МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«__» ________ 2016 г.

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДСТВ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD, ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Методические указания к выполнению практической и самостоятельной работы
по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» для студентов направления 15.04.06

Курск

УДК 621

Составители: С.И. Савин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Е.Н. Политов*

Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с применением средств программного пакета Mathcad, применительно к задачам механики: методические указания к выполнению практической и самостоятельной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.И. Савин. Курск, 2016. 22 с.: ил. 10, табл. 1. Библиогр.: с.20-21.

Методические указания содержат сведения о методах использования программного пакета Mathcad для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании движения механических систем.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 – Мехатроника и робототехника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16
Усл.печ.л. ___. Уч.-изд.л. ___ Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СРЕДСТВ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD, ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Цель работы: *изучить методы использования программного пакета Mathcad для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании движения механических систем.*

Аппаратные средства: *математический пакет Mathcad.*

1. Краткие теоретические сведения о линейных дифференциальных уравнениях

Дифференциальное уравнение вида:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \qquad (1)$$

называется ***обыкновенным линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка***. Здесь t - независимая переменная (время), $y = y(t)$ - функция времени, являющаяся решением дифференциального уравнения, $y' = \frac{dy}{dt}$ - первая производная по времени от функции $y(t)$, $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$ - n-я производная по времени от функции $y(t)$.

В случае, если функция, стоящая в правой части, равна нулю, уравнение называется однородным и принимает форму:

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (2)$$

Любое линейное однородное уравнение можно представить в виде системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого вводятся обозначения $y^{(k)} = y_{k+1}$, и уравнение (2) переписывается в виде:

$$\begin{cases} a_n y'_{n-1} + a_{n-1} y_{n-1} + a_{n-2} y_{n-2} + \ldots + a_1 y_1 + a_0 y_0 = 0 \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ \ldots \\ y'_0 = y_1 \end{cases} \qquad (3)$$

Перепишем систему (3), так чтобы в левой части оставались лишь производные:

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ \ldots \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = \dfrac{1}{a_n}\left(-a_{n-1} y_{n-1} - a_{n-2} y_{n-2} - \ldots - a_1 y_1 - a_0 y_0\right) \end{cases} \qquad (4)$$

Данную систему можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \\ \ldots \\ y'_{n-2} \\ y'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \cdots & -\dfrac{a_{n-2}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Введем обозначение $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \ldots & y_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда выражение (5) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathrm{A}\,\mathbf{y}\,. \qquad (6)$$

где A - матрица, стоящая в правой части выражения (5).

Сходным образом от любой системы линейных однородных дифференциальных уравнений (ОДУ) можно перейти к системе линейных ОДУ первого порядка. Возможет также и переход от системы из n ОДУ первого порядка к одному дифференциальному уравнению порядка n.

Матрица, стоящая в правой части выражения (5) называется ***матрицей системы линейных ОДУ первого порядка***.

Общим решением однородного линейного ОДУ называют такую функцию $y(t)$, которая обращает выражение (2) в тождество. Общим решением системы линейных ОДУ первого порядка называют такую вектор-функцию $\mathbf{y}(t)$, которая обращает выражение (6) в тождество.

Пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ - собственные числа матрицы A, а $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n$ - её собственные векторы. В случае, если все собственные числа являются действительными числами и попарно различны, ***фундаментальная система решений*** уравнения (6) включает в себя следующие решения:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Матрица, составленная из вектор-функций $\mathbf{y}_i$ называется ***матрицей фундаментальной системы решений***:

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \ldots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Общее решение системы линейных ОДУ имеет вид:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n, \tag{9}$$

где c_1, …, c_n - константы интегрирования. Константы интегрирования могут быть найдены следующим образом:

$$\mathbf{c} = \mathrm{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}(0). \tag{10}$$

где $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ - вектор констант интегрирования, $\mathrm{Y}(0)$ - значение матрицы Y в момент $t = 0$. отметим, что в случае, когда все собственные числа являются действительными числами и попарно различны $\mathrm{Y}(0)$ представляет собой матрицу, составленную из собственных векторов матрицы A. Таким образом, для решения задачи Коши требуется знание значения функции $\mathbf{y}(t)$ в момент $t = 0$.

Тогда общее решение системы (6) имеет вид:

$$\mathbf{y} = \mathrm{Y}\mathbf{c}. \tag{11}$$

Оно также может быть записано в виде:

$$\mathbf{y} = \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}(0). \tag{12}$$

В случае, если система уравнений не является однородной, требуется найти её частное решение. Пусть исходная неоднородная система ОДУ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathrm{A}\,\mathbf{y} + \mathbf{F}(t), \tag{13}$$

где $\mathbf{F}(t)$ - вектор-функция, не зависящая от фазовых координат.

Тогда частное решение находится по формуле:

$$\mathbf{y}_{\div} = \mathrm{Y} \cdot \int_0^t \mathrm{Y}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

Решение системы линейных ОДУ является суммой её общего и частного решений:

$$\mathbf{y} = \mathrm{Y} \cdot \mathrm{Y}(0)^{-1}\mathbf{y}(0) + \mathrm{Y} \cdot \int_0^t \mathrm{Y}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{F}(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

2. Методика выполнения лабораторной работы

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее движение гармонического осциллятора с затуханием:

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = 0. \tag{16}$$

где $m=1$ *кг* - масса, $\mu=5\ \frac{кг\cdot м}{с}$ - коэффициент вязкого сопротивления, $k=5\ Н/м$ - жесткость упругого элемента. Зададим начальные условия $y(0)=2$ *м*, $\dot{y}(0)=1$ *м/с*.

