

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 19.01.2022 18:25:44
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d59e51c11eabb175e945d14246511a1a56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДСТВ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD, ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Методические указания к выполнению практической и
самостоятельной работы
по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных
систем и роботов» для студентов направления 15.04.06

Курск

УДК 621

Составители: С.И. Савин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Е.Н. Политов*

Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с применением средств программного пакета Mathcad, применительно к задачам механики: методические указания к выполнению практической и самостоятельной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.И. Савин. Курск, 2016. 22 с.: ил. 10, табл. 1. Библиогр.: с.20-21.

Методические указания содержат сведения о методах использования программного пакета Mathcad для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании движения механических систем.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 – Мехатроника и робототехника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____ . Формат 60x84 1/16
Усл.печ.л. _____. Уч.-изд.л. ____ Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДСТВ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD, ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Цель работы: изучить методы использования программного пакета *Mathcad* для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании движения механических систем.

Аппаратные средства: математический пакет *Mathcad*.

1. Краткие теоретические сведения о линейных дифференциальных уравнениях

Дифференциальное уравнение вида:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \quad (1)$$

называется **обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n -ого порядка**. Здесь t - независимая переменная (время), $y = y(t)$ - функция времени, являющаяся решением дифференциального уравнения, $y' = \frac{dy}{dt}$ - первая производная по времени от функции $y(t)$, $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ - n -я производная по времени от функции $y(t)$.

В случае, если функция, стоящая в правой части, равна нулю, уравнение называется однородным и принимает форму:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2)$$

Любое линейное однородное уравнение можно представить в виде системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вводятся обозначения $y^{(k)} = y_{k+1}$, и уравнение (2) переписывается в виде:

$$\begin{cases} a_n y'_{n-1} + a_{n-1} y_{n-1} + a_{n-2} y_{n-2} + \dots + a_1 y_1 + a_0 y_0 = 0 \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ \dots \\ y'_0 = y_1 \end{cases} \quad (3)$$

Перепишем систему (3), так чтобы в левой части оставались лишь производные:

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ \dots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = \frac{1}{a_n} (-a_{n-1} y_{n-1} - a_{n-2} y_{n-2} - \dots - a_1 y_1 - a_0 y_0) \end{cases} \quad (4)$$

Данную систему можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_{n-2} \\ y'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Введем обозначение $\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{n-1}]^T$. Тогда выражение (5) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}. \quad (6)$$

где \mathbf{A} - матрица, стоящая в правой части выражения (5).

Сходным образом от любой системы линейных однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) можно перейти к системе линейных ОДУ первого порядка. Возможен также и переход от системы из n ОДУ первого порядка к одному дифференциальному уравнению порядка n .

Матрица, стоящая в правой части выражения (5) называется **матрицей системы линейных ОДУ первого порядка**.

Общим решением однородного линейного ОДУ называют такую функцию $y(t)$, которая обращает выражение (2) в тождество. Общим решением системы линейных ОДУ первого порядка называют такую вектор-функцию $y(t)$, которая обращает выражение (6) в тождество.

Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_n$ - собственные числа матрицы A , а $v_1 \dots v_n$ - её собственные векторы. В случае, если все собственные числа являются действительными числами и попарно различны, **фундаментальная система решений** уравнения (6) включает в себя следующие решения:

$$y_i = v_i e^{\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Матрица, составленная из вектор-функций y_i называется **матрицей фундаментальной системы решений**:

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]. \quad (8)$$

Общее решение системы линейных ОДУ имеет вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (9)$$

где c_1, \dots, c_n - константы интегрирования. Константы интегрирования могут быть найдены следующим образом:

$$c = Y(0)^{-1} y(0). \quad (10)$$

где $c = [c_1 \quad c_1 \quad \dots \quad c_n]^T$ - вектор констант интегрирования, $Y(0)$ - значение матрицы Y в момент $t=0$. отметим, что в случае, когда все собственные числа являются действительными числами и попарно различны $Y(0)$ представляет собой матрицу, составленную из собственных векторов матрицы A . Таким образом, для решения задачи Коши требуется знание значения функции $y(t)$ в момент $t=0$.

Тогда общее решение системы (6) имеет вид:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{c}. \quad (11)$$

Оно также может быть записано в виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}(0)^{-1} \mathbf{y}(0). \quad (12)$$

В случае, если система уравнений не является однородной, требуется найти её частное решение. Пусть исходная неоднородная система ОДУ имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{F}(t), \quad (13)$$

где $\mathbf{F}(t)$ - вектор-функция, не зависящая от фазовых координат.

Тогда частное решение находится по формуле:

$$\mathbf{y}_{\dot{}} = \mathbf{Y} \cdot \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Решение системы линейных ОДУ является суммой её общего и частного решений:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}(0)^{-1} \mathbf{y}(0) + \mathbf{Y} \cdot \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) d\tau. \quad (15)$$

2. Методика выполнения лабораторной работы

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение гармонического осциллятора с затуханием:

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = 0. \quad (16)$$

где $m=1$ кг - масса, $\mu=5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ - коэффициент вязкого сопротивления, $k=5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ - жесткость упругого элемента. Зададим начальные условия $y(0)=2$ м, $\dot{y}(0)=1$ м/с.

