

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 04.09.2023 15:19:24

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c14ca8bf77c947dffa49516b55cd089

**МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



**ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ОЧИСТКИ  
СИГНАЛА ОТ ШУМА**

Методические указания к выполнению практической и самостоятельной работы по дисциплине «Информационные системы роботов и обработка сигналов» для студентов направления 15.04.06 Мехатроника и робототехника

Курск

УДК 621

Составители: А.В. Мальчиков, С.И. Савин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Е.Н. Политов*

**Применение разложения в тригонометрический ряд Фурье для очистки сигнала от шума:** методические указания к выполнению практической и самостоятельной работы по дисциплине "Информационные системы роботов и обработка сигналов" / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.И. Савин. Курск, 2017. 10 с.: ил. 8, табл. 1. Библиогр.: с. 9.

Методические указания содержат сведения методе применения разложения в тригонометрический ряд Фурье для очистки зашумленного сигнала.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направлений подготовки 15.04.06 – Мехатроника и робототехника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *14.09.17*. Формат 60x84 1/16  
Усл.печ.л. *0,58*. Уч.-изд.л. *0,52* Тираж 100 экз. Заказ. *657*  
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.  
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

# ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ОЧИСТКИ СИГНАЛА ОТ ШУМА

**Цель работы:** изучение методов реализации разложения в тригонометрический ряд Фурье периодических и не периодических сигналов средствами математического пакета MathCAD, а также использования полученного разложения для очистки сигнала от шума.

**Объект исследования:** тригонометрические ряды Фурье.

**Аппаратные средства:** математический пакет MathCAD.

## 1. Краткие теоретические сведения

Периодическая функция может быть представлена своим разложением в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \cdot t) + b_n \sin(n \cdot t)], \quad (1)$$

где  $a_0, a_n, b_n$  – коэффициенты ряда Фурье. Для их вычисления можно воспользоваться следующими формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n \cdot t) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n \cdot t) dt \quad (2)$$

Более общая форма записи данного разложения имеет следующий вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) \right], \quad (3)$$

Для вычисления коэффициентов ряда следует воспользоваться следующими формулами:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) dt, \quad (4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) dt \quad (5)$$

## 2. Методика выполнения лабораторной работы

Зададимся некоторой полигармонической функцией  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)] \quad (6)$$

В Mathcad это реализуется, например, следующим кодом:

$$f(t) := 15 \sin(2 \cdot t) + 3 \sin(40 \cdot t) + 1 \sin(20 \cdot t) + 2 \cos(45 \cdot t) + 4 \cos(30 \cdot t) + 5 \cos(55 \cdot t)$$

Покажем график функции  $f(t)$  (см. рисунок 1).

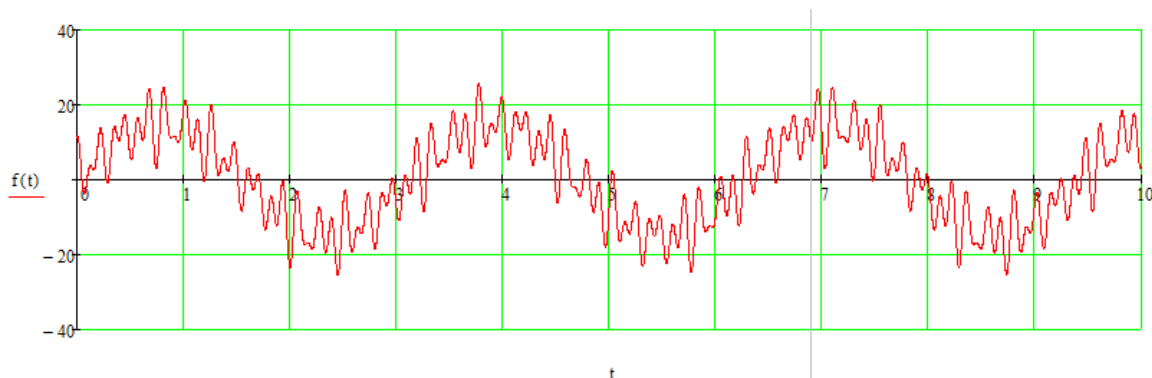


Рисунок 1 Зависимость  $f(t)$

Для реализации разложения в ряд Фурье воспользуемся аналитической формой выражений для коэффициентов ряда:

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$\text{GetA}(n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt$$

$$\text{GetB}(n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt$$

Если требуется получить большое количество членов тригонометрического ряда удобно использовать вызов записанных выше функций в цикле:

$$a := \left[ \begin{array}{l} \text{for } i \in 1.. \text{Number} \\ \text{Out}_i \leftarrow \text{GetA}(i) \\ \text{Out} \end{array} \right. \quad b := \left[ \begin{array}{l} \text{for } i \in 1.. \text{Number} \\ \text{Out}_i \leftarrow \text{GetB}(i) \\ \text{Out} \end{array} \right.$$

Аппроксимация тригонометрическим рядом  $F(t)$  исходной функции имеет следующий вид:

$$\tilde{F}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\text{Number}} (a_n \cdot \cos(n \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot t))$$

Покажем на одном рисунке исходную функцию и её аппроксимацию:

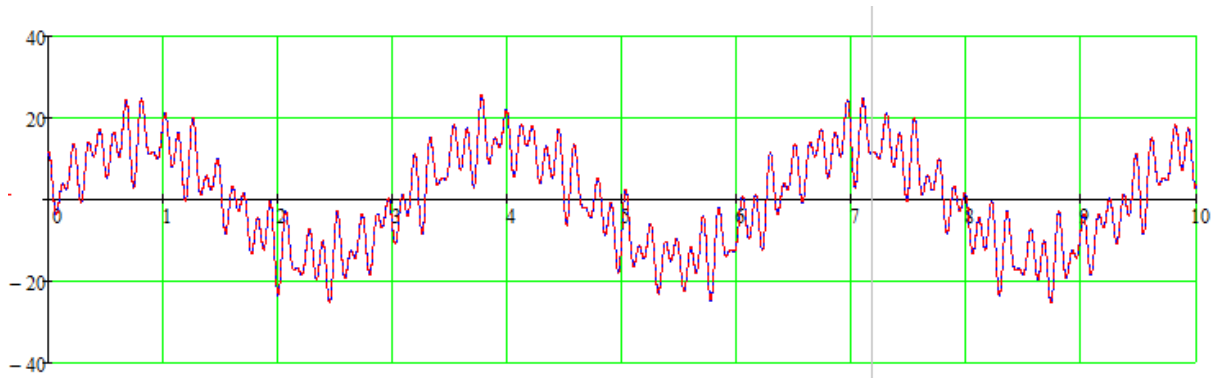


Рисунок 2 Зависимости  $F(t)$  и  $f(t)$

Можем видеть, что зависимости совпали. Набор коэффициентов тригонометрического ряда можно рассматривать как спектр функции. Обработаем этот спектр пороговой обработкой, реализованной следующим кодом:

```
threshold := 10
```

```
A := | for i ∈ 1..Number
      | Outi ← if(i < threshold, ai, 0)
      | Out
```

```
B := | for i ∈ 1..Number
      | Outi ← if(i < threshold, bi, 0)
      | Out
```

Построим функцию, используя полученные в результате обработки значения спектра:

$$F_{\text{filtered}}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\text{Number}} (A_n \cdot \cos(n \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot t))$$

Исходная и полученная зависимость показана на рисунке 3

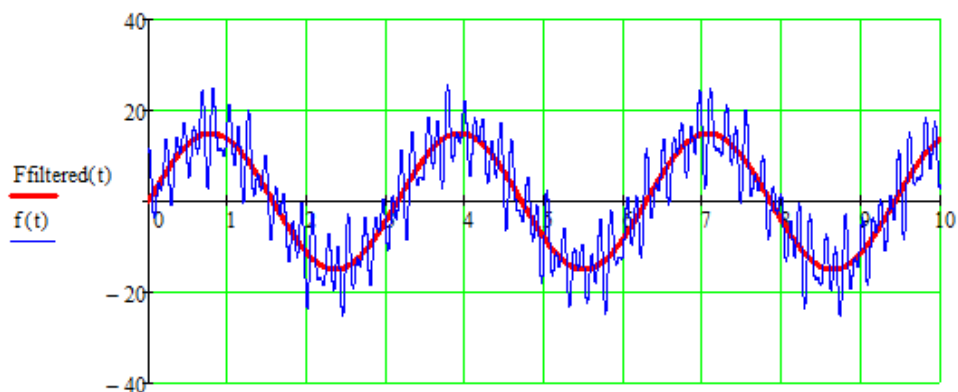


Рисунок 3 Зависимости  $F_{\text{filtered}}(t)$  и  $f(t)$

Рассмотрим случай, когда функция  $f(t)$  непериодическая (см. рисунок 4):

$$f(t) = \sum_{i=1}^n [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)] + \sum_{i=1}^m (a_i t^i) \quad (7)$$