Приведем уравнение (16) к системе ОДУ первого порядка, введя следующие замены:

$$s_0 = y, \qquad s_1 = \dot{y}. \tag{17}$$

Тогда полученная система ОДУ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{s}_0 = s_1 \\ \dot{s}_1 = -\frac{\mu}{m} s_1 - \frac{k}{m} s_0 \end{cases}. \tag{18}$$

Переменные s_0, s_1 называют ***фазовыми***. В матричной форме данная система записывается в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Матрица данной системы линейных ОДУ первого порядка имеет вид:

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Программа в среде Mathcad, реализующая описанные действия, приведена ниже:

Листинг 1 Исходное уравнение, система ОДУ первого порядка

Исходное уравнение (линейное однородное ОДУ 2ого порядка):

$$\mathrm{ddy}(y, dy, m, \mu, k) := -\frac{1}{m}\cdot(\mu\cdot dy + k\cdot y)$$

Приведение к системе ОДУ первого порядка:

$$\mathrm{ds}(s, m, \mu, k) := \begin{bmatrix} s_1 \\ -\frac{1}{m}\cdot\left(\mu\cdot s_1 + k\cdot s_0\right) \end{bmatrix}$$

Для получения матрицы J воспользуемся тем что матрица СЛАУ $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ может быть найдена, как матрица Якоби функции y: $A = \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$.

Листинг 2 Получение матрицы системы линейных ОДУ первого порядка

Матрица системы линейных ОДУ, найденная как матрица Якоби функции $\mathrm{ds}(s, m, \mu, k)$:

$$J(m, \mu, k) := \mathrm{Jacob}(\mathrm{ds}(s, m, \mu, k), s, 2)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы построить фундаментальную систему решений найдем собственные числа и собственные векторы матрицы J.

Листинг 3 Получение собственных чисел и собственных векторов матрицы J

Собственные числа и собственные векторы матрицы:

$$\lambda(m,\mu,k) := \mathrm{eigenvals}(J(m,\mu,k)) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2\cdot m} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m} \\ \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m} - \frac{\mu}{2\cdot m} \end{pmatrix}$$

$$V(m,\mu,k) := \mathrm{eigenvecs}(J(m,\mu,k)) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}}{2\cdot k} & -\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}}{2\cdot k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа могут действительными если выполняется условие $\mu^2 - 4km > 0$. Рассмотрим случай, когда это условие выполняется.

Найдем фундаментальную систему решений.

Листинг 4 Нахождение фундаментальной системы решений

Фундаментальная система решений:

$$\mathrm{Fundamental}(t,m,\mu,k) := V(m,\mu,k)\cdot\begin{pmatrix} e^{\lambda(m,\mu,k)_0\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda(m,\mu,k)_1\cdot t} \end{pmatrix} \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{e^{-\frac{t\cdot\left(\mu+\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot m}}\cdot\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot k} & -\frac{e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}-\mu\cdot t}{2\cdot m}}\cdot\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot k} \\ e^{-\frac{t\cdot\left(\mu+\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\right)}{2\cdot m}} & e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}-\mu\cdot t}{2\cdot m}} \end{bmatrix}$$

Введем вектор начальных условий $IC = [y(0) \quad \dot{y}(0)]^{\mathrm{T}}$. Определим константы интегрирования.

Листинг 5 Определение констант интегрирования

Определение констант интегрирования:

$$\mathrm{Constants}(m,\mu,k,IC) := \mathrm{Fundamental}(0,m,\mu,k)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} IC_0 \\ IC_1 \end{pmatrix} \mathrm{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\mu\cdot IC_1}{2\cdot\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}} + \frac{k\cdot IC_0}{\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}} + \frac{IC_1}{2} \\ \frac{IC_1}{2} - \frac{k\cdot IC_0}{\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}} - \frac{\mu\cdot IC_1}{2\cdot\sqrt{\mu^2 - 4\cdot k\cdot m}} \end{pmatrix}$$

Имея фундаментальную систему решений и константы интегрирования получим общее решение системы ОДУ.

Листинг 6 Получение общего решения системы ОДУ

```
Solution(t,m,μ,k,IC) := Fundamental(t,m,μ,k)·Constants(m,μ,k,IC) simplify →
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{e^{-\frac{\mu\cdot t}{2\cdot m}}\left(e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\cdot IC_0+e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\cdot IC_0-\mu\cdot e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_0+\mu\cdot e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_0-2\cdot m\cdot e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_1+2\cdot m\cdot e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_1\right)}{2\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}} \\ \dfrac{e^{-\frac{\mu\cdot t}{2\cdot m}}\left(e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\cdot IC_1+e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}\cdot IC_1+\mu\cdot e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_1-\mu\cdot e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_1+2\cdot k\cdot e^{-\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_0-2\cdot k\cdot e^{\frac{t\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}}{2\cdot m}}\cdot IC_0\right)}{2\cdot\sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}} \end{bmatrix}$$

Введя замену $\sqrt{\mu^2-4km}=\xi$ можем упростить полученное решение.

Листинг 7 Решение системы ОДУ после ввода замены.

$$\zeta = \sqrt{\mu^2-4\cdot k\cdot m}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{e^{-\frac{\mu\cdot t}{2\cdot m}}\cdot\left(\zeta\cdot\cosh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_0+\mu\cdot\sinh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_0+2\cdot m\cdot\sinh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_1\right)}{\zeta} \\ -\dfrac{e^{-\frac{\mu\cdot t}{2\cdot m}}\cdot\left(\mu\cdot\sinh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_1-\zeta\cdot\cosh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_1+2\cdot k\cdot\sinh\left(\frac{\zeta\cdot t}{2\cdot m}\right)\cdot IC_0\right)}{\zeta} \end{bmatrix}$$

Подставим числа вместо использованных констант.

Листинг 8 Подстановка чисел в полученные выражения, упрощение их записи.

$m := 1 \quad \mu := 5 \quad k := 5 \qquad IC := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
Solution(t) := Solution(t,m,μ,k,IC)
ds(s) := ds(s,m,μ,k)
```