Приведем уравнение (16) к системе ОДУ первого порядка, введя следующие замены:

$$s_0 = y, \quad s_1 = \dot{y}. \quad (17)$$

Тогда полученная система ОДУ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{s}_0 = s_1 \\ \dot{s}_1 = -\frac{\mu}{m}s_1 - \frac{k}{m}s_0 \end{cases}. \quad (18)$$

Переменные s_0 , s_1 называют **фазовыми**. В матричной форме данная система записывается в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Матрица данной системы линейных ОДУ первого порядка имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Программа в среде Mathcad, реализующая описанные действия, приведена ниже:

Листинг 1 Исходное уравнение, система ОДУ первого порядка

Исходное уравнение (линейное однородное ОДУ 2ого порядка):

$$d^2y(y, dy, m, \mu, k) := -\frac{1}{m} \cdot (\mu \cdot dy + k \cdot y)$$

Приведение к системе ОДУ первого порядка:

$$ds(s, m, \mu, k) := \begin{bmatrix} s_1 \\ -\frac{1}{m} \cdot (\mu \cdot s_1 + k \cdot s_0) \end{bmatrix}$$

Для получения матрицы J попользуемся тем что матрица СЛАУ $y = Ax$ может быть найдена, как матрица Якоби функции y :

$$A = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Листинг 2 Получение матрицы системы линейных ОДУ первого порядка

Матрица системы линейных ОДУ, найденная как матрица Якоби функции $ds(s, m, \mu, k)$:

$$J(m, \mu, k) := \text{Jacob}(ds(s, m, \mu, k), s, 2) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы построить фундаментальную систему решений найдем собственные числа и собственные векторы матрицы J.

Листинг 3 Получение собственных чисел и собственных векторов матрицы J

Собственные числа и собственные векторы матрицы:

$$\lambda(m, \mu, k) := \text{eigenvals}(J(m, \mu, k)) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2-m} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2-m} \\ \frac{\sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2-m} - \frac{\mu}{2-m} \end{pmatrix}$$

$$V(m, \mu, k) := \text{eigenvecs}(J(m, \mu, k)) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot k} & -\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2 \cdot k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа могут быть действительными если выполняется условие $\mu^2 - 4km > 0$. Рассмотрим случай, когда это условие выполняется.

Найдем фундаментальную систему решений.

Листинг 4 Нахождение фундаментальной системы решений

Фундаментальная система решений:

$$\text{Fundamental}(t, m, \mu, k) := V(m, \mu, k) \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda(m, \mu, k)_0 \cdot t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda(m, \mu, k)_1 \cdot t} \end{pmatrix} \text{ simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} e^{-\frac{t \cdot (\mu + \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m})}{2 \cdot m}} \cdot \frac{t \cdot \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m} - \mu - t}{2 \cdot k} & e^{\frac{t \cdot \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m} - \mu - t}{2 \cdot m}} \cdot \frac{t \cdot (\mu + \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m})}{2 \cdot k} \\ e^{\frac{t \cdot (\mu + \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m})}{2 \cdot m}} & e^{\frac{t \cdot \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m} - \mu - t}{2 \cdot m}} \end{bmatrix}$$

Введем вектор начальных условий $IC = [y(0) \quad \dot{y}(0)]^T$.
Определим константы интегрирования.

Листинг 5 Определение констант интегрирования

Определение констант интегрирования:

$$\text{Constants}(m, \mu, k, IC) := \text{Fundamental}(0, m, \mu, k)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} IC_0 \\ IC_1 \end{pmatrix} \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\mu \cdot IC_1}{2 \cdot \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}} + \frac{k \cdot IC_0}{\sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}} + \frac{IC_1}{2} \\ \frac{IC_1}{2} - \frac{k \cdot IC_0}{\sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}} - \frac{\mu \cdot IC_1}{2 \cdot \sqrt{\mu^2 - 4 \cdot k \cdot m}} \end{pmatrix}$$

Имея фундаментальную систему решений и константы интегрирования получим общее решение системы ОДУ.

Листинг 6 Получение общего решения системы ОДУ

$$\text{Solution}(t, m, \mu, k, IC) := \text{Fundamental}(t, m, \mu, k) \cdot \text{Constants}(m, \mu, k, IC) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\mu \cdot t}{e^{2m}} \left(\frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \sqrt{\mu^2 - 4km} IC_0 + e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \sqrt{\mu^2 - 4km} IC_0 - \mu e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_0 + \mu e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_0 - 2m e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_1 + 2m e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_1 \right) \\ \frac{-\mu \cdot t}{e^{2m}} \left(\frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \sqrt{\mu^2 - 4km} IC_1 + e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \sqrt{\mu^2 - 4km} IC_1 + \mu e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_1 - \mu e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_1 + 2k e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_0 - 2k e \frac{t\sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} IC_0 \right) \\ 2\sqrt{\mu^2 - 4km} \end{bmatrix}$$

Введя замену $\sqrt{\mu^2 - 4km} = \zeta$ можем упростить полученное решение.

