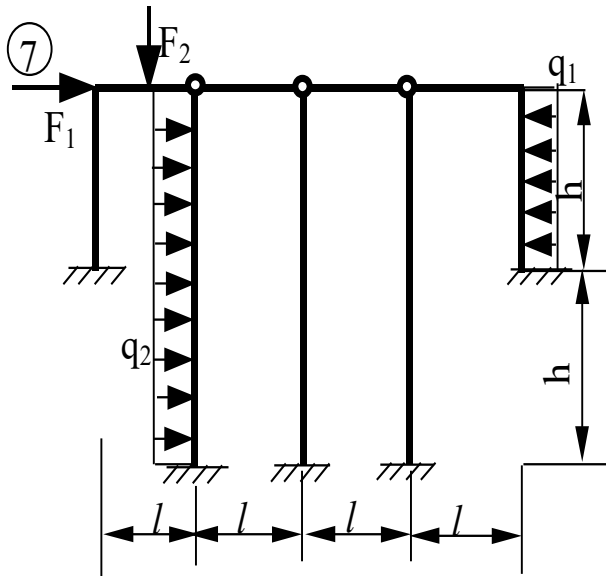
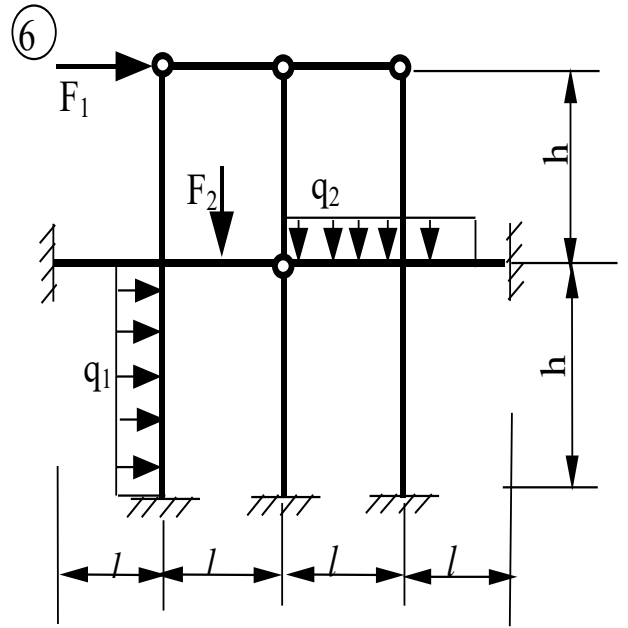
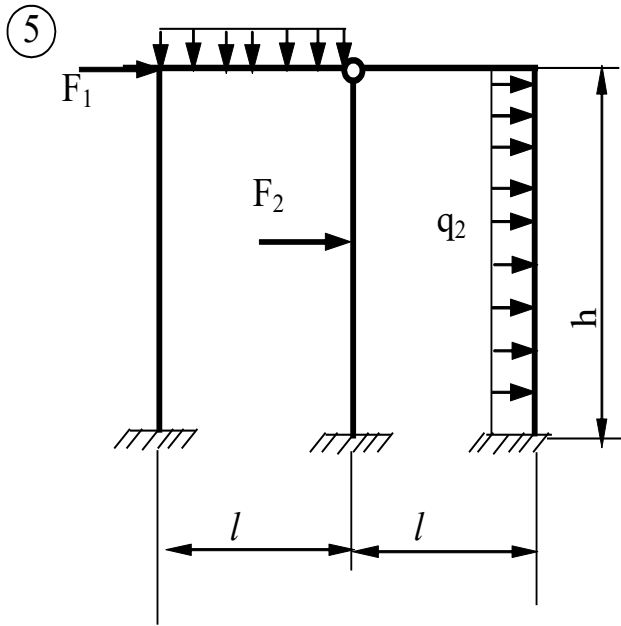
ТАБЛИЦА № 4

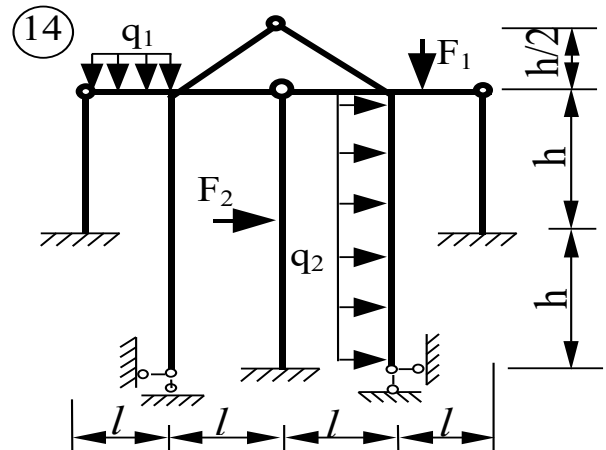
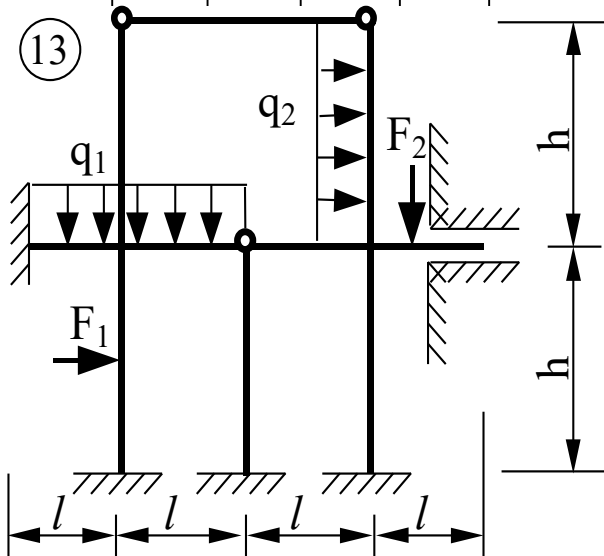
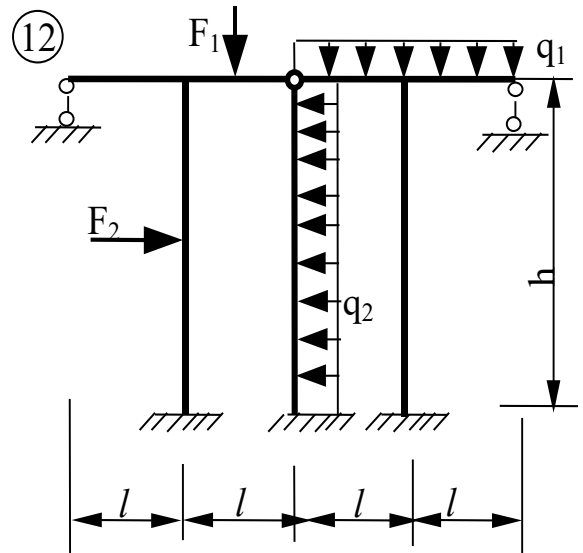
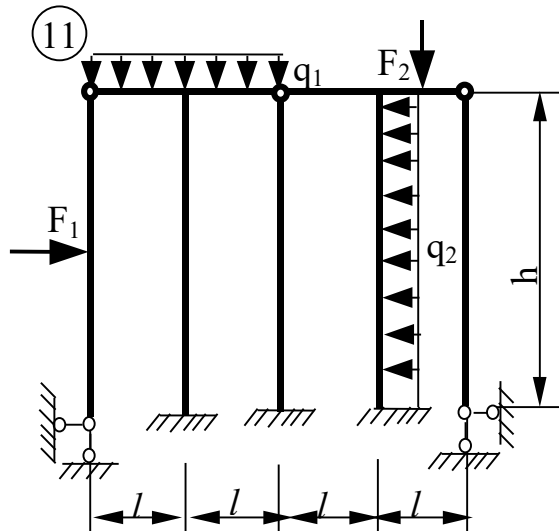
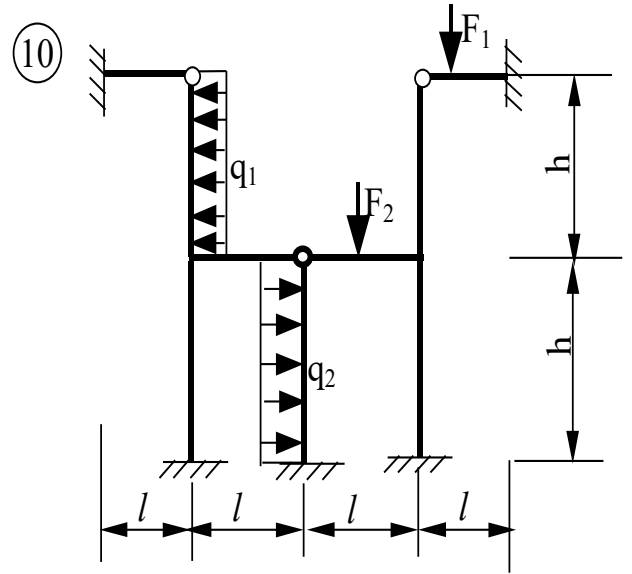
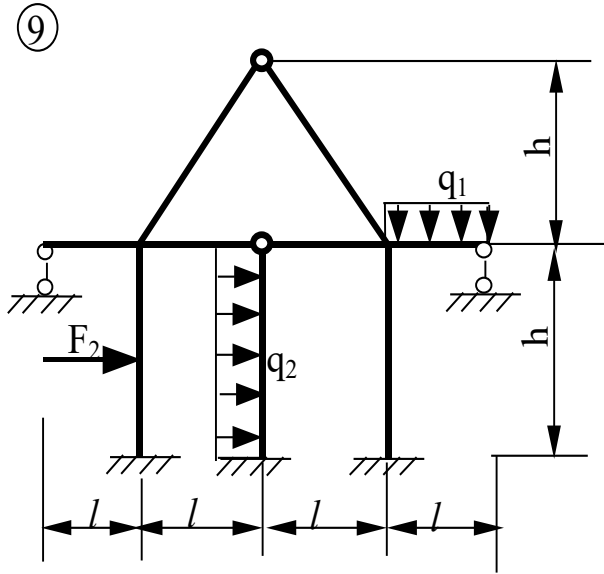
Номер по списку + шифр группы	$l$ м	$h$ м	$\frac{J_1}{J}$	$\frac{J_2}{J}$	$F_1$ кН	$F_2$ кН	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м
1	6	4	2	1	14	0	1	0
2	3	6	2	3	0	13	0	0,5
3	4	6	4	2	16	0	1	0
4	3	5	1	2	0	12	0	1
5	6	5	3	2	15	0	2	0
6	4	6	3	4	0	16	0	0,5
7	5	4	3	2	13	0	1	0
8	5	6	2	3	0	14	0	1
9	4	5	3	2	8	0	0,5	0
10	6	4	4	2	0	15	0	1
11	5	4	2	3	15	0	0,6	0
12	3	4	5	3	0	8	0	1,2
13	5	6	1	3	8	0	1,5	0
14	4	5	3	2	0	15	0	0,5
15	6	4	4	1	14	0	1	0
16	3	5	2	3	0	14	0	0,5
17	6	6	3	2	14	0	0,8	0
18	6	3	2	4	0	16	0	1,5
19	5	4	3	2	12	0	1,2	0
20	3	6	3	2	0	13	0	1,2