$t := 0, 10^{-3} .. 10$

В листинге 9 показано выражение для общего решения системы ОДУ, полученное после подстановки чисел.

Листинг 9 Общее решение системы ОДУ

$$\mathrm{Solution}(t) := \mathrm{Solution}(t, m, \mu, k, IC) \;\Big|\; \begin{matrix}\mathrm{simplify} \\ \mathrm{float}, 3\end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.68 \cdot e^{-1.38 \cdot t} + -1.68 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \\ -0.5 \cdot e^{-3.62 \cdot t} \cdot \left(10.2 \cdot e^{2.24 \cdot t} - 12.2\right) \end{bmatrix}$$

Построим график полученного решения (см. рисунок 1).

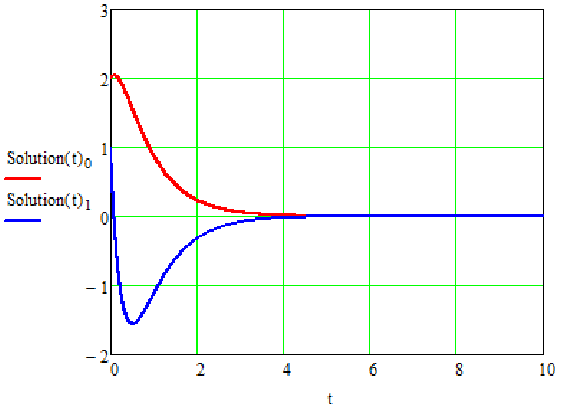

Рисунок 1 Общее решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $\dot{y}(t)$.

На рисунке 2 показан фазовый портрет системы.

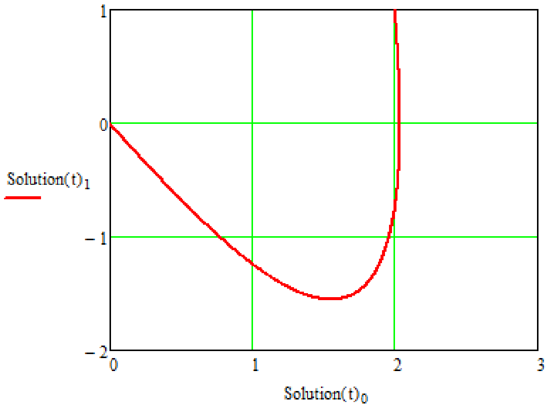

Рисунок 2 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Построим векторное поле, описываемое изучаемой системой. Векторы поля получаются из уравнения (18), ставящего в соответствие каждой паре значений s_0, s_1 вектор производных $[\dot{s}_0 \quad \dot{s}_1]^T$ Для того, чтобы построить векторное поле в пакете Mathcad необходимо сформировать матрицу $V_{j,k} \in C^{n \times m}$ с комплексными элементами, по следующей формуле:

$$\mathrm{V}_{j,k} = (k\rho_1 + \sigma_1) + i \cdot \left(-\frac{\mu}{m}(k\rho_1 + \sigma_1) - \frac{k}{m}(j\rho_0 + \sigma_0) \right) \quad (21)$$

где ρ_0, ρ_1 - масштабирующие коэффициенты, σ_0, σ_1 - коэффициенты, определяющие левую нижнюю границу векторного поля. Правая верхняя граница векторного поля определяется выражениями $(n\rho_0 + \sigma_0), (m\rho_1 + \sigma_1)$. Код, реализующий генерацию описанной матрицы, представлен ниже:

Листинг 10 Генерация матрицы для составления векторного поля в Mathcad

$n := 10 \qquad \rho_0 := 0.2 \qquad \sigma_0 := 1$

$m := 10 \qquad \rho_1 := 0.2 \qquad \sigma_1 := 1$

$$V := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n \\ \quad \text{for } k \in 0..m \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} cs \leftarrow ds\left(\begin{pmatrix} j \cdot \rho_0 - \sigma_0 \\ k \cdot \rho_1 - \sigma_1 \end{pmatrix}\right) \\ Out_{j,k} \leftarrow cs_0 + i \cdot cs_1 \end{array} \right. \\ Out \end{array} \right.$$

На рисунке 3 показано полученное векторное поле.