Листинг 7 Решение системы ОДУ после ввода замены.

$$\zeta = \sqrt{\mu^2 - 4km}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-\mu \cdot t}{e^{2m}} \left(\zeta \cdot \cosh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_0 + \mu \cdot \sinh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_0 + 2m \cdot \sinh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_1 \right) \\ \frac{-\mu \cdot t}{e^{2m}} \left(\mu \cdot \sinh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_1 - \zeta \cdot \cosh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_1 + 2k \cdot \sinh\left(\frac{\zeta \cdot t}{2m}\right) \cdot IC_0 \right) \\ \zeta \end{bmatrix}$$

Подставим числа вместо использованных констант.

Листинг 8 Подстановка чисел в полученные выражения, упрощение их записи.

$$m := 1 \quad \mu := 5 \quad k := 5 \quad IC := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solution}(t) := \text{Solution}(t, m, \mu, k, IC)$$

$$ds(s) := ds(s, m, \mu, k)$$

$$t := 0, 10^{-3} \dots 10$$

В листинге 9 показано выражение для общего решения системы ОДУ, полученное после подстановки чисел.

Листинг 9 Общее решение системы ОДУ

$$\text{Solution}(t) := \text{Solution}(t, m, \mu, k, IC) \begin{cases} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.68 \cdot e^{-1.38 \cdot t} + -1.68 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \\ -0.5 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \cdot (10.2 \cdot e^{2.24 \cdot t} - 12.2) \end{bmatrix}$$

Построим график полученного решения (см. рисунок 1).

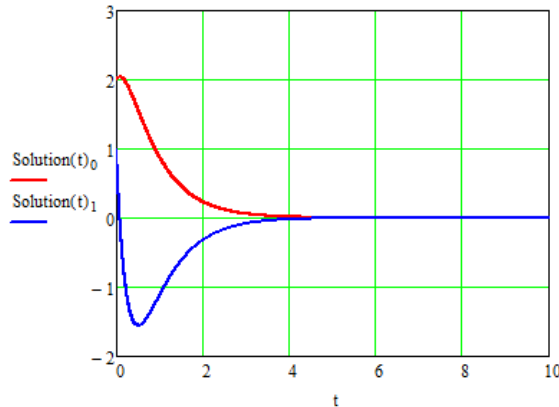


Рисунок 1 Общее решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $\dot{y}(t)$.

На рисунке 2 показан фазовый портрет системы.

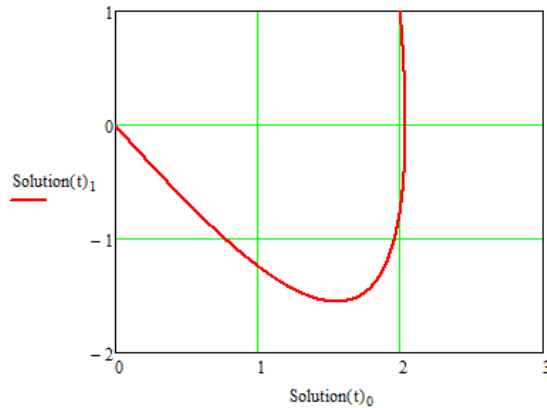


Рисунок 2 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Построим векторное поле, описываемое изучаемой системой. Векторы поля получаются из уравнения (18), ставящего в соответствие каждой паре значений s_0, s_1 вектор производных $[\dot{s}_0 \ \dot{s}_1]^T$. Для того, чтобы построить векторное поле в пакете Mathcad необходимо сформировать матрицу $V_{j,k} \in C^{n \times m}$ с комплексными элементами, по следующей формуле:

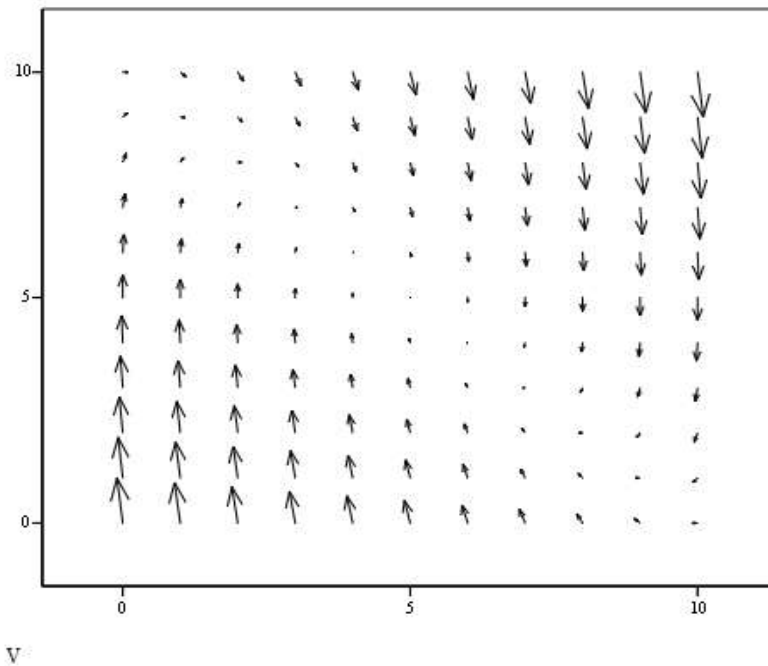


Рисунок 3 Векторное поле, определяемое выражением (21)