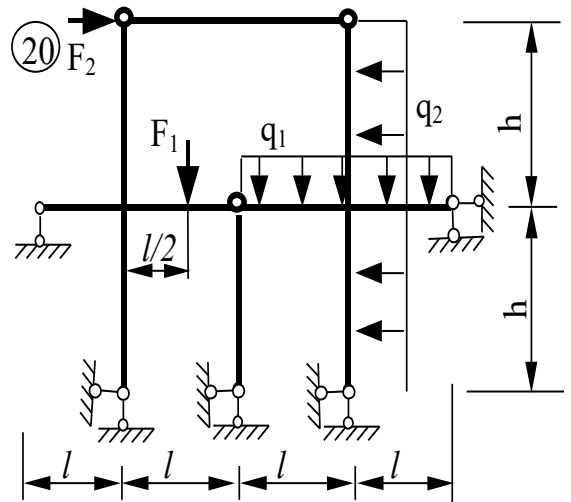
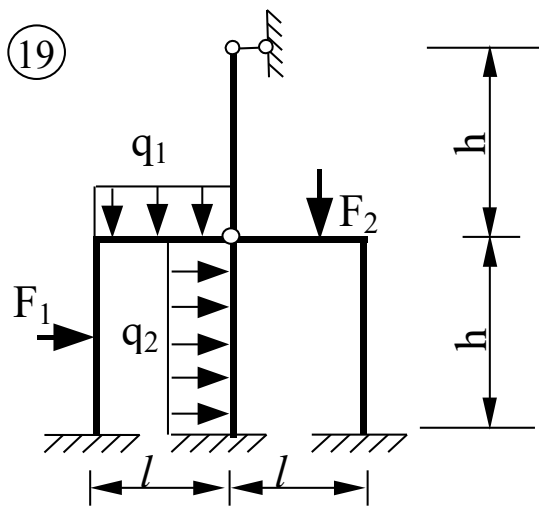
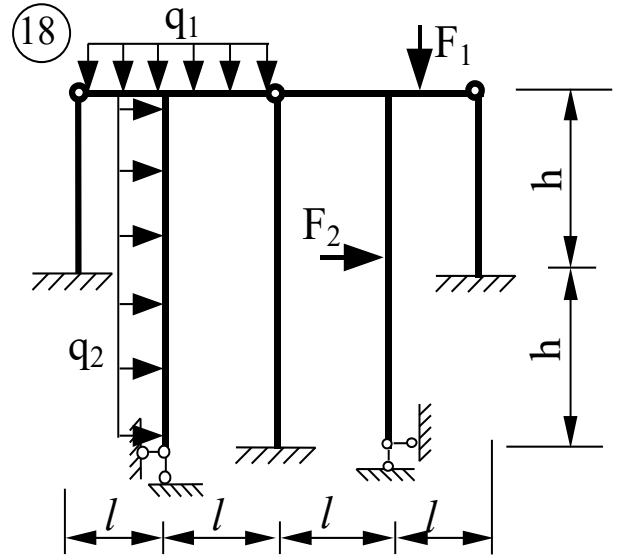
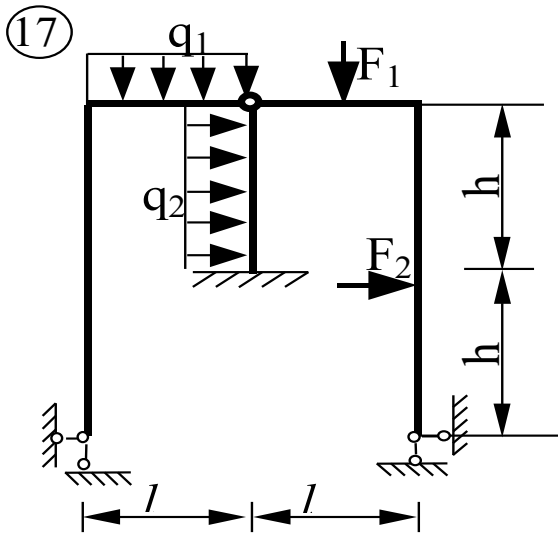
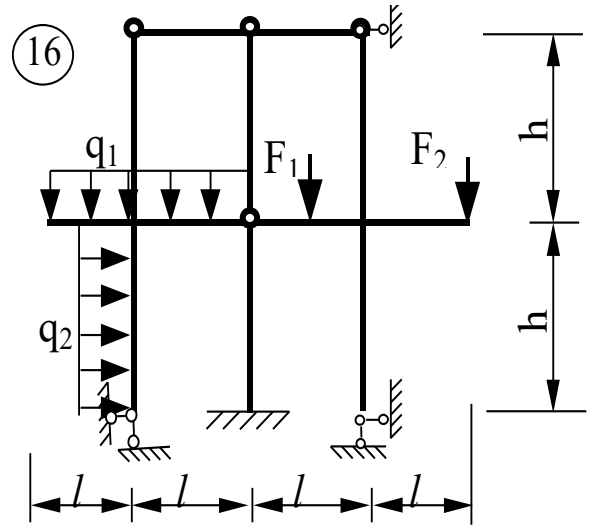
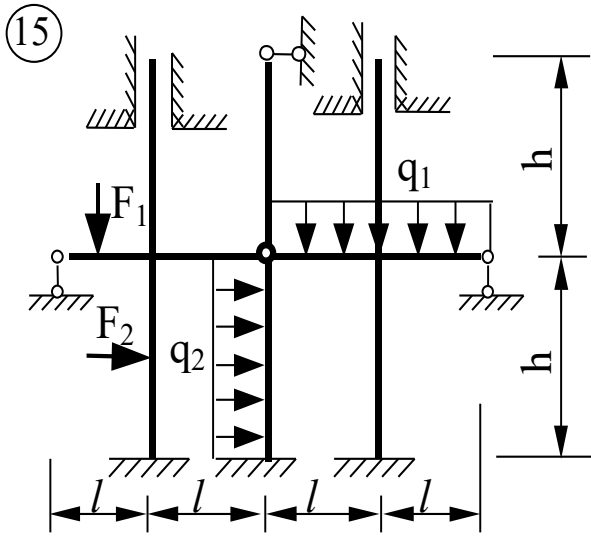


21	5	6	3	1	12	0	1,3	0
22	4	5	2	5	0	15	0	0,5
23	6	3	2	3	14	0	2	0
24	4	5	3	2	11	0	0	0,8
25	4	6	5	2	0	14	1,4	0