Функцию указанного вида можно получить, например, используя следующий код:

```
f(t) := 15 sin(2*t) + 3 sin(40*t) + 1 sin(20*t) + 2 cos(45*t) + 4 cos(30*t) + 5 cos(55*t) + 10t
```

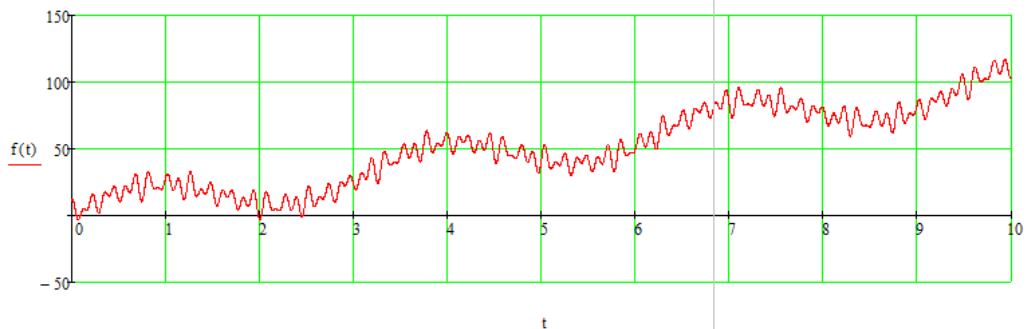


Рисунок 4 Непериодическая зависимость  $f(t)$

Используя написанный ранее код произведем аппроксимацию заданной непериодической функции тригонометрическим рядом. Результат показан на рисунке 5.

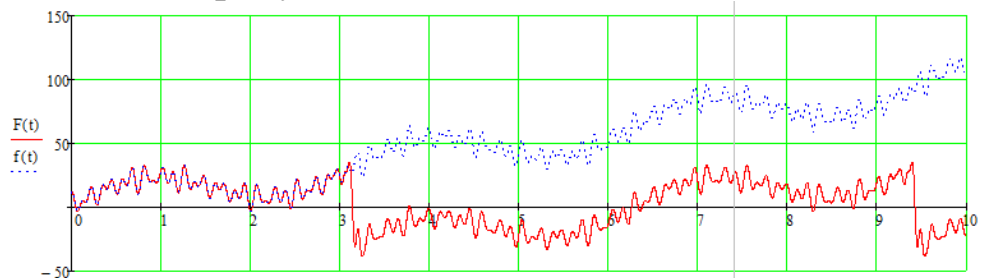


Рисунок 5 Зависимости  $F(t)$  и  $f(t)$

Обратим внимание, что аппроксимация достаточно точна на некотором интервале, и затем зависимость, заданная тригонометрическим рядом повторяется.

После очистки спектра и восстановления сигнала получим следующую зависимость (см. рисунок 6).

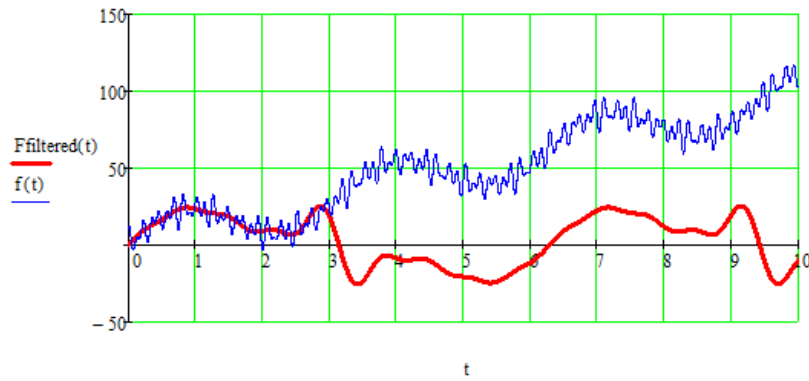


Рисунок 6 Зависимости  $F_{filtered}(t)$  и  $f(t)$

Линейная составляющая функции  $f(t)$  привносит в спектр шум на низких частотах, что приводит к искажению сигнала, как это показано на рисунке 6.

Используем следующий код, позволяющий задавать размер период аппроксимации:

```

L := 2π
a0 := 1/L ∫-LL f(t) dt
GetA(n) := 1/L ∫-LL f(t) · cos(n·π·t/L) dt
GetB(n) := 1/L ∫-LL f(t) · sin(n·π·t/L) dt
Number := 300
a := for i ∈ 1..Number Outi ← GetA(i)
b := for i ∈ 1..Number Outi ← GetB(i)
F(t) := a0/2 + ∑n=1Number (an · cos(n·π·t/L) + bn · sin(n·π·t/L))

```

Период аппроксимации определяет отрезок времени, на котором исходная функция будет аппроксимирована точно. Он определяется переменной  $L$ .