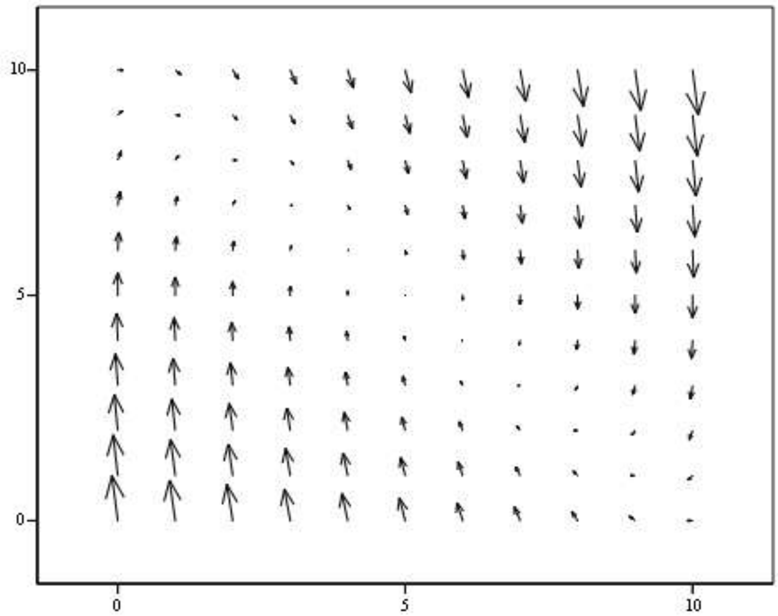

Рисунок 3 Векторное поле, определяемое выражением (21)

Обратим внимание, что векторы, показанные на рисунке 3 имеют разную длину. В данном случае из-за этого достаточно сложно визуально оценить направление векторов на диагонали данного поля. Чтобы избежать данной проблемы модно предварительно нормализовать векторы, по которым строится поле. Это делается с использованием следующей формулы:

$$\mathrm{V}_{j,k} = \frac{(k\rho_1+\sigma_1)+i\cdot\left(-\frac{\mu}{m}(k\rho_1+\sigma_1)-\frac{k}{m}(j\rho_0+\sigma_0)\right)}{\sqrt{(k\rho_1+\sigma_1)^2+\left(-\frac{\mu}{m}(k\rho_1+\sigma_1)-\frac{k}{m}(j\rho_0+\sigma_0)\right)^2}} \qquad (22)$$

Код, реализующий генерацию описанной матрицы, представлен ниже:

Листинг 11 Генерация матрицы для составления векторного поля в Mathcad

```
n := 10        ρ0 := 0.2      σ0 := 1
m := 10        ρ1 := 0.2      σ1 := 1
```

```
Vn := | for j ∈ 0..n
      |   for k ∈ 0..m
      |     | cs ← ds(((j·ρ0 − σ0), (k·ρ1 − σ1)))
      |     | cs ← (0, 0)  on error cs ← cs / √(cs^T·cs)
      |     | Out[j,k] ← cs0 + i·cs1
      | Out
```

$$Vn := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n \\ \quad \text{for } k \in 0..m \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} cs \leftarrow ds\left(\begin{pmatrix} j\cdot\rho_0 - \sigma_0 \\ k\cdot\rho_1 - \sigma_1 \end{pmatrix}\right) \\ cs \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ on error } cs \leftarrow \dfrac{cs}{\sqrt{cs^T\cdot cs}} \\ Out_{j,k} \leftarrow cs_0 + i\cdot cs_1 \end{array} \right. \\ Out \end{array} \right.$$

На рисунке 4 показано полученное векторное поле.

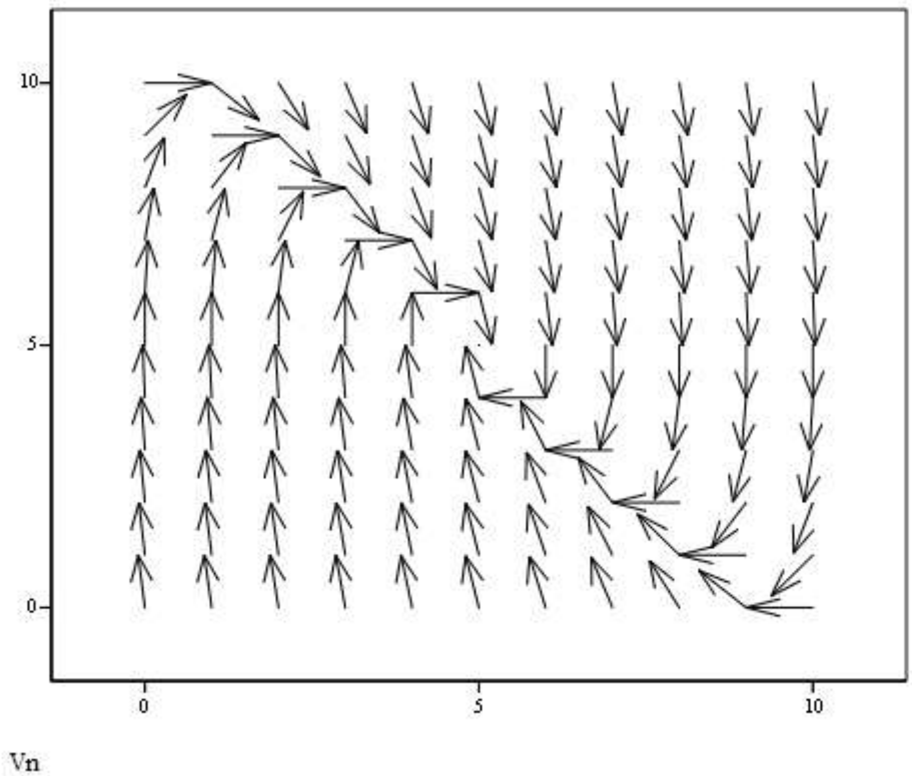

Рисунок 4 Векторное поле, определяемое выражением (22)