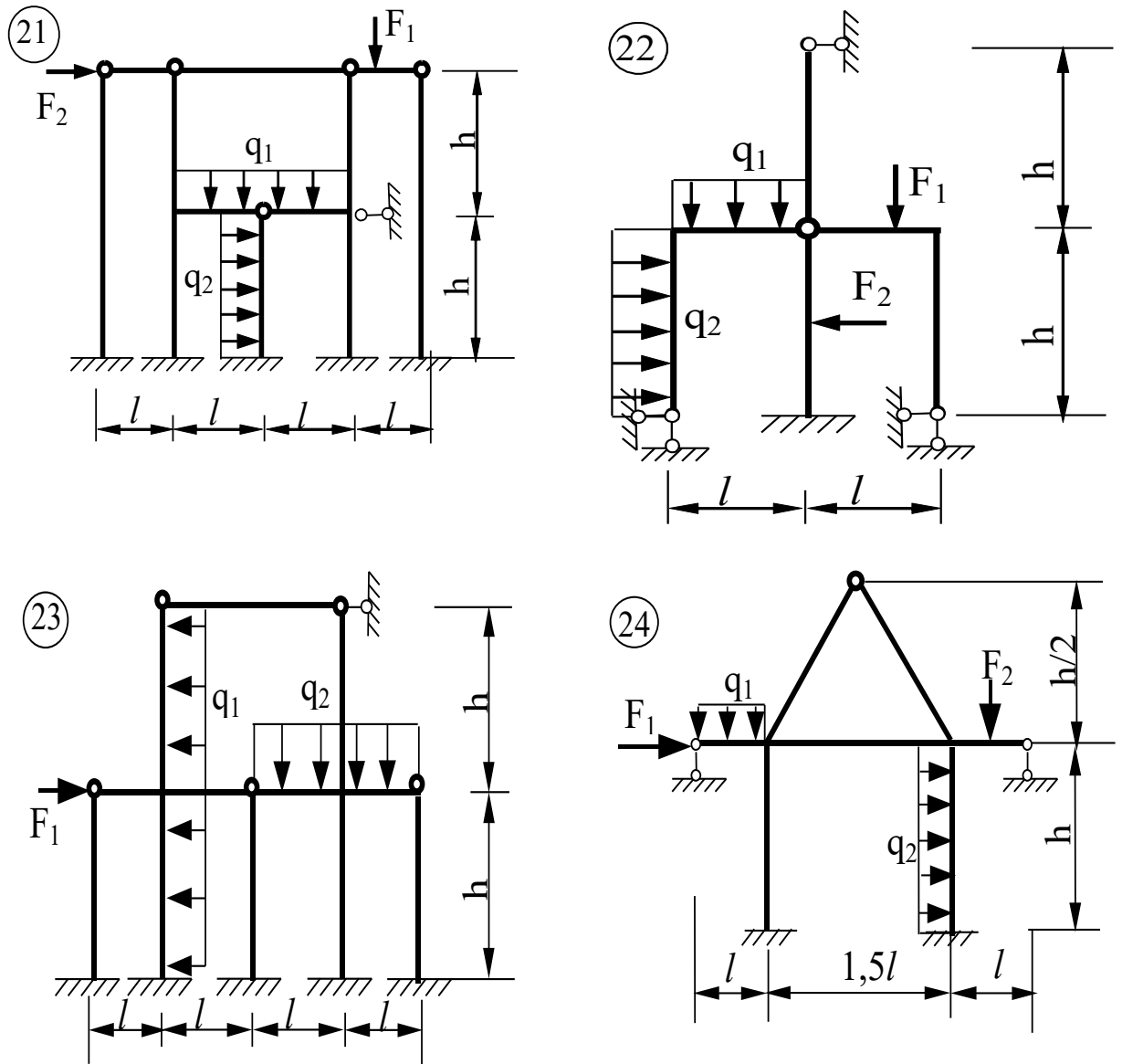


Рис. 59

## Задача № 7. Динамический расчет рамы

Для заданной рамы:

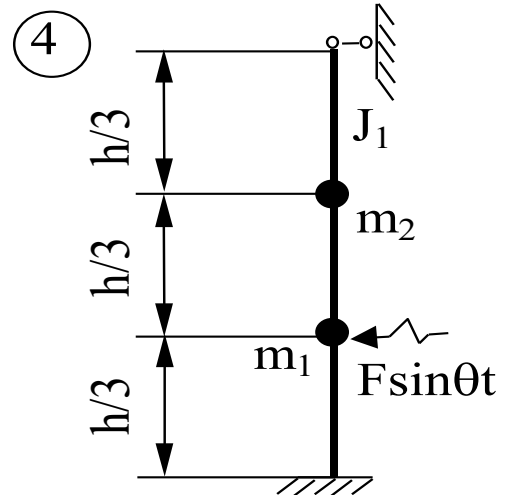
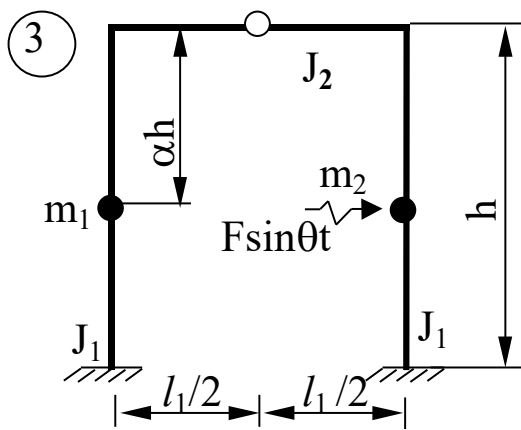
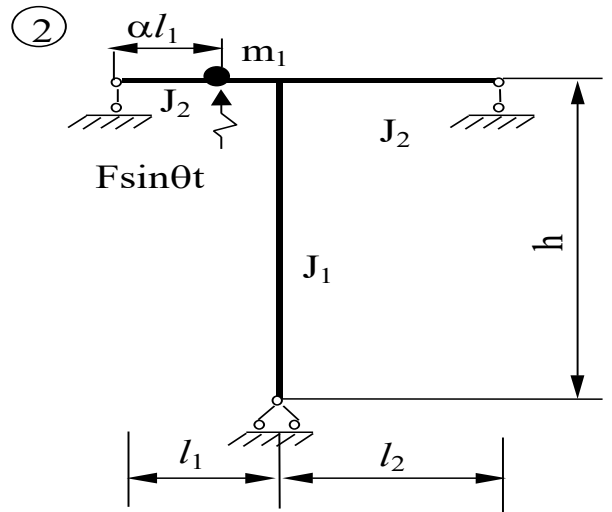
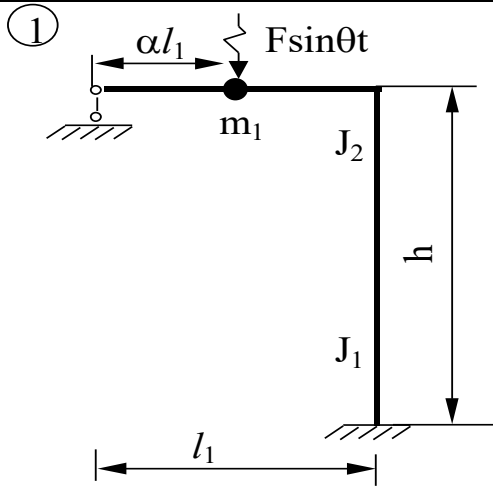
1. определить частоты собственных колебаний масс;
2. построить эпюру динамических изгибающих моментов.

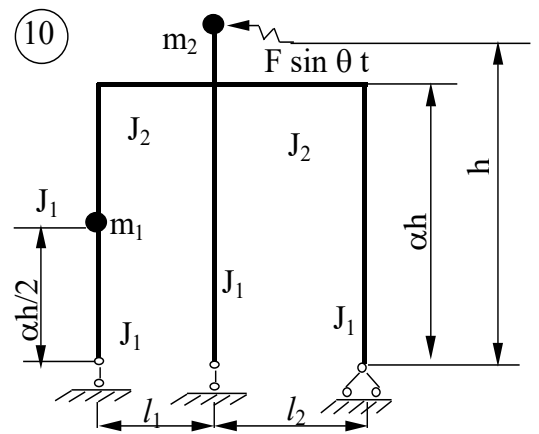
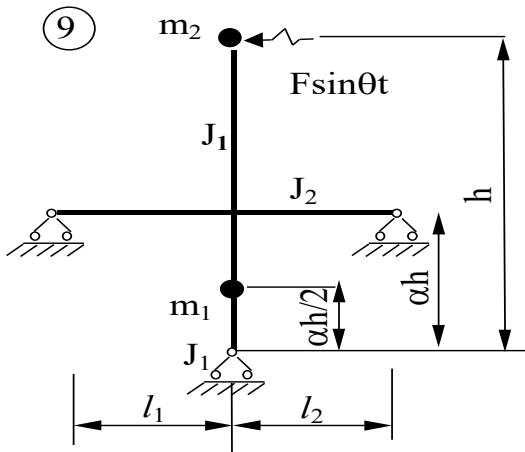
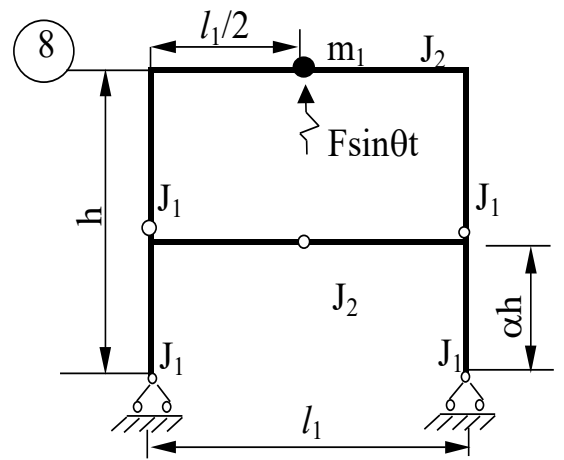
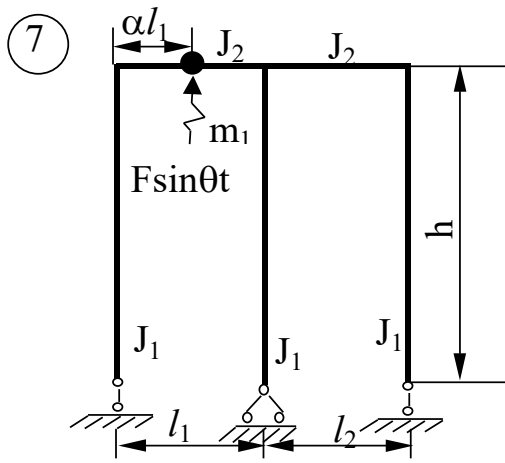
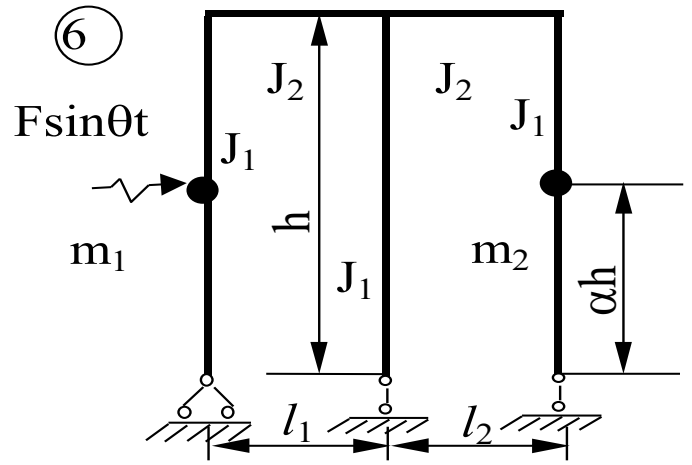
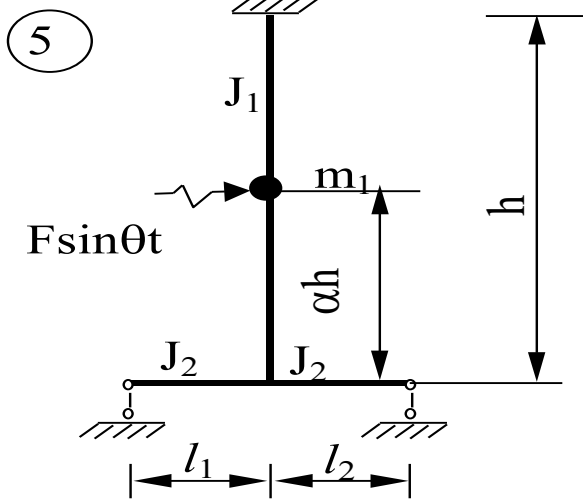
Примечание: частоту возмущающей нагрузки  $\theta$  принять равной 0,6 от частоты основного тона свободных колебаний.