Обратим внимание, что векторы, показанные на рисунке 3 имеют разную длину. В данном случае из-за этого достаточно сложно визуально оценить направление векторов на диагонали данного поля. Чтобы избежать данной проблемы можно предварительно нормализовать векторы, по которым строится поле. Это делается с использованием следующей формулы:

$$V_{j,k} = \frac{(k\rho_1 + \sigma_1) + i \cdot \left(-\frac{\mu}{m}(k\rho_1 + \sigma_1) - \frac{k}{m}(j\rho_0 + \sigma_0) \right)}{\sqrt{(k\rho_1 + \sigma_1)^2 + \left(-\frac{\mu}{m}(k\rho_1 + \sigma_1) - \frac{k}{m}(j\rho_0 + \sigma_0) \right)^2}} \quad (22)$$

Код, реализующий генерацию описанной матрицы, представлен ниже:

Листинг 11 Генерация матрицы для составления векторного поля в Mathcad

<code>n := 10</code>	<code>ρ₀ := 0.2</code>	<code>σ₀ := 1</code>
<code>m := 10</code>	<code>ρ₁ := 0.2</code>	<code>σ₁ := 1</code>

```

Vn := for j ∈ 0..n
      for k ∈ 0..m
        cs ← ds  $\begin{pmatrix} j \cdot \rho_0 - \sigma_0 \\ k \cdot \rho_1 - \sigma_1 \end{pmatrix}$ 
        cs ←  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  on error cs ←  $\frac{cs}{\sqrt{cs^T \cdot cs}}$ 
        Outj,k ← cs0 + i·cs1
      Out

```

На рисунке 4 показано полученное векторное поле.

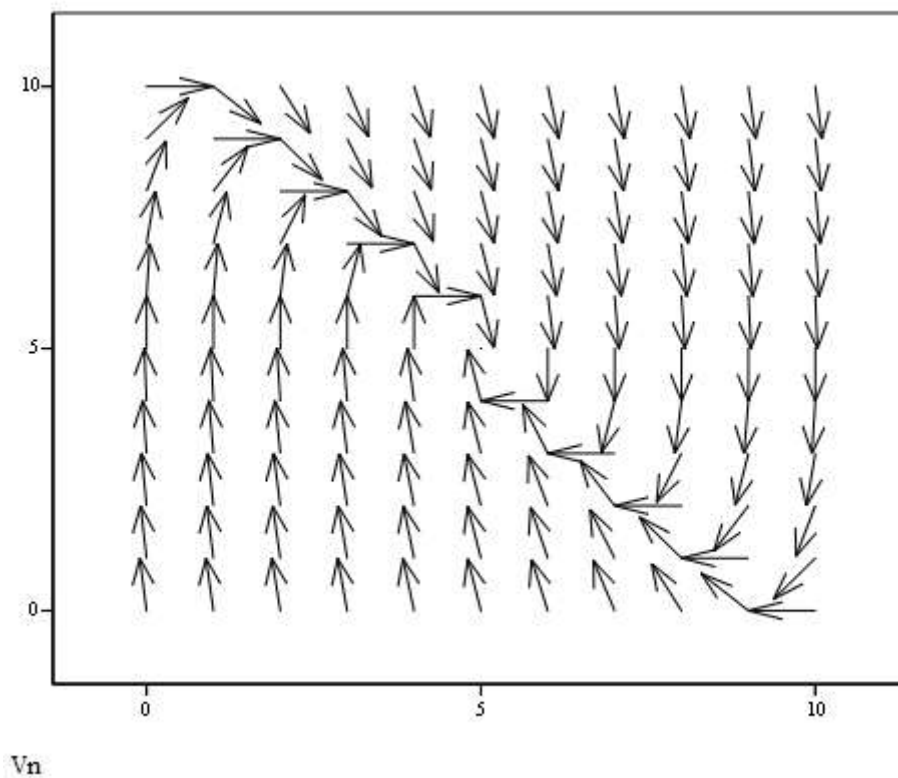


Рисунок 4 Векторное поле, определяемое выражением (22)

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 1 с другими значениями параметров:

$$m = 1 \text{ кг}, \quad \mu = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}, \quad k = 5 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \quad (23)$$

При таких значениях параметров матрица J системы линейных ОДУ будет иметь комплексные собственные числа, так как выполнено условие $\mu^2 - 4km < 0$. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы J :