Пример 2. Рассмотрим задачу из примера 1 с другими значениями параметров:

$$m = 1\ кг, \qquad \mu = 1\ \frac{кг \cdot м}{с}, \qquad k = 5\ Н/м \qquad (23)$$

При таких значениях параметров матрица J системы линейных ОДУ будет иметь комплексные собственные числа, так как выполнено условие $\mu^2 - 4km < 0$. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы J:

Листинг 12 Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы J

$$\lambda := \mathrm{eigenvals}(J(m,\mu,k)) = \begin{pmatrix} -0.5+2.179i \\ -0.5-2.179i \end{pmatrix}$$

$$V := \mathrm{eigenvecs}(J(m,\mu,k)) = \begin{pmatrix} -0.091-0.398i & -0.091+0.398i \\ 0.913 & 0.913 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы получить фундаментальную систему решений следует используя формулу Эйлера привести одно из полученных комплекснозначных решений к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j = & e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}\left(\mathrm{Re}(\mathbf{v}_j)\cos(\mathrm{Im}(\lambda_j)\cdot t) - \mathrm{Im}(\mathbf{v}_j)\sin(\mathrm{Im}(\lambda_j)\cdot t)\right) - \\ & - i\cdot e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)t}\left(\mathrm{Re}(\mathbf{v}_j)\sin(\mathrm{Im}(\lambda_j)\cdot t) + \mathrm{Im}(\mathbf{v}_j)\cos(\mathrm{Im}(\lambda_j)\cdot t)\right) \end{aligned}, \qquad (24)$$

где λ_j - комплексное собственное число матрицы J, а $\mathbf{v}_j$ - соответствующий этому числу собственный вектор.

Действительная и комплексное слагаемые являются линейно независимыми решениями ОДУ и образуют фундаментальную систему решений. Ниже приведен код, реализующий получение указанных решений.

Листинг 13 Поучение линейно независимых решений ОДУ для случая комплексных собственных чисел.

$$f1(t) := e^{\mathrm{Re}(\lambda_0)\cdot t}\cdot\left(\mathrm{Re}\left(V^{\langle 0\rangle}\right)\cdot\cos\left(\mathrm{Im}(\lambda_0)\cdot t\right) - \mathrm{Im}\left(V^{\langle 0\rangle}\right)\cdot\sin\left(\mathrm{Im}(\lambda_0)\cdot t\right)\right)$$

$$f2(t) := e^{\mathrm{Re}(\lambda_0)\cdot t}\cdot\left(\mathrm{Im}\left(V^{\langle 0\rangle}\right)\cdot\cos\left(\mathrm{Im}(\lambda_0)\cdot t\right) + \mathrm{Re}\left(V^{\langle 0\rangle}\right)\cdot\sin\left(\mathrm{Im}(\lambda_0)\cdot t\right)\right)$$

Таким образом можем составить матрицу фундаментальной системы решений.

Листинг 14 Составление матрицы фундаментальной системы решений

$$\text{Fundamental}(t) := \left| \begin{array}{l} \text{Out}^{\langle 0\rangle} \leftarrow \text{f1}(t) \text{ simplify} \\ \text{Out}^{\langle 1\rangle} \leftarrow \text{f2}(t) \\ \text{Out} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} -e^{-0.5\cdot t}\cdot(0.091\cdot\cos(2.179\cdot t) - 0.398\cdot\sin(2.179\cdot t)) & -e^{-0.5\cdot t}\cdot(0.398\cdot\cos(2.179\cdot t) + 0.091\cdot\sin(2.179\cdot t)) \\ 0.913\cdot e^{-0.5\cdot t}\cdot\cos(2.179\cdot t) & 0.913\cdot e^{-0.5\cdot t}\cdot\sin(2.179\cdot t) \end{bmatrix}$$

Используя составленную матрицу находим решение системы ОДУ.

Листинг 15 Нахождение общего решения системы ОДУ.

$$\text{Solution}(t) := \text{Solution}(t, m, \mu, k, IC) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} 3.68\cdot e^{-1.38\cdot t} + -1.68\cdot e^{-3.62\cdot t} \\ -0.5\cdot e^{-3.62\cdot t}\cdot\left(10.2\cdot e^{2.24\cdot t} - 12.2\right) \end{bmatrix}$$

На рисунке 5 представлены полученные временные зависимости.

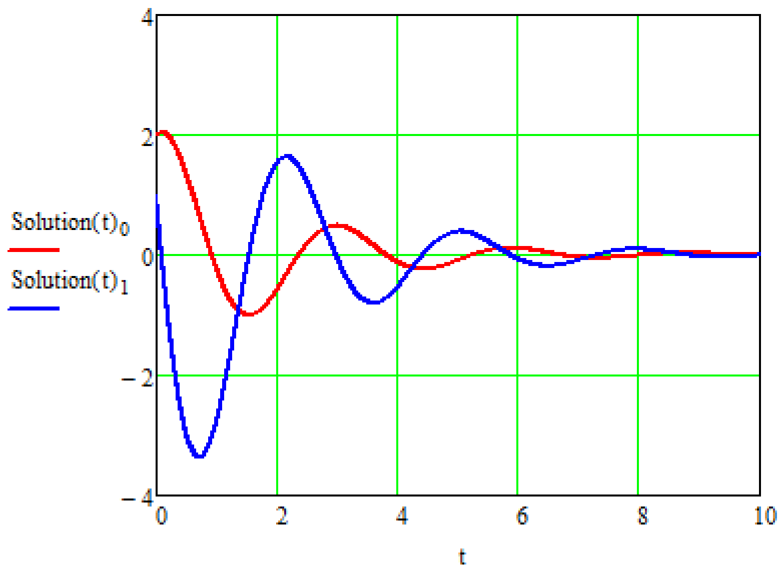

Рисунок 5 Общее решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $\dot{y}(t)$.