ТАБЛИЦА № 5

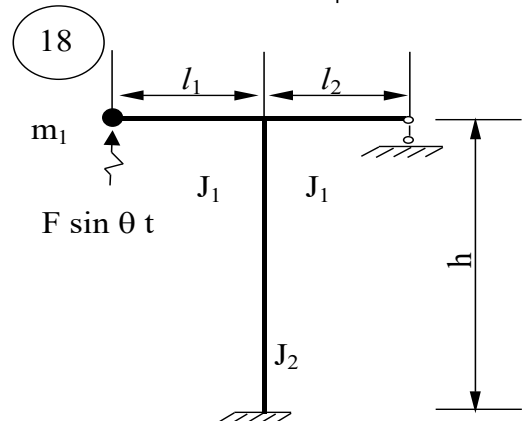
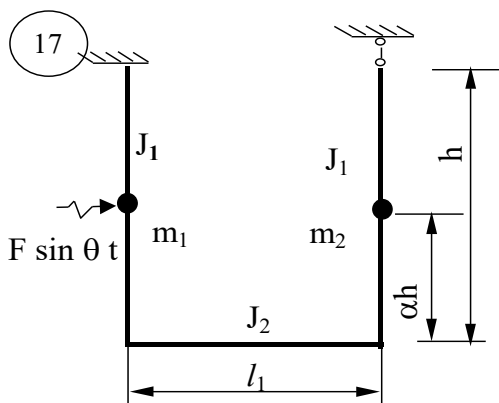
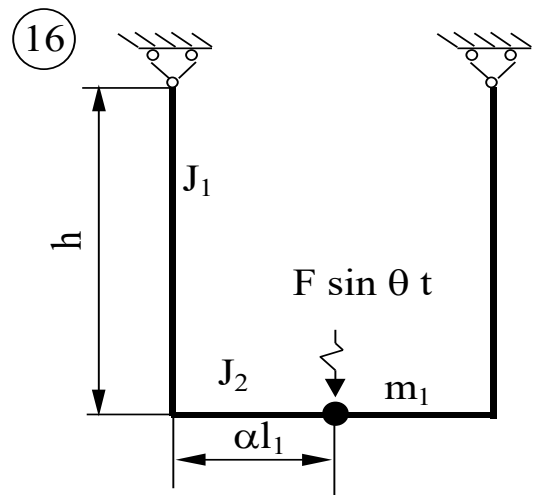
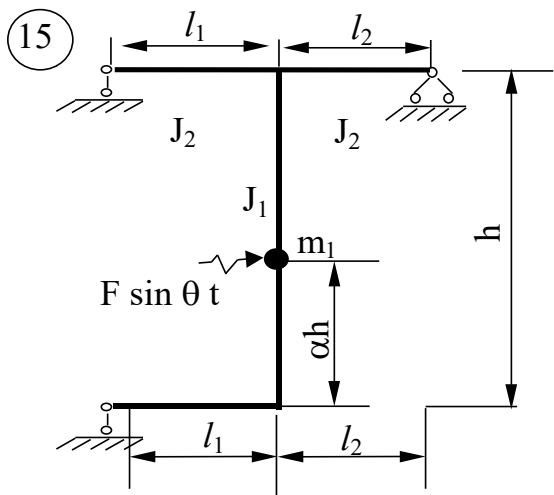
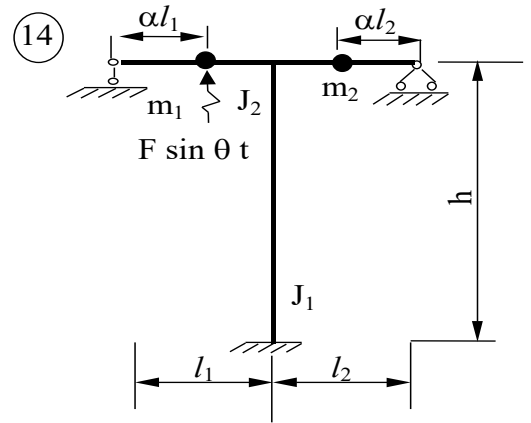
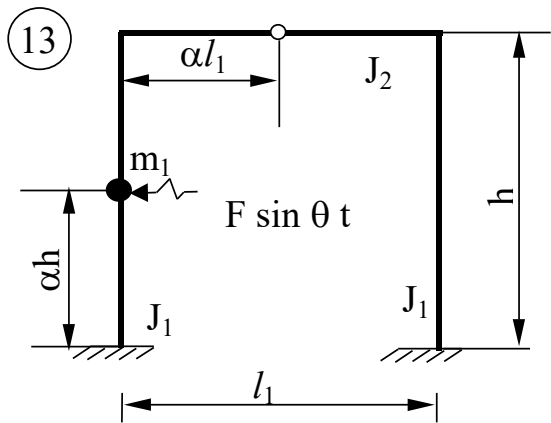
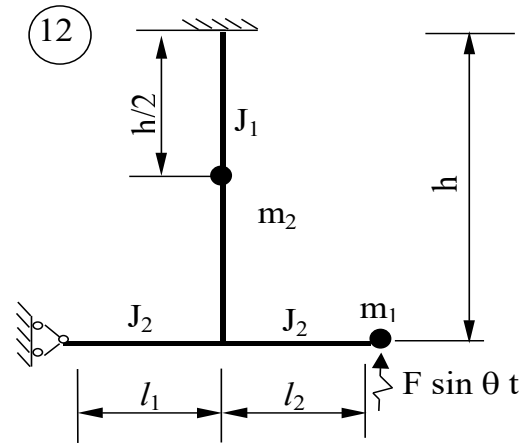
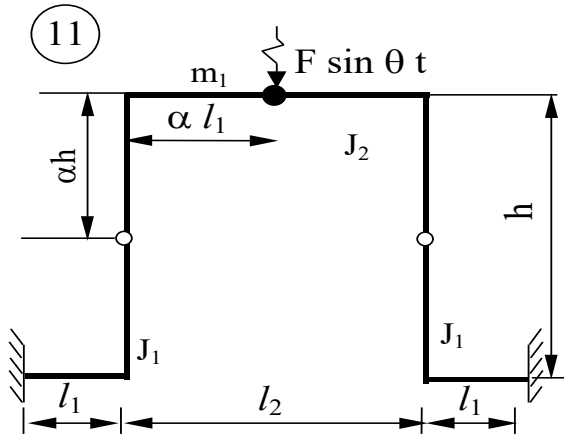
Номер по журналу + шифр группы	$\frac{m_1}{m}$	$\frac{m_2}{m}$	$\frac{J_1}{J}$	$\frac{J_2}{J}$	$l_1$ м	$l_2$ м	h м	$\alpha$	F кН
1	3	2	1	3	3	4	5	0,1	15
2	2	3	2	3	4	5	3	0,2	11
3	2	1	3	1	5	4	6	0,3	10
4	3	4	2	3	5	6	5	0,4	12
5	5	3	2	3	6	5	6	0,3	14
6	4	2	1	2	6	3	4	0,6	13
7	4	3	2	3	5	2	4	0,7	10
8	4	5	2	3	6	3	5	0,8	16
9	5	2	3	2	5	4	2	0,9	11
10	1	3	1	3	6	3	3	0,2	10
11	3	4	2	1	5	3	4	0,4	12
12	2	3	3	2	4	6	5	0,6	11
13	2	4	3	1	6	5	6	0,4	13
14	3	2	1	2	3	3	4	0,4	15
15	3	4	5	3	6	5	4	0,1	16
16	4	2	3	4	6	6	3	0,2	14
17	3	2	3	2	5	4	5	0,3	13
18	3	4	5	4	6	4	4	0,4	14
19	4	3	3	2	6	3	6	0,5	13
20	3	2	3	1	4	5	6	0,1	15
21	2	4	4	2	3	5	2	0,1	12