Листинг 12 Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы J

$$\lambda := \text{eigenvals}(J(m, \mu, k)) = \begin{pmatrix} -0.5 + 2.179i \\ -0.5 - 2.179i \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}} := \text{eigenvecs}(J(m, \mu, k)) = \begin{pmatrix} -0.091 - 0.398i & -0.091 + 0.398i \\ 0.913 & 0.913 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы получить фундаментальную систему решений следует используя формулу Эйлера привести одно из полученных комплекснозначных решений к виду:

$$\mathbf{y}_j = e^{\text{Re}(\lambda_j)t} \left(\text{Re}(\mathbf{v}_j) \cos(\text{Im}(\lambda_j) \cdot t) - \text{Im}(\mathbf{v}_j) \sin(\text{Im}(\lambda_j) \cdot t) \right) - i \cdot e^{\text{Re}(\lambda_j)t} \left(\text{Re}(\mathbf{v}_j) \sin(\text{Im}(\lambda_j) \cdot t) + \text{Im}(\mathbf{v}_j) \cos(\text{Im}(\lambda_j) \cdot t) \right), \quad (24)$$

где λ_j - комплексное собственное число матрицы J , а \mathbf{v}_j - соответствующий этому числу собственный вектор.

Действительная и комплексное слагаемые являются линейно независимыми решениями ОДУ и образуют фундаментальную систему решений. Ниже приведен код, реализующий получение указанных решений.

Листинг 13 Получение линейно независимых решений ОДУ для случая комплексных собственных чисел.

$$f1(t) := e^{\text{Re}(\lambda_0) \cdot t} \cdot \left(\text{Re}(V^{(0)}) \cdot \cos(\text{Im}(\lambda_0) \cdot t) - \text{Im}(V^{(0)}) \cdot \sin(\text{Im}(\lambda_0) \cdot t) \right)$$

$$f2(t) := e^{\text{Re}(\lambda_0) \cdot t} \cdot \left(\text{Im}(V^{(0)}) \cdot \cos(\text{Im}(\lambda_0) \cdot t) + \text{Re}(V^{(0)}) \cdot \sin(\text{Im}(\lambda_0) \cdot t) \right)$$

Таким образом можем составить матрицу фундаментальной системы решений.

Листинг 14 Составление матрицы фундаментальной системы решений

$$\text{Fundamental}(t) := \begin{cases} \text{Out}^{(0)} \leftarrow f1(t) \\ \text{Out}^{(1)} \leftarrow f2(t) \\ \text{Out} \end{cases} \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} -e^{-0.5 \cdot t} \cdot (0.091 \cdot \cos(2.179 \cdot t) - 0.398 \cdot \sin(2.179 \cdot t)) & -e^{-0.5 \cdot t} \cdot (0.398 \cdot \cos(2.179 \cdot t) + 0.091 \cdot \sin(2.179 \cdot t)) \\ 0.913 \cdot e^{-0.5 \cdot t} \cdot \cos(2.179 \cdot t) & 0.913 \cdot e^{-0.5 \cdot t} \cdot \sin(2.179 \cdot t) \end{bmatrix}$$

Используя составленную матрицу находим решение системы ОДУ.

Листинг 15 Нахождение общего решения системы ОДУ.

$$\text{Solution}(t) := \text{Solution}(t, m, \mu, k, IC) \xrightarrow[\text{float, 3}]{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 3.68 \cdot e^{-1.38 \cdot t} + -1.68 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \\ -0.5 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \cdot (10.2 \cdot e^{2.24 \cdot t} - 12.2) \end{bmatrix}$$

На рисунке 5 представлены полученные временные зависимости.

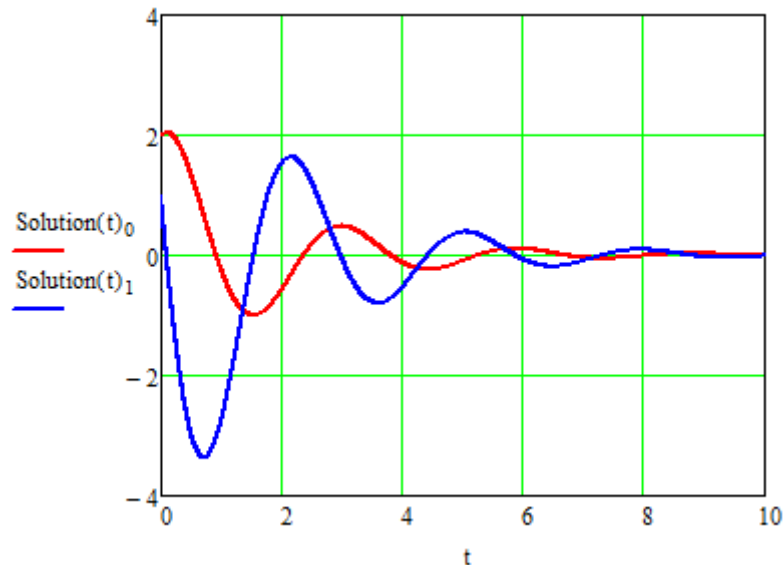


Рисунок 5 Общее решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $y'(t)$.