На рисунке 6 показан фазовый портрет системы.

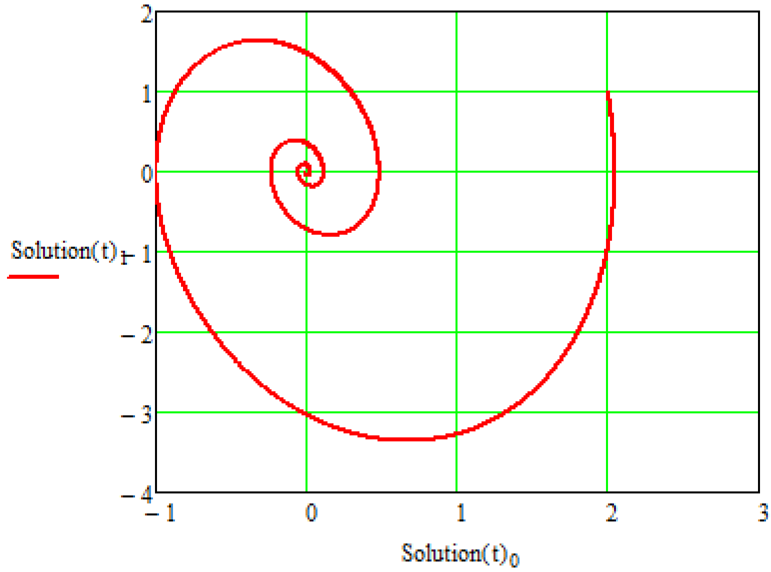

Рисунок 6 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Построим векторное поле, описываемое изучаемой системой (см. рисунки 7 и 8).

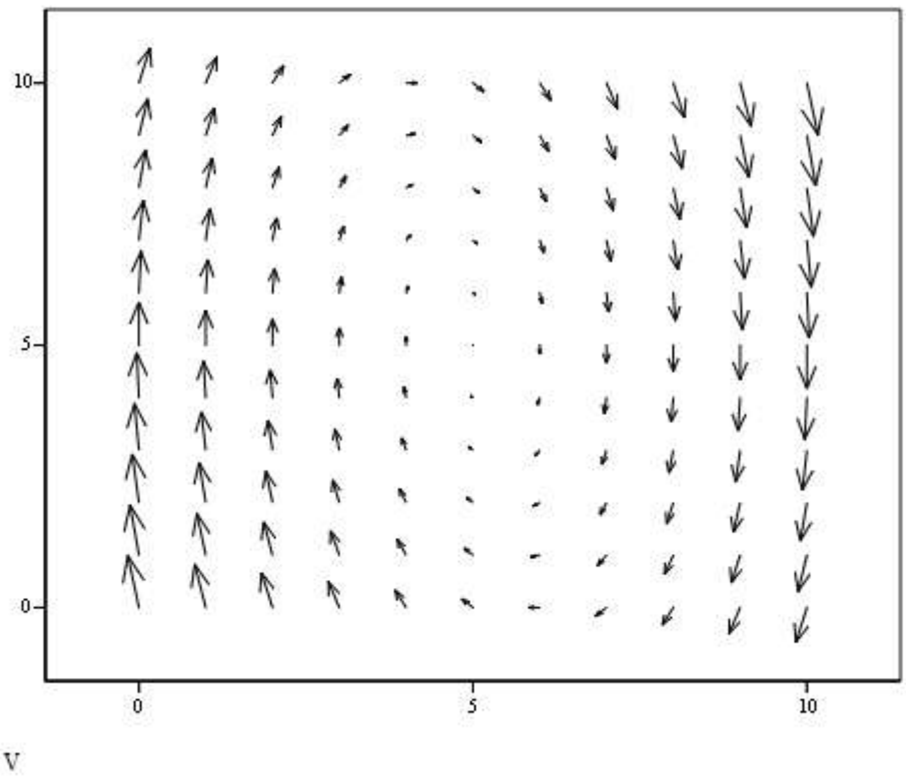

Рисунок 7 Векторное поле, определяемое выражением (21)