22	3	3	5	3	5	4	3	0,2	13
23	3	4	1	4	4	5	4	0,3	14
24	4	2	2	3	5	3	4	0,4	16
25	2	3	2	3	4	6	5	0,5	10









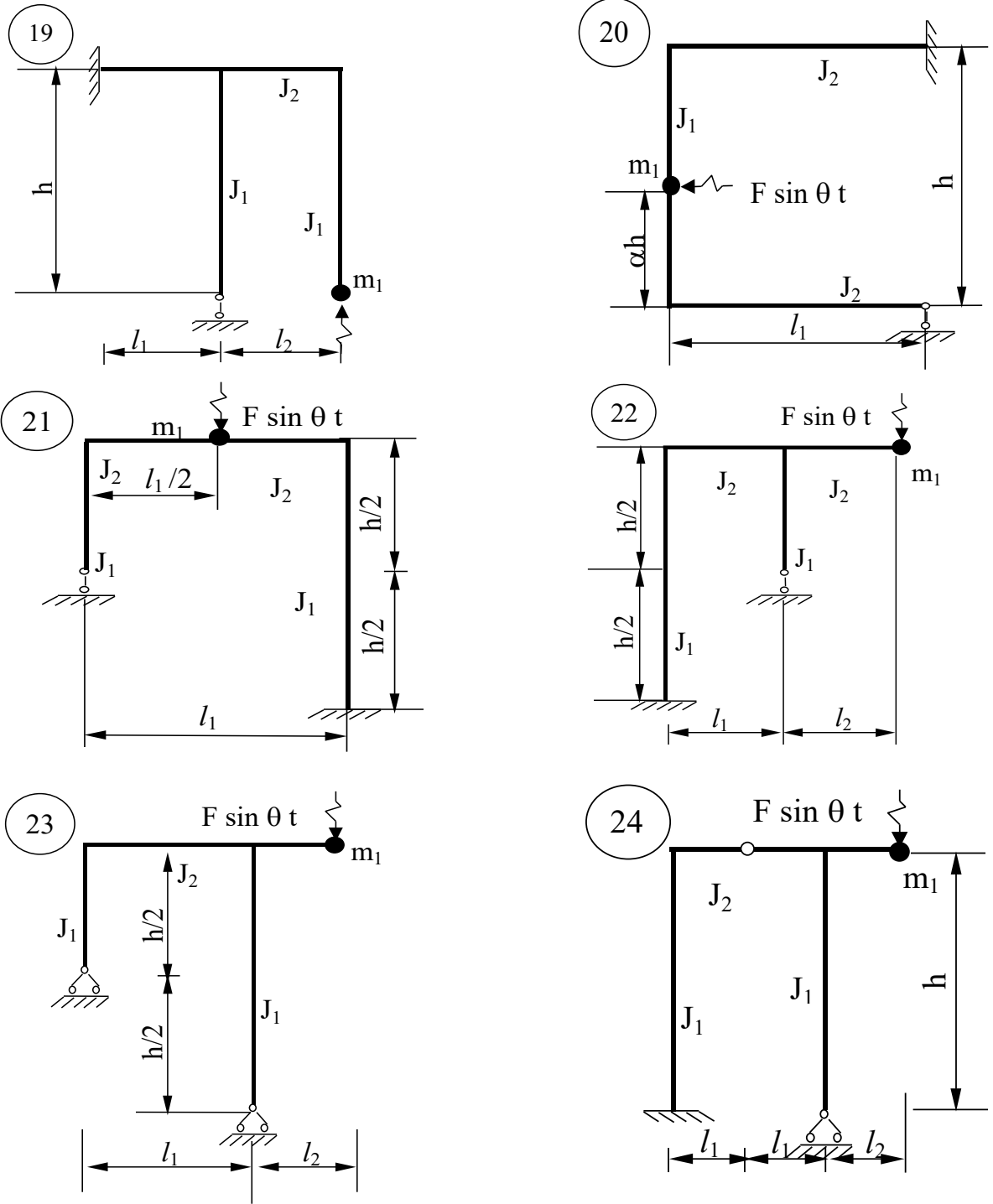


Рис. 60

## Задача № 8. Расчет плоской рамы на устойчивость

Для заданной рамы:

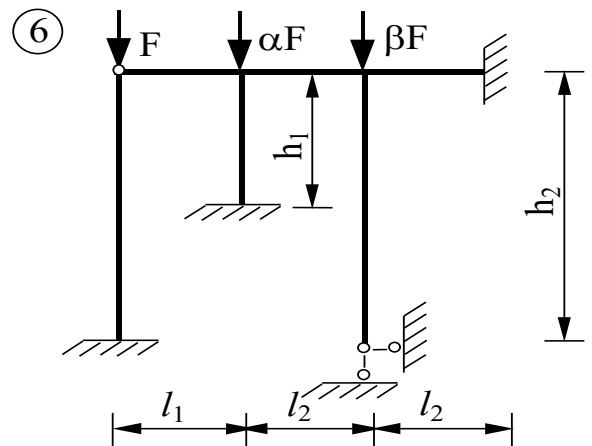
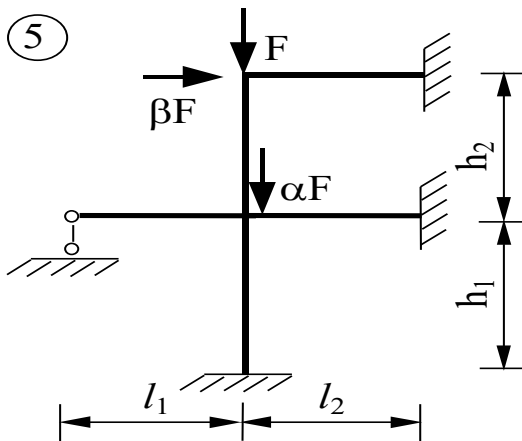
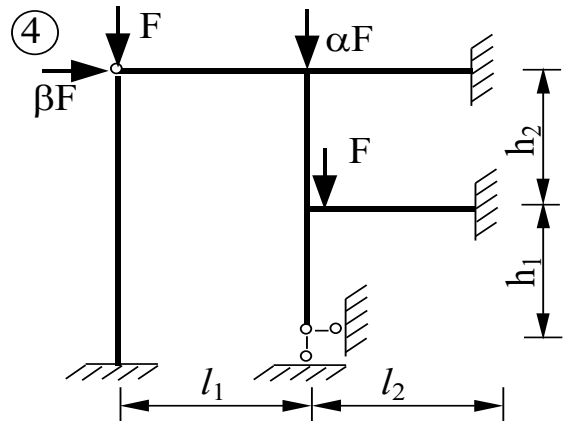
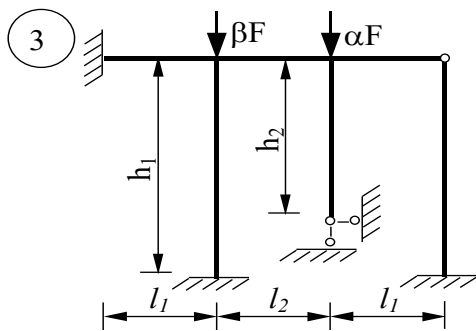
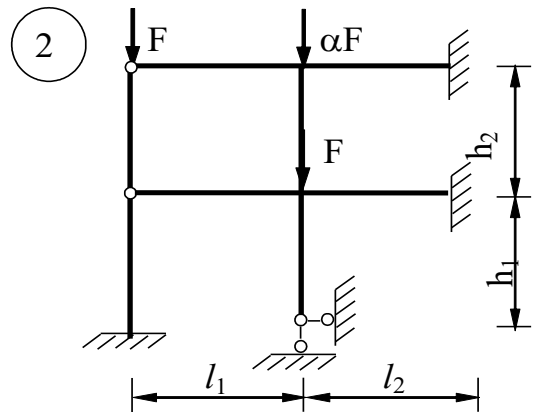
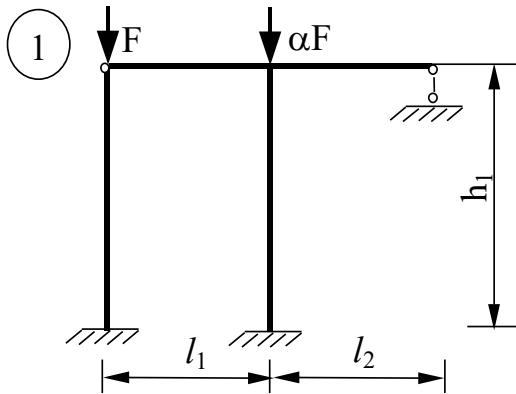
1. выбрать основную систему и записать уравнения устойчивости в форме метода перемещений;
2. построить единичные эпюры моментов с учетом влияния продольных сил;
3. определить коэффициенты векового уравнения и вычислить значение критической силы.