На рисунке 6 показан фазовый портрет системы.

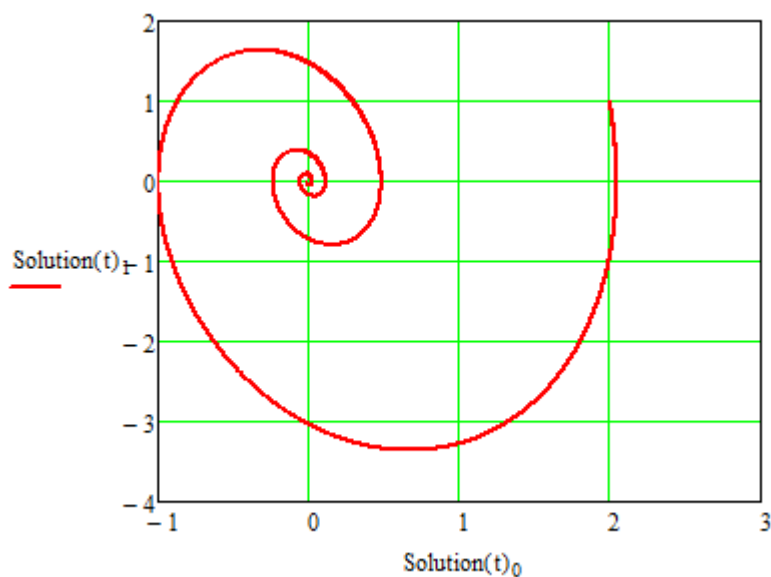


Рисунок 6 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Построим векторное поле, описываемое изучаемой системой (см. рисунки 7 и 8).

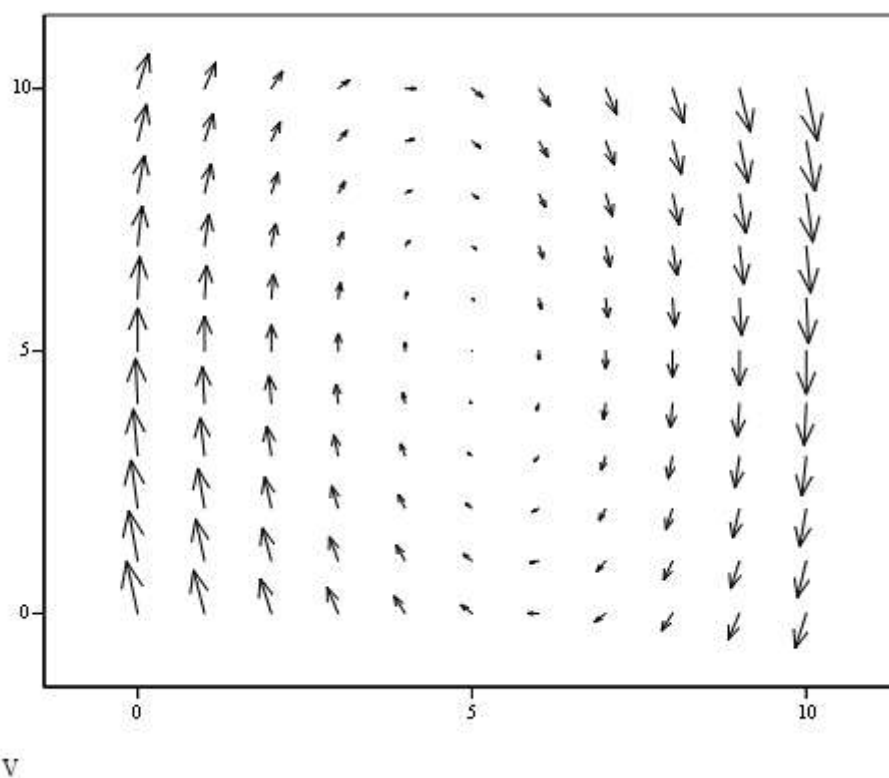
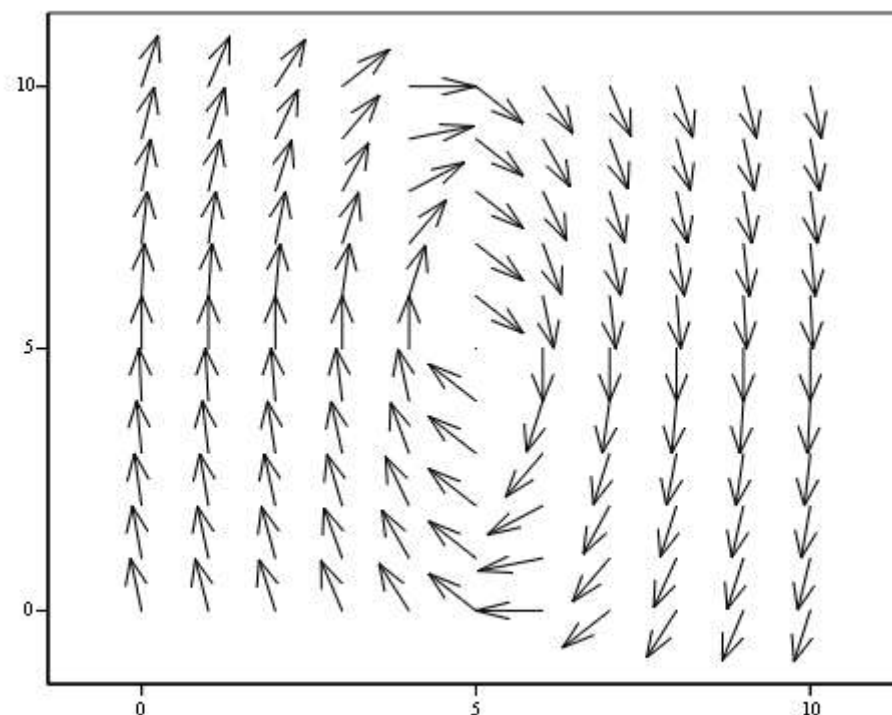