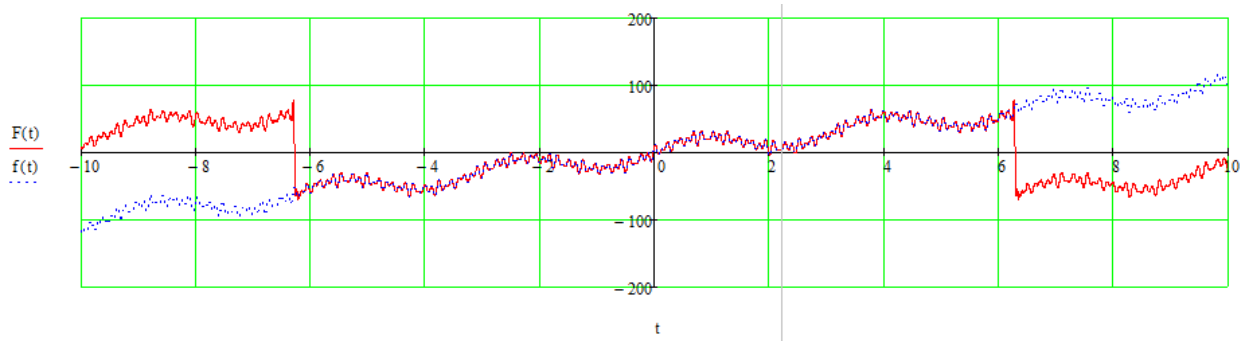


Рисунок 7 Зависимости  $F(t)$  и  $f(t)$

После очистки сигнал выглядит следующим образом:

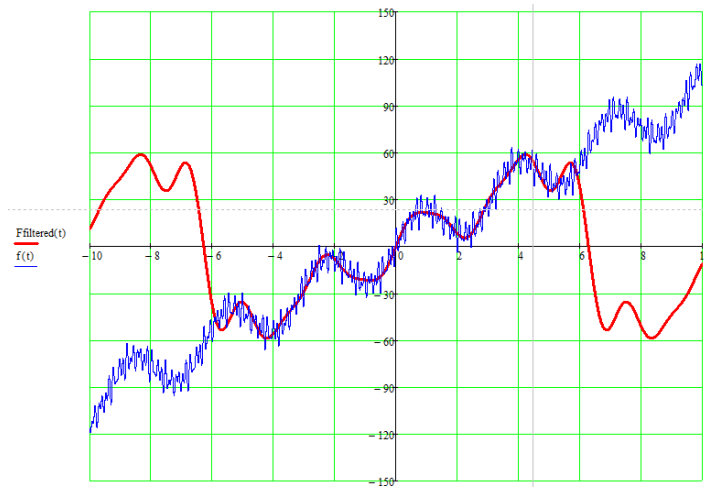


Рисунок 8 Зависимости  $F_{filtered}(t)$  и  $f(t)$

### 3. Задание на выполнение самостоятельной работы

Задание на выполнение самостоятельной работы состоит в разложении в ряд Фурье и последующей очистке полигармонических и непериодических сигналов, используя все методы, описанные в данной работе.

Исходные функции следует выбирать из таблицы 1 в соответствии с номером студента в списке группы.

Таблица 1 Задания на выполнение лабораторной работы

№	Задание
1	$f(t) = 10\sin(2 \cdot t) + 2\sin(12 \cdot t) + 1.5\sin(10 \cdot t)$ $f(t) = 0.35\sin(10 \cdot t) + 0.15\sin(8 \cdot t) + 0.35\sin(6 \cdot t) + 3t$