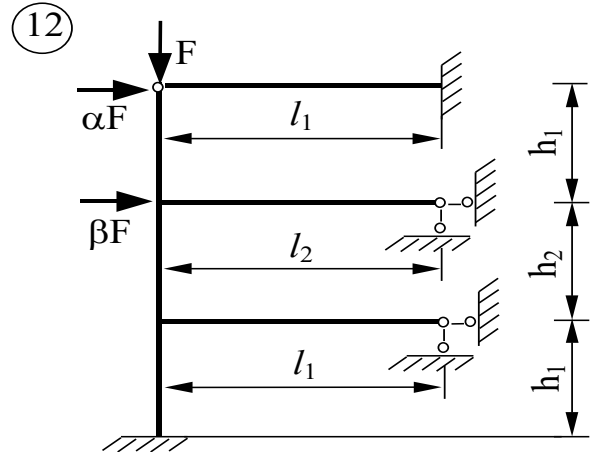
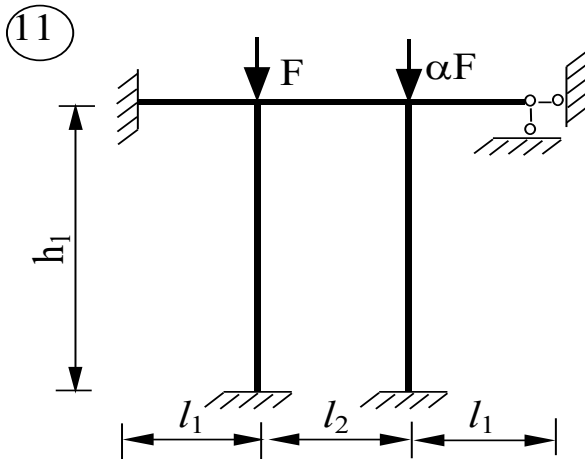
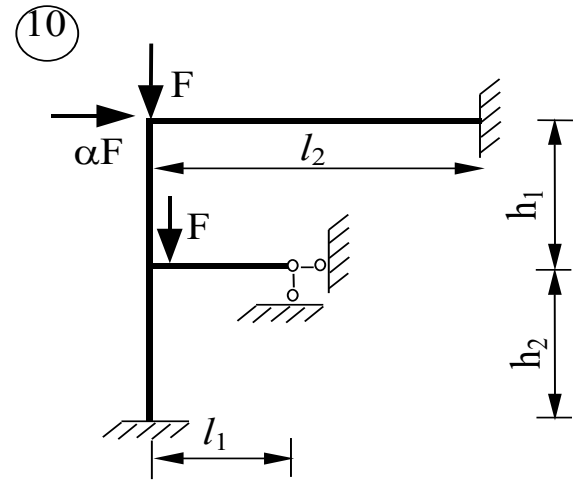
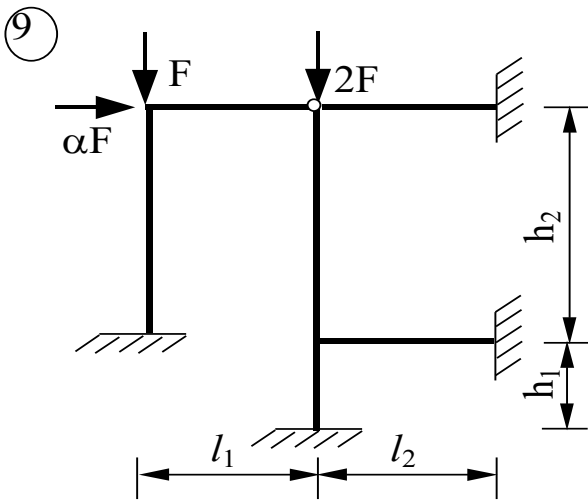
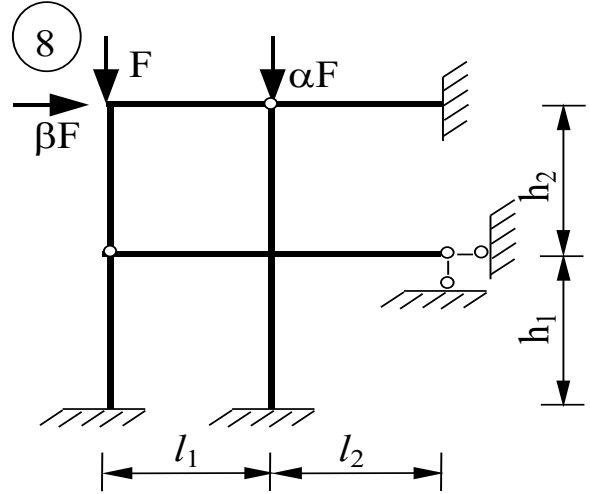
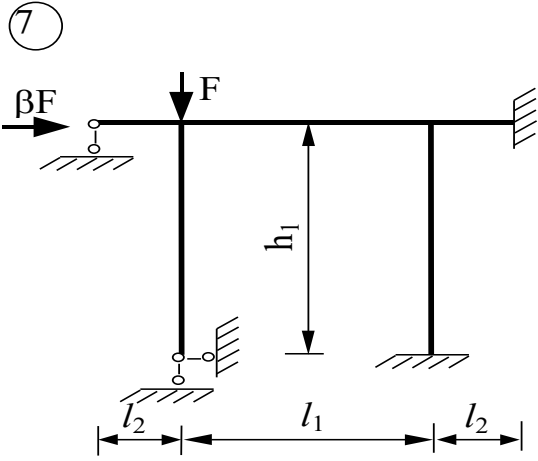
Примечание: моменты инерции горизонтальных стержней принять  $J_1$ , вертикальных –  $J_2$ .

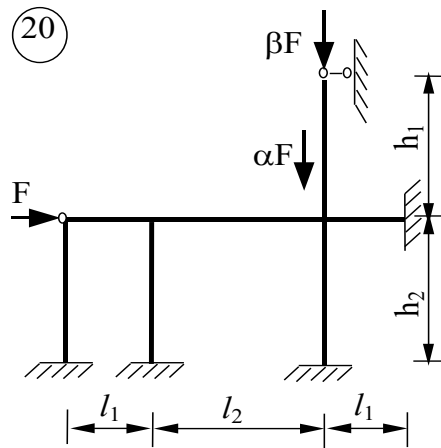
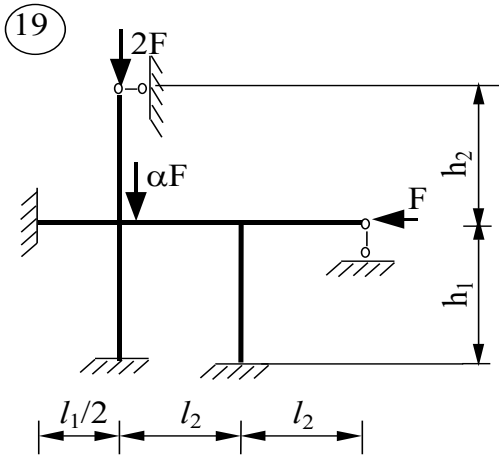
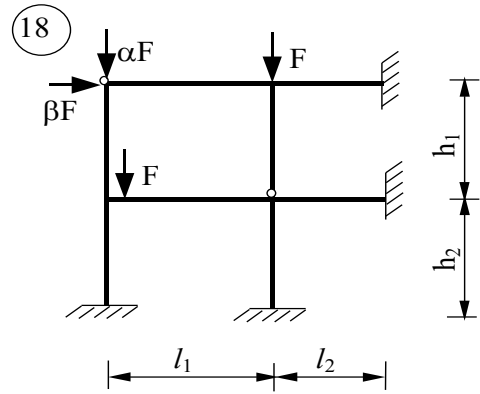
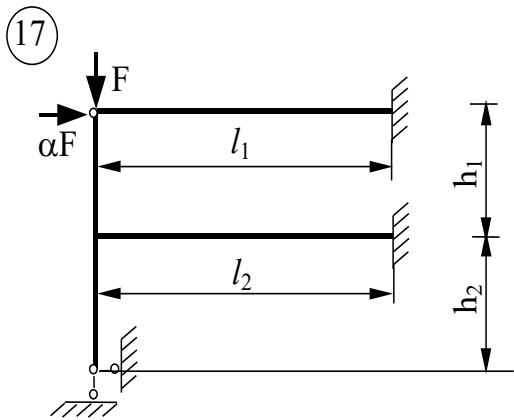
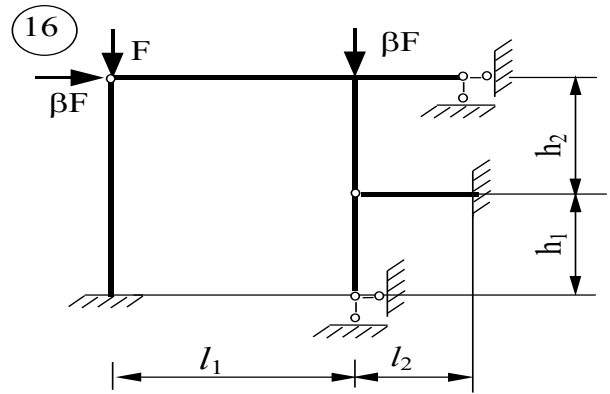
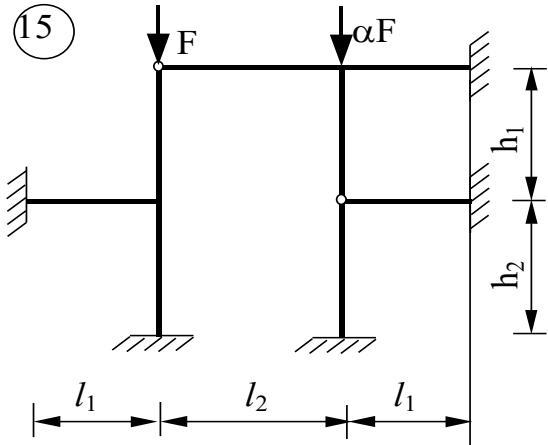
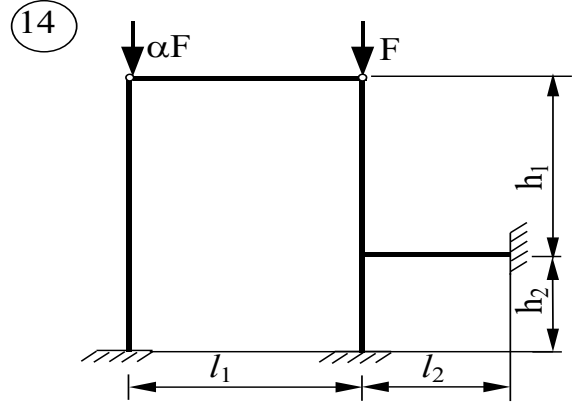
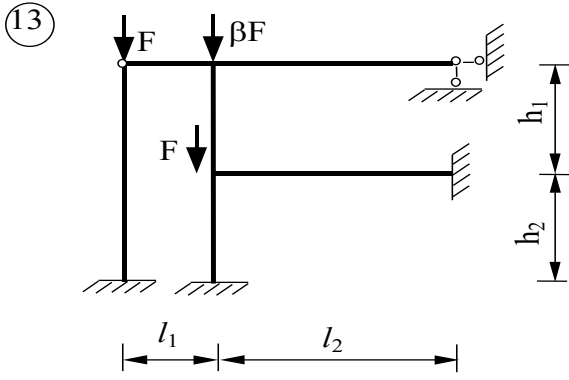
ТАБЛИЦА № 6