Рисунок 7 Векторное поле, определяемое выражением (21)



Vn

Рисунок 8 Векторное поле, определяемое выражением (22)

Пример 3. Рассмотрим задачу из примера 2 для случая, когда на систему действует постоянная сила $f = 20 \text{ Н}$. Тогда полученная система ОДУ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\frac{\mu}{m} y_1 - \frac{k}{m} y_0 + \frac{f}{m} \end{cases} \quad (25)$$

Ниже приведен код реализующий нахождение частного решения системы.

Листинг 16 Нахождение частного решения системы ОДУ.

$$\underline{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$iFundamental(t) := Fundamental(t)^{-1}$$

$$I(t) := \int_0^t iFundamental(\tau) \cdot F \, d\tau$$

$$ParticularSolution(t) := Fundamental(t) \cdot I(t)$$

На рисунке 9 представлены полученные временные зависимости.

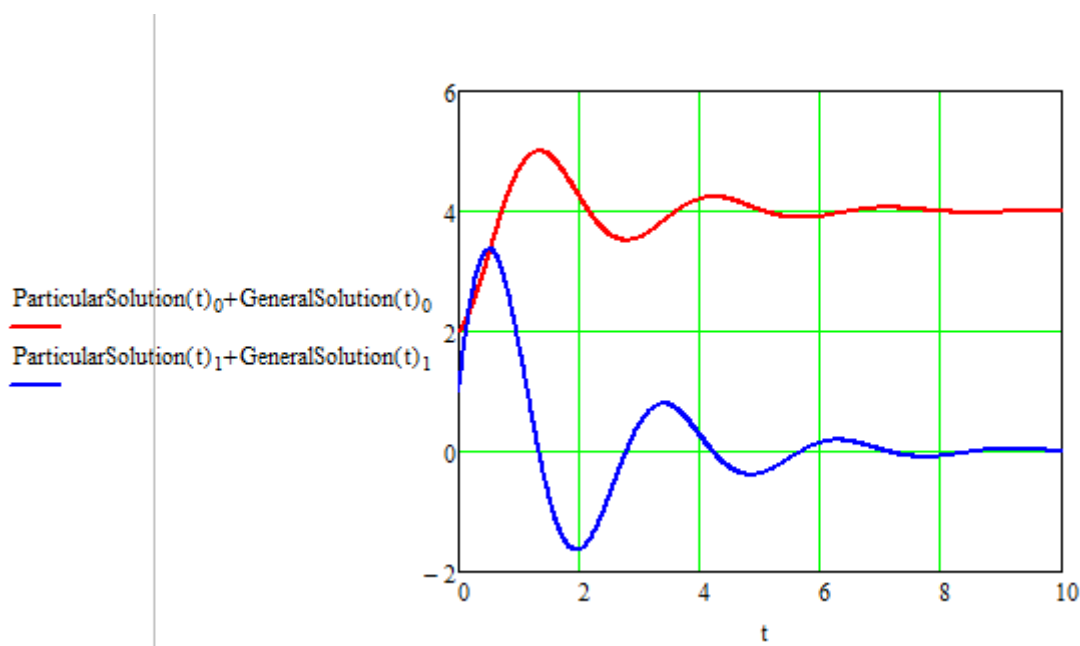


Рисунок 9 Решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $\dot{y}(t)$.

На рисунке 10 показан фазовый портрет системы.

