МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«19» июня _________ 2013 г.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания по выполнению модуля 2
для студентов технических специальностей

Курск 2013

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Старший преподаватель кафедры высшей математики *А.В. Бойков*

Векторная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания по выполнению модуля 2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2013. 18 с.

Содержит краткую теорию в форме справочного материала и образцы решения всех заданий модуля 2 и имеют своей целью оказание помощи студентам очного отделения технических специальностей при выполнении заданий.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ___________. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Задание 1

Груз весом $\left|\vec{P}\right|$ = 100кГ поддерживается двумя стержнями AB и CB. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол ACB равен 90°, угол ABC равен α = 3°·([n/4] + 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_4 = 1$ и номер задачи из табл. 1.1 равен 2. Тогда [n/4] = 25 и α =78°.

По условию груз поддерживается стержнями (находится в покое). Следовательно, вес груза – сила $\vec{P} = \overrightarrow{BK}$ (см. рис. 1) уравновешивается результирующей $\vec{R} = \overrightarrow{BL}$ сил, возникающих в стержнях под действием силы $\vec{P}$, т.е. $\vec{P} = -\vec{R}$ ($\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{R}\right|$ и эти силы направлены противоположно).

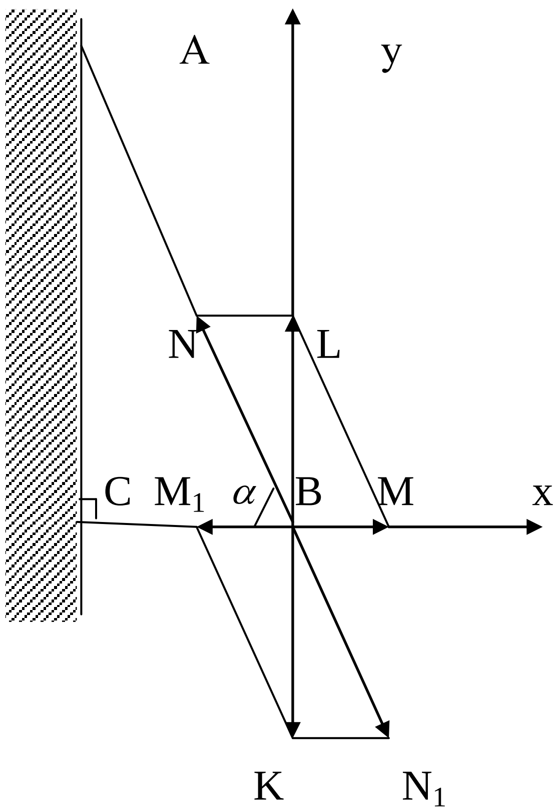

Рис. 1. Разложение веса груза по направлениям стержней

Разложим силу $\vec{R}$ по направлениям стержней BA и BC. Для этого через точку L проведём прямые LM и LN, параллельные стержням BA и BC, до их пересечения с прямыми, содержащими стержни, в точках M и N. Очевидно, что

$$\vec{R} = \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}.$$

Аналогично, раскладывается по направлениям стержней вес груза

$$\vec{P} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{BN_1},$$

и

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BM_1}, \ \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BN}, \ \left(\left| \overrightarrow{BM} \right| = \left| \overrightarrow{BM_1} \right|, \ \left| \overrightarrow{BN} \right| = \left| \overrightarrow{BN_1} \right| \right).$$

Сила $\overrightarrow{BN_1}$ вызывает растяжение стержня ВА и порождает силу $\overrightarrow{BN}$, возникающую в этом стержне, уравновешивающую силу растяжения $\overrightarrow{BN_1}$. Аналогично, сила $\overrightarrow{BM_1}$ вызывает сжатие стержня ВС и порождает силу $\overrightarrow{BM}$, возникающую в стержне ВС, уравновешивающую силу сжатия $\overrightarrow{BM_1}$.

Найдём $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ и $\left|\overrightarrow{BN}\right|$, обозначив $\left|\overrightarrow{BM}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{BN}\right| = b$, $\left|\vec{P}\right| = P$. Введём декартову систему координат, как показано на рис. 3.1, и разложим векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ этой системы координат.