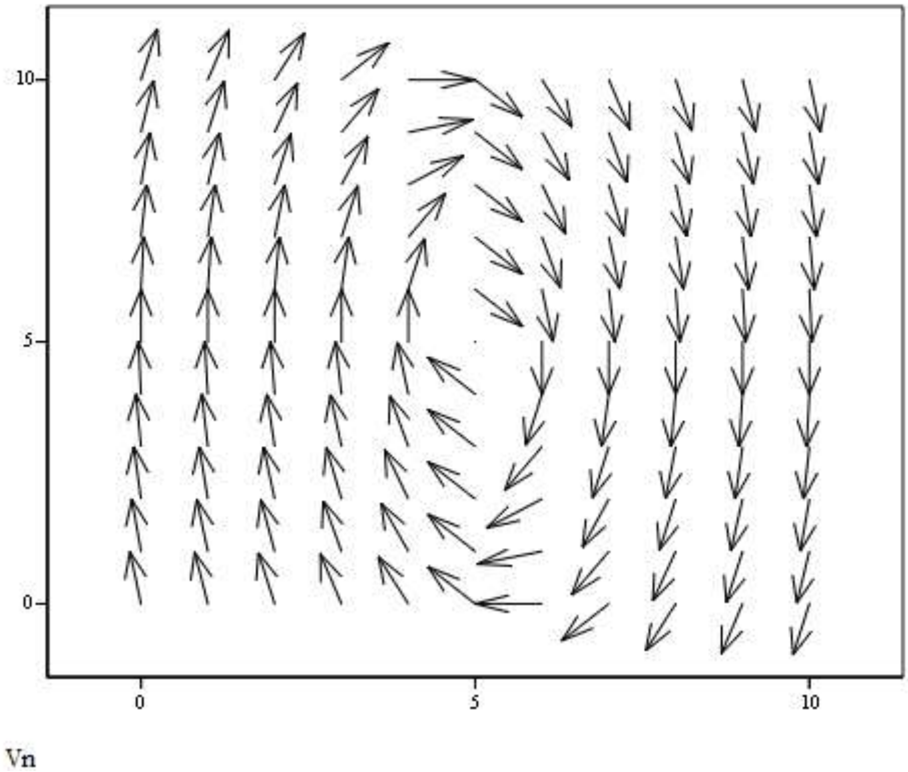

Рисунок 8 Векторное поле, определяемое выражением (22)

Пример 3. Рассмотрим задачу из примера 2 для случая, когда на систему действует постоянная сила $f = 20$ H. Тогда полученная система ОДУ будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\dfrac{\mu}{m} y_1 - \dfrac{k}{m} y_0 + \dfrac{f}{m} \end{cases} . \tag{25}$$

Ниже приведен код реализующий нахождение частного решения системы.

Листинг 16 Нахождение частного решения системы ОДУ.

$$F := \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{iFundamental}(t) := \mathrm{Fundamental}(t)^{-1}$$

$$I(t) := \int_0^t \mathrm{iFundamental}(\tau) \cdot F \, d\tau$$

$$\mathrm{ParticularSolution}(t) := \mathrm{Fundamental}(t) \cdot I(t)$$

На рисунке 9 представлены полученные временные зависимости.

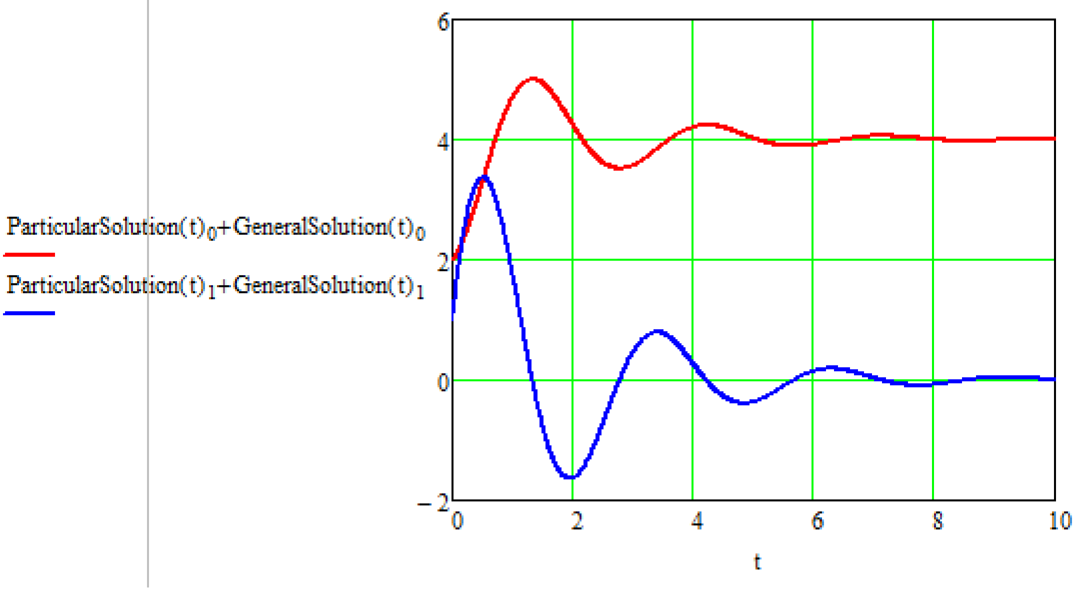

Рисунок 9 Решение системы ОДУ – временные зависимости перемещения $y(t)$ и скорости $\dot{y}(t)$.

На рисунке 10 показан фазовый портрет системы.