Номер по списку + шифр группы	$l_1$ м	$l_2$ м	$h_1$ м	$h_2$ м	$J_1/J_2$	$\alpha$	$\beta$
1	4	6	4	3	2	1	0
2	6	6	4	3	3	0	2
3	4	3	4	6	2	2	1
4	2	2	3	2	3	1	1
5	3	4	2	4	3	1	2
6	4	6	4	6	2	1	1
7	6	3	4	3	3	1	0
8	2	4	2	3	2	2	0
9	3	2	5	1	2	2	2
10	4	2	4	1	2	1	1
11	4	2	4	3	3	0	2
12	6	3	5	6	2	2	1
13	3	6	5	3	3	1	2
14	4	6	6	6	2	1	0
15	2	1	2	3	3	2	0
16	4	2	4	1	3	0	1
17	6	6	5	3	2	1	0
18	4	6	4	2	2	2	0
19	2	2	4	3	3	0	2

20	6	6	3	3	3	2	1
21	2	4	3	4	2	1	0
22	3	2	6	4	2	1	1
23	4	2	4	4	1	2	0
24	2	4	5	5	2	1	1
25	4	6	2	3	4	2	1







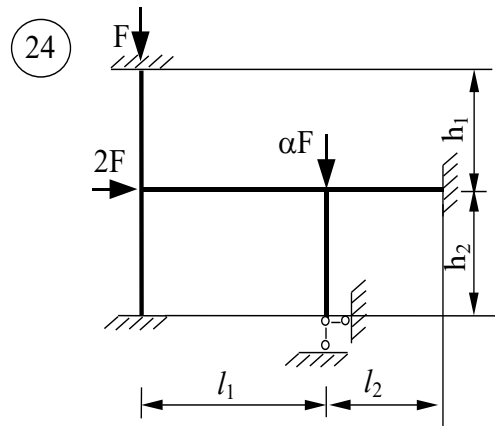
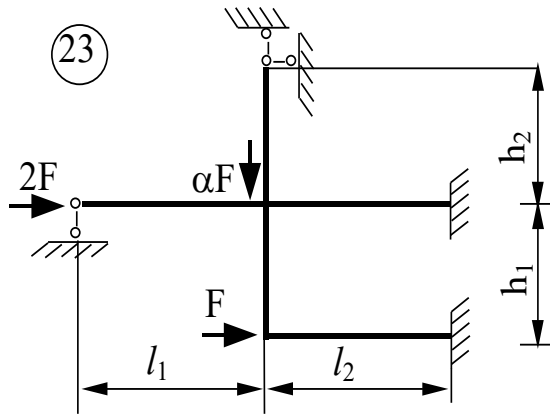
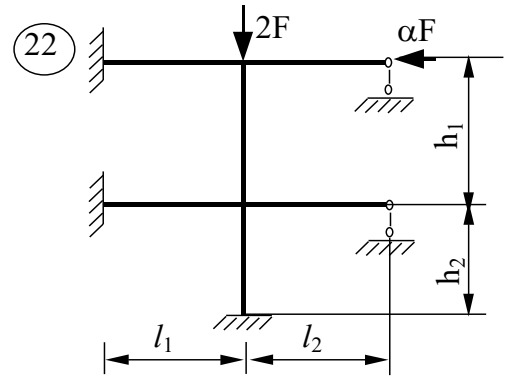
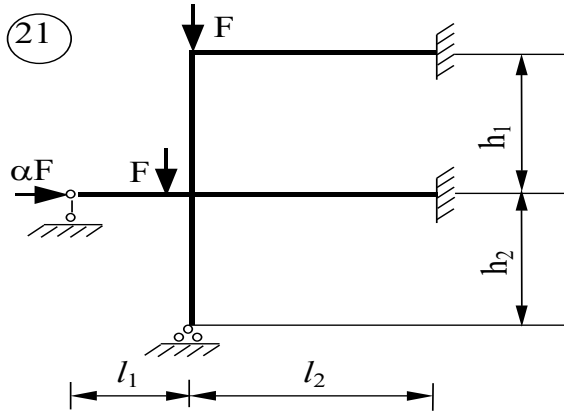


Рис. 61

Таблица значений фиктивных реакций простых балок

Таблица № 7


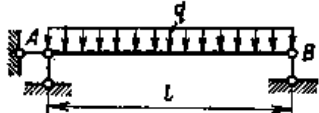
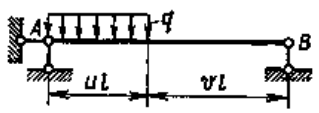
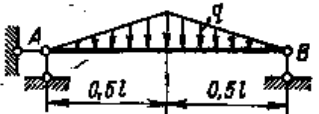
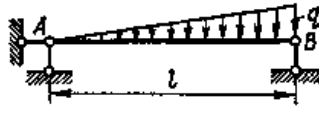
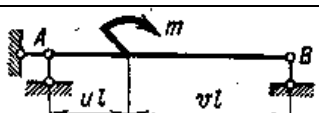
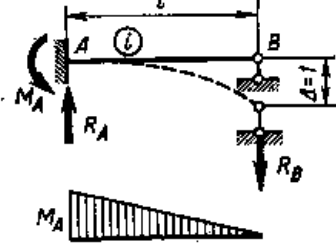
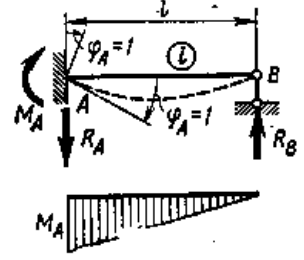
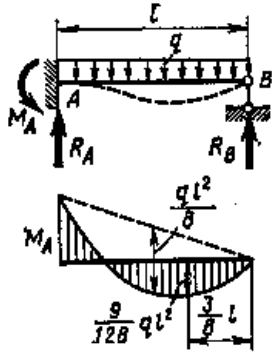
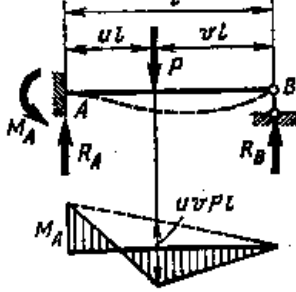
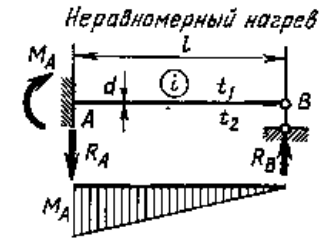
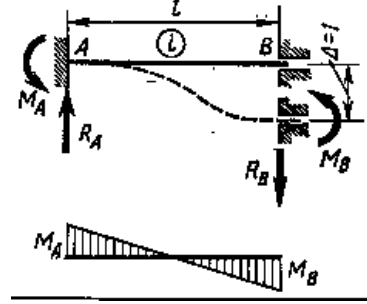
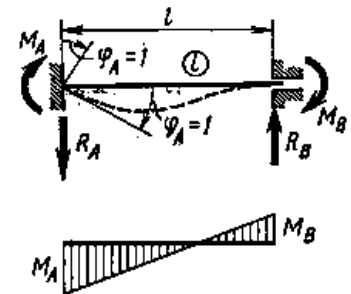
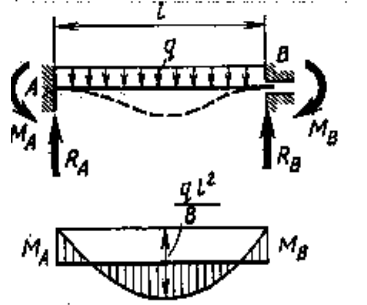
Схема нагрузки	$6A^\Phi$	$6B^\Phi$
	$P l^2 u v (1 + v)$ При $u=v=0,5$ $\frac{3}{8} P l^2$	$P l^2 u v (1 + u)$ При $u=v=0,5$ $\frac{3}{8} P l^2$
	$\frac{q l^3}{4}$	$\frac{q l^3}{4}$
	$\frac{q l^3 u^2 (2 - v)^2}{4}$	$\frac{q l^3 v^2 (2 - u^2)}{4}$
	$\frac{5}{32} q l^3$	$\frac{5}{32} q l^3$
	$\frac{7}{60} q l^3$	$\frac{2}{15} q l^3$
	$- m l (1 - 3v^2)$ При $u=v=0,5$ $-\frac{m l}{4}$	$m l (1 - 3u^2)$ При $u=v=0,5$ $\frac{m l}{4}$