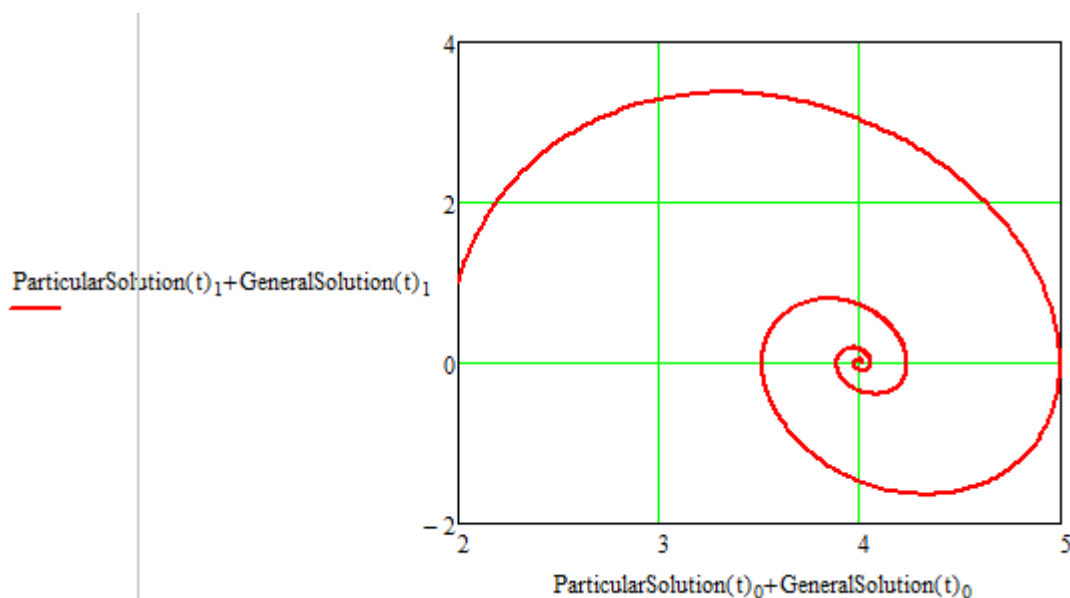


Рисунок 10 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Обратим внимание на то, что присутствие силы сместило точку к которой стремится график фазового портрета.

3. Задание на выполнение лабораторной работы

Задание на выполнение лабораторной работы состоит в нахождении аналитического решения уравнения:

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = 0 \quad (26)$$

для набора параметров, данных в таблице. Значения констант выбираются в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица 1 Задания на выполнение лабораторной работы

№	Задание
1	Параметры осциллятора: $m = 3 \text{ кг}$, $\mu = 5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Начальные условия: $y(0) = 1 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 2 \text{ м/с}$.
2	Параметры осциллятора: $m = 5 \text{ кг}$, $\mu = 4 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Начальные условия: $y(0) = 1 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 0 \text{ м/с}$.
3	Параметры осциллятора: $m = 7 \text{ кг}$, $\mu = 5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Начальные условия: $y(0) = 2 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 2 \text{ м/с}$.
4	Параметры осциллятора: $m = 2 \text{ кг}$, $\mu = 7 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Начальные условия: $y(0) = 3 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 2 \text{ м/с}$.
5	Параметры осциллятора: $m = 10 \text{ кг}$, $\mu = 8 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Начальные условия: $y(0) = 0.2 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 0.4 \text{ м/с}$.
6	Параметры осциллятора: $m = 12 \text{ кг}$, $\mu = 2 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

	Начальные условия: $y(0) = 0.4 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 2 \text{ м/с}$.
7	Параметры осциллятора: $m = 20 \text{ кг}$, $\mu = 10 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 7 \text{ Н/м}$. Начальные условия: $y(0) = 0.4 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 0.4 \text{ м/с}$.
8	Параметры осциллятора: $m = 15 \text{ кг}$, $\mu = 11 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 7 \text{ Н/м}$. Начальные условия: $y(0) = 4 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 2 \text{ м/с}$.
9	Параметры осциллятора: $m = 25 \text{ кг}$, $\mu = 8 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 4 \text{ Н/м}$. Начальные условия: $y(0) = 1 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 0.5 \text{ м/с}$.
10	Параметры осциллятора: $m = 3 \text{ кг}$, $\mu = 4 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, $k = 3 \text{ Н/м}$. Начальные условия: $y(0) = 0.5 \text{ м}$, $\dot{y}(0) = 0.5 \text{ м/с}$.

Рекомендуемая литература

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения / Математика в техническом университете. Выпуск 8., М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 336с.
2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений, М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 456с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: МЦНМО, 2012. – 352с.
4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: МЦНМО, 2012. – 384с.

5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения, М.: Едиториал УРСС, 2010. – 352с.
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 456с.
7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Математика в техническом университете. Выпуск 4. Линейная алгебра, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 336с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 280с.
9. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.: Лань, 2009. – 512с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, М.: Лань, Физматкнига, 2007. – 432с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М.: Книга по Требованию, 2012. – 667с.
12. Воднев В.Г., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы, М.: Издательство МПИ, 1989. – 527с.
13. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 336с.
14. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного, М.: Физматкнига, МФТИ, 2003. – 208с.
15. В.А. Ильин, Математический анализ / В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов // Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 720 стр., 1979 г.
16. В.С. Зарубин Математическое моделирование в технике / Серия «Математика в техническом университете» (Выпуск XXI), МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 496 стр.