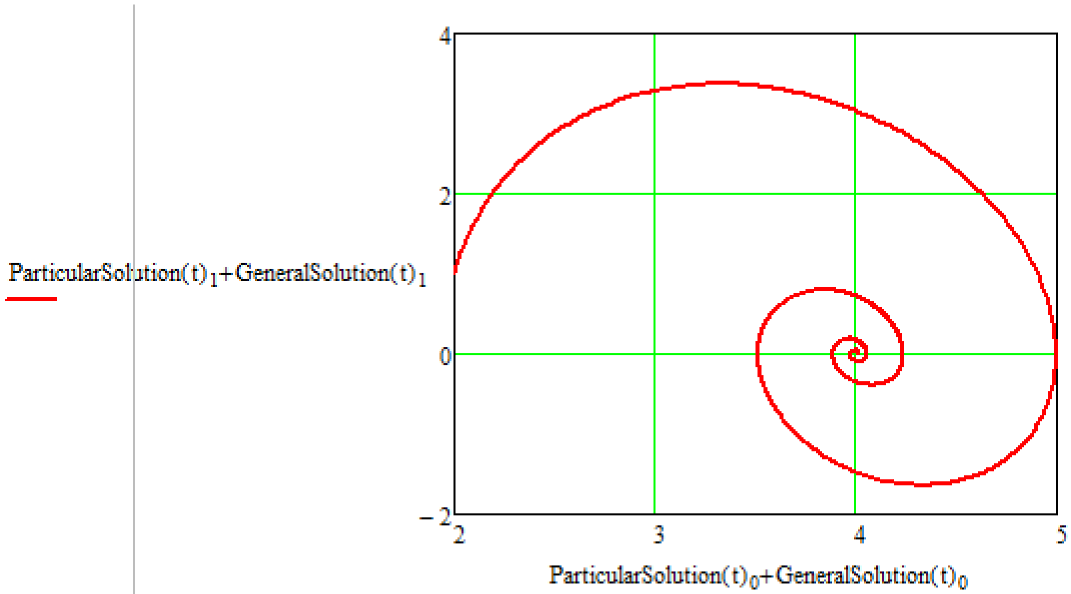

Рисунок 10 Фазовый портрет системы – зависимость $\dot{y} = \dot{y}(y)$.

Обратим внимание на то, что присутствие силы сместило точку к которой стремится график фазового портрета.

3. Задание на выполнение лабораторной работы

Задание на выполнение лабораторной работы состоит в нахождении аналитического решения уравнения:

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = 0 \qquad (26)$$

для набора параметров, данных в таблице. Значения констант выбираются в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица 1 Задания на выполнение лабораторной работы

№	Задание
1	Параметры осциллятора: $m = 3$ *кг*, $\mu = 5\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 4\ {}^{Н}\!/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 1$ *м*, $\dot{y}(0) = 2$ *м/с*.
2	Параметры осциллятора: $m = 5$ *кг*, $\mu = 4\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 3\ {}^{Н}\!/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 1$ *м*, $\dot{y}(0) = 0$ *м/с*.
3	Параметры осциллятора: $m = 7$ *кг*, $\mu = 5\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 2\ {}^{Н}\!/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 2$ *м*, $\dot{y}(0) = 2$ *м/с*.
4	Параметры осциллятора: $m = 2$ *кг*, $\mu = 7\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 3\ {}^{Н}\!/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 3$ *м*, $\dot{y}(0) = 2$ *м/с*.
5	Параметры осциллятора: $m = 10$ *кг*, $\mu = 8\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 4\ {}^{Н}\!/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 0.2$ *м*, $\dot{y}(0) = 0.4$ *м/с*.
6	Параметры осциллятора: $m = 12$ *кг*, $\mu = 2\ \frac{кг \cdot м}{с}$, $k = 2\ {}^{Н}\!/_{м}$.

	Начальные условия: $y(0) = 0.4\ м,\ \dot{y}(0) = 2\ м/с$.
7	Параметры осциллятора: $m = 20\ кг,\ \mu = 10\ \frac{кг \cdot м}{с},\ k = 7\ Н/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 0.4\ м,\ \dot{y}(0) = 0.4\ м/с$.
8	Параметры осциллятора: $m = 15\ кг,\ \mu = 11\ \frac{кг \cdot м}{с},\ k = 7\ Н/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 4\ м,\ \dot{y}(0) = 2\ м/с$.
9	Параметры осциллятора: $m = 25\ кг,\ \mu = 8\ \frac{кг \cdot м}{с},\ k = 4\ Н/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 1\ м,\ \dot{y}(0) = 0.5\ м/с$.
10	Параметры осциллятора: $m = 3\ кг,\ \mu = 4\ \frac{кг \cdot м}{с},\ k = 3\ Н/_{м}$. Начальные условия: $y(0) = 0.5\ м,\ \dot{y}(0) = 0.5\ м/с$.

Рекомендуемая литература

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения / Математика в техническом университете. Выпуск 8., М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 336с.
2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений, М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 456с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: МЦНМО, 2012. – 352с.
4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: МЦНМО, 2012. – 384с.

5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения, М.: Едиториал УРСС, 2010. – 352с.

6. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 456с.

7. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Математика в техническом университете. Выпуск 4. Линейная алгебра, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 336с.

8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 280с.

9. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.: Лань, 2009. – 512с.

10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры, М.: Лань, Физматкнига, 2007. – 432с.

11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М.: Книга по Требованию, 2012. – 667с.

12. Воднев В.Г., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы, М.: Издательство МПИ, 1989. – 527с.

13. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 336с.

14. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного, М.: Физматкнига, МФТИ, 2003. – 208с.

15. В.А. Ильин, Математический анализ / В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов // Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 720 стр., 1979 г.

16. В.С. Зарубин Математическое моделирование в технике / Серия «Математика в техническом университете» (Выпуск XXI), МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010, 496 стр.