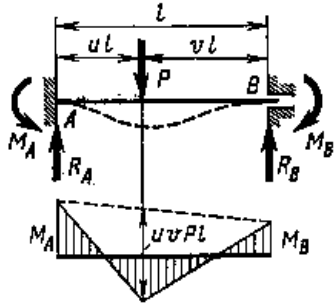
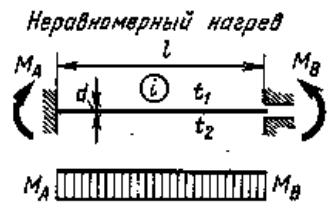
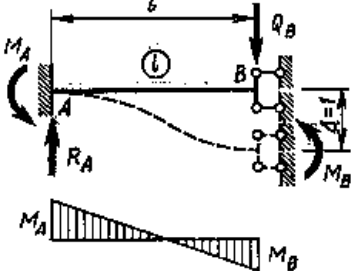
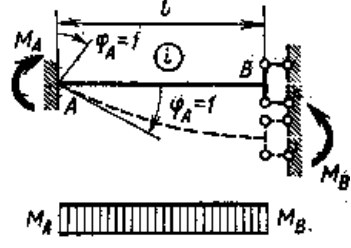


Таблица значений реактивных усилий и эюр изгибающих моментов в статически неопределимых однопролетных балках

Таблица № 8

№ п/п	Схема балки и эюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
1		$i = \frac{EI}{l};$ $M_A = \frac{3i}{l};$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l^2};$
2		$M_A = 3i;$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l};$
3		$M_A = \frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5ql}{8};$ $R_B = \frac{3ql}{8};$
4		$M_A = \frac{Pl}{2}v(1-v^2);$ $R_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2);$ $R_B = \frac{Pu^2}{2}(3-u);$

5	<p style="text-align: center;"><i>Неравномерный нагрев</i></p> 	$M_A = \frac{3i\alpha t' l}{2d};$ $R_A = R_B = \frac{3i\alpha t'}{2d};$ <p style="text-align: center;"><math>\alpha</math> - коэффициент теплового линейного расширения</p> $t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2;$
1	2	3
6		$M_A = \frac{6i}{l};$ $M_B = \frac{6i}{l};$ $R_A = R_B = \frac{12i}{l^2};$
7		$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ $R_A = R_B = \frac{6i}{l};$
8		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}; M_A = \frac{F_1}{8}$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2};$

<p>9</p>		$M_A = uv^2 Pl;$ $M_B = u^2v Pl;$ $R_A = v^2(1 - 2u)P;$ $R_B = u^2(1 + 2v)P;$
<p>0 1</p>	<p>Неравномерный нагрев</p> 	$M_A = M_B = \frac{i\alpha t' l}{d};$ $R_A = R_B = 0;$ <p><math>\alpha</math> - коэффициент теплового линейного расширения</p> $t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2;$
<p>1</p>	<p>2</p>	<p>3</p>
<p>1 1</p>		$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $R_A = Q_B = \frac{12i}{l^2};$
<p>2 1</p>		$M_A = M_B = i;$ $R_A = R_B = 0;$

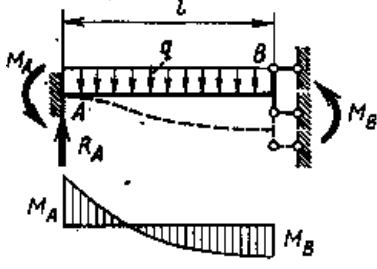
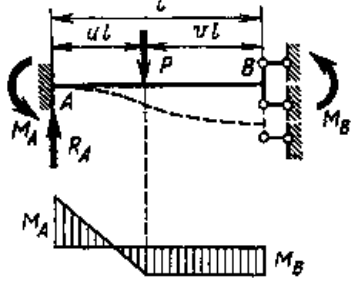
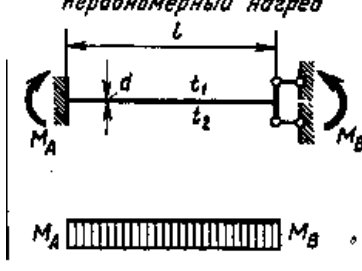
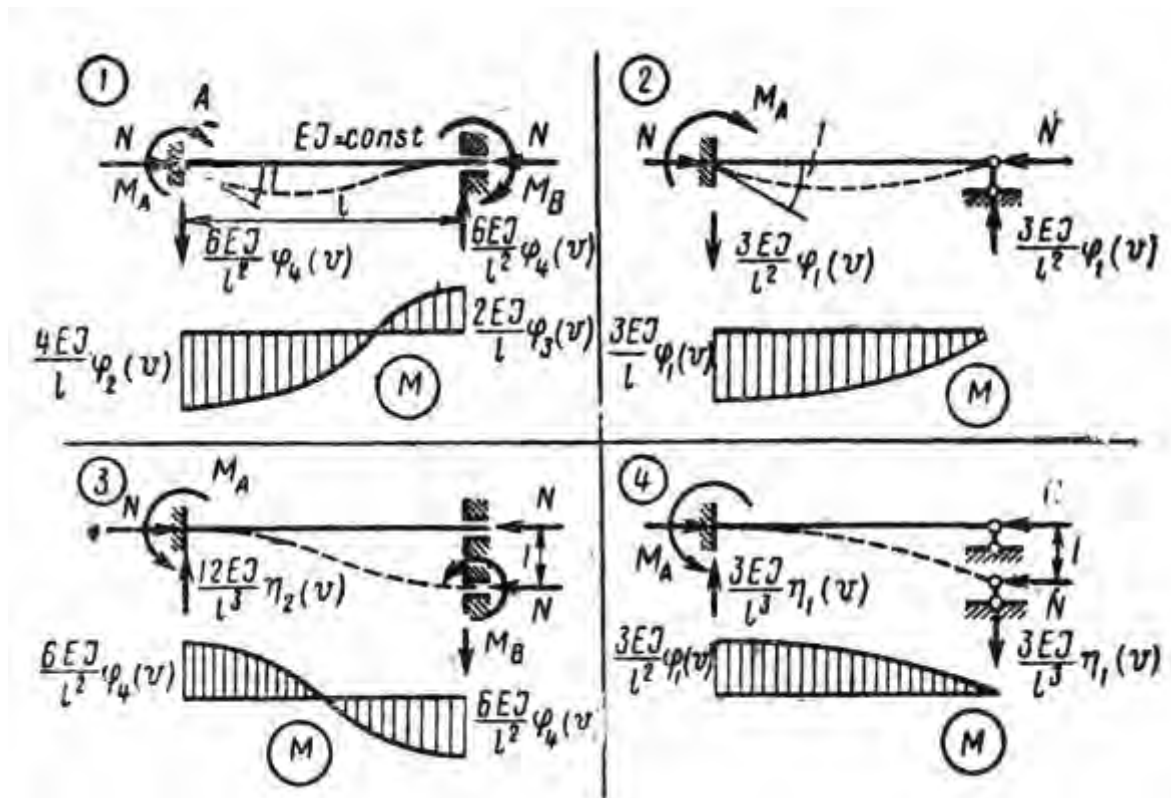
3		$M_A = \frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6};$ $R_A = ql; R_B = 0;$
4		$M_A = \frac{Plu(2-u)}{2};$ $M_B = \frac{Plu^2}{2};$ $R_A = P; R_B = 0;$
5	<p style="text-align: center;"><i>Неравномерный нагрев</i></p> 	$M_A = M_B = \frac{i\alpha t'l}{d};$ $R_A = R_B = 0;$ <p style="text-align: center;"><math>\alpha</math> - коэффициент теплового линейного расширения</p> $t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2;$

Таблица реактивных усилий и эпюр изгибающих моментов в сжато-изогнутых стержнях

Таблица № 9



Значение функций метода перемещений для сжато-изогнутых стержней

Таблица № 10

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6342	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051

3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-1,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	6,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
$2\pi$	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,033	-3,2898