2	$f(t) = 0.2 \sin(17 \cdot t) + 0.1 \cos(16 \cdot t) + 15 \cos(3 \cdot t)$ $f(t) = 10.45 \sin(2 \cdot t) + 0.65 \sin(10.5 \cdot t) + 0.05 \sin(18 \cdot t) + 0.5 \sin(19 \cdot t) + 4t$
3	$f(t) = 0.35 \sin(10 \cdot t) + 0.15 \sin(8 \cdot t) + 0.35 \sin(6 \cdot t)$ $f(t) = 12.85 \sin(1.7 \cdot t) + 0.9 \sin(41 \cdot t) + 0.1 \sin(10 \cdot t) + 0.2 \sin(12 \cdot t) + 10t^2$
4	$f(t) = 10.15 \sin(2 \cdot t) + 0.45 \sin(8 \cdot t) + 0.85 \sin(12 \cdot t) + 1.05 \sin(10.5 \cdot t)$ $f(t) = 0.35 \sin(10 \cdot t) + 0.15 \sin(8 \cdot t) + 0.35 \sin(6 \cdot t) + 10t + 7t^2$
5	$f(t) = 0.25 \sin(13 \cdot t) + 0.35 \sin(12 \cdot t) + 0.75 \sin(5 \cdot t) + 11.05 \sin(1.2 \cdot t)$ $f(t) = 10.15 \sin(2 \cdot t) + 0.45 \sin(8 \cdot t) + 0.85 \sin(12 \cdot t) + 1.05 \sin(10.5 \cdot t) + 5t^3$
6	$f(t) = 10.45 \sin(2 \cdot t) + 0.65 \sin(10.5 \cdot t) + 0.05 \sin(18 \cdot t) + 0.5 \sin(19 \cdot t)$ $f(t) = 0.1 \cos(14 \cdot t) + 0.7 \sin(6 \cdot t) + 25.6 \sin(t) + 0.9 \sin(8 \cdot t) + 10t + 2t^2$
7	$f(t) = 12.85 \sin(1.7 \cdot t) + 0.9 \sin(41 \cdot t) + 0.1 \sin(10 \cdot t) + 0.2 \sin(12 \cdot t)$ $f(t) = 10 \sin(2 \cdot t) + 2 \sin(12 \cdot t) + 1.5 \sin(10 \cdot t) + 5t^3 + 2t^2 + 3t$
8	$f(t) = 0.6 \cos(14 \cdot t) + 10.95 \sin(1.1 \cdot t) + 0.5 \sin(9t) + 0.7 \sin(30 \cdot t) + 0.8 \sin(12 \cdot t)$ $f(t) = 0.35 \sin(10 \cdot t) + 0.15 \sin(8 \cdot t) + 0.35 \sin(6 \cdot t) + 30 + t$
9	$f(t) = 0.1 \cos(14 \cdot t) + 0.7 \sin(6 \cdot t) + 25.6 \sin(t) + 0.85 \sin(12 \cdot t) + 0.9 \sin(8 \cdot t)$ $f(t) = 10 \sin(2 \cdot t) + 2 \sin(12 \cdot t) + 1.5 \sin(10 \cdot t) + 10t + 3$
10	$f(t) = 0.5 \cos(12 \cdot t) + 0.55 \sin(17 \cdot t) + 0.65 \sin(30 \cdot t) + 0.3 \sin(15 \cdot t) + 12.45 \sin(t)$ $f(t) = 12.85 \sin(1.7 \cdot t) + 0.9 \sin(41 \cdot t) + 0.1 \sin(10 \cdot t) + 0.2 \sin(12 \cdot t) + 3t^2 + t + 2$

#### 4. Оформление отчета о выполнении работы

Требования к отчету:

- отчет содержит титульный лист, описание выполняемого задания, описание проделанной работы, анализ полученных результатов, выводы, список использованной литературы;
- отчет выполняется на листах формата А4, 14 кегль, одинарный межстрочный интервал;



- список литературы оформляется согласно ГОСТ 7.1-2003.

### Рекомендуемая литература

1. Кельберт М. Я., Что такое преобразование Фурье?, Матем. просв., сер. 3, 4, МЦНМО, М., с 188–202, 2000 г.
2. Привалов И.И. Ряды Фурье / Либроком, 168 стр., 2011 г.
3. Вернер Вольфганг Рогозинский, Годфри Гарольд Харди Ряды Фурье / Либроком 152 стр., 2009 г.
4. Власова Е.А. Ряды / МГТУ им. Н. Э. Баумана, Математика в техническом университете, 2006 г., 616 стр.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа / Физматлит, 2012, 576 стр.
6. Воротников С.А. Информационные устройства робототехнических систем / Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 384 стр., 2005 г.
7. Яцун, С.Ф. Информационные устройства и системы в мехатронике [Текст]: учебное пособие / С.Ф. Яцун, П.А. Безмен // Курск: Юго-Зап. гос. ун-т. – 2013. – 240 с.
8. Яцун, С.Ф. Датчики и обработка сигналов в мехатронике [Текст]: учебное пособие / С.Ф. Яцун, П.А. Безмен // Курск: Юго-Зап. гос. ун-т. – 2014. – 238 с.