Очевидно, что

$$\overrightarrow{BM} = a \cdot \vec{i}, \qquad \overrightarrow{BN} = -b \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j}, \qquad \vec{P} = -P \cdot \vec{j}.$$

Поскольку груз находится в покое, то результирующая этих сил равна нулевому вектору $\vec{0}$, т.е.

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \vec{P} = \vec{0},$$

$$a \cdot \vec{i} - b \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j} - P \cdot \vec{j} = \vec{0},$$

$$(a - b \cdot \cos\alpha) \cdot \vec{i} + (b \cdot \sin\alpha - P) \cdot \vec{j} = \vec{0}.$$

Это векторное равенство равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} a - b \cdot \cos\alpha = 0, \\ b \cdot \sin\alpha - P = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$b = \frac{P}{\sin\alpha}, \qquad a = b \cdot \cos\alpha = P \cdot ctg\alpha.$$

Эти формулы можно получить и иначе. Треугольник BML прямоугольный, BM = a, BL = P, ML = b, угол BML равен α, и

$$\frac{BM}{BL} = ctg\alpha, \qquad \frac{BL}{ML} = \sin\alpha,$$

$$\frac{a}{P} = ctg\alpha, \qquad \frac{P}{b} = \sin\alpha,$$

откуда

$$a = P \cdot ctg\alpha, \qquad b = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

Учитывая условия задачи получим

$$a = 100 \cdot ctg\,78° = 100 \cdot 0.2126 = 21.26\,(k\Gamma), \quad b = \frac{100}{\sin 78°} = \frac{100}{0.9781} = 102.24\,(k\Gamma).$$

Задание 2

1способ.

Точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$, $O(2; -1; P_7)$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

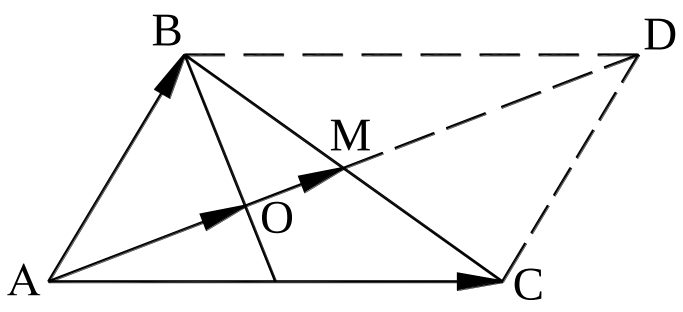

Рис. 2. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (1 способ)

Используя свойство сложения векторов по правилу параллелограмма, имеем: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \left(0; \dfrac{P_3 + P_5}{2}; -1\right) = (0; 1{,}5; -1)$.

Зная, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, начиная от вершины, имеем: $\dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2}{3}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{P_3+P_5}{3};-\frac{2}{3}\right)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AO}=(2-x_A;-1-y_A;P_7-z_A)=(2-x_A;-1-y_A;3-z_A)$.

Так как координаты вектора задаются единственным образом, то составим систему:

$$\begin{cases}2-x_A=0;\\-1-y_A=\frac{P_3+P_5}{3};\\P_7-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_A=0;\\-1-y_A=1;\\3-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=2;\\y_A=-2;\\z_A=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решив данную систему, нашли координаты точки A. Составим аналогичную систему для координат $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases}x_B-x_A=-1;\\y_B-y_A=P_3;\\z_B-z_A=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-2=-1;\\y_B+2=2;\\z_B-3\frac{2}{3}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=1;\\y_B=0;\\z_B=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решением данной системы являются координаты искомой точки $B\left(1;0;3\frac{2}{3}\right)$.

2 способ.

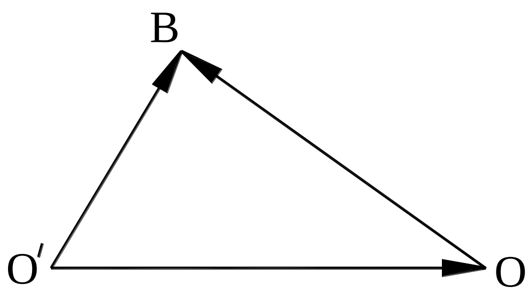

Рис. 3. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (2способ)

Пусть O' – начало отсчёта системы координат, т.е. координаты точки O': $x=0, y=0, z=0.$

Вектор $\overrightarrow{O'B}$ и точка B имеют одинаковые координаты.

$\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{O'O}=(2;-1;3)$ $\qquad (P_7=3)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\cdot((-1;2;0)+(1;1;-2))=\frac{1}{3}\cdot(0;3;-2)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=(-1;2;0)-\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)=\left(-1;1;\frac{2}{3}\right)$$

$\overrightarrow{O'B} = (2;-1;3) + \left(-1;1;\dfrac{2}{3}\right) = \left(1;0;\dfrac{11}{3}\right)$

$B\left(1;0;\dfrac{11}{3}\right).$

Задание 3

Даны три силы: $\vec{F}_1 = P_2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3 \cdot \vec{i} + P_3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$ и $\vec{F}_3 = -2 \cdot \vec{j} + P_5 \cdot \vec{k}$. Найти равнодействующую $\vec{R}$ сил $(-\vec{F}_1)$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_0 (0 ; 1 ; P_7) в положение M (P_6 ; 0 ; 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_6 = 5$, $P_7 = 3$,

$\vec{F}_1 = (1; 2;-7)$, $(-\vec{F}_1) = (-1;-2;7)$, $\vec{F}_2 = (3;2;4)$, $\vec{F}_3 = (0;-2;1)$ и $\vec{R} = (-\vec{F}_1) + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2;-2;12)$. Если точка перемещается прямолинейно, а сила $\vec{R}$, действующая на точку постоянна, то работа A силы равна скалярному произведению силы на вектор-перемещение точки. Вектор-перемещение имеет вид:

$\overrightarrow{M_0M} = (P_6 - 0; 0 - 1; 1 - P_7) = (5; -1; -2).$

Тогда работа A будет равна

$A = \left(\vec{R};\ \overrightarrow{M_0M}\right) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 12 \cdot (-2) = -12.$

Задание 4

Сила $\vec{F} = (P_3; P_5; -2)$ приложена к точке $C(P_4; -2; P_7)$. Определите величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

Момент силы, приложенной к точке относительно начала координат, определяется по формуле:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки C относительно начала координат.

$\vec{r} = \overrightarrow{OC} = (P_4 - 0; -1 - 0; P_7 - 0) = (P_4; -1; P_7) = (1; -1; 3)$

$$\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_4 & -1 & P_7 \\ P_3 & P_5 & -2 \end{vmatrix} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k};$$

$$\overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}.$$

Величина момента силы:

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{74}.$$

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{M_x}{\left|\overrightarrow{M}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{M_y}{\left|\overrightarrow{M}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{M_z}{\left|\overrightarrow{M}\right|}$.

Получаем: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{74}}{74}$, $\cos\beta = -\dfrac{4\sqrt{74}}{37}$, $\cos\gamma = \dfrac{3\sqrt{74}}{74}$.

Задание 5

Найти ненулевой вектор, ортогональный векторам $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -1)$ и $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$. Сделайте проверку.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$. По условию $\vec{a} = (0; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 1; 1)$.

Векторное произведение двух векторов является вектором ортогональным к этим векторам. Это векторное произведение будет ненулевым вектором, тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы неколлинеарны.

Данные векторы неколлинеарные, поэтому их векторное произведение будет ненулевым вектором ортогональным им обоим.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-P_4 & P_5+1 & -1 \\ P_3-1 & 1 & 4-P_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j} - 2 \cdot \vec{k},$$

$\vec{c} = (3; 1; -2)$.

Проверка: Два вектора ортогональны, если их скальное произведение равно нулю, тогда

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = x_c \cdot x_a + y_c \cdot y_a + z_c \cdot z_a = 0;$$
$$\vec{c} \cdot \vec{b} = x_c \cdot x_b + y_c \cdot y_b + z_c \cdot z_b = 0.$$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) = 0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{a}$,

$\vec{c}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Задание 6

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник?

Если да, то чему равна его площадь?

Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_4=1$, $P_5=1$, $P_7=3$, $P_8=5$.

Точки *A, B, C* образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix} = x_i\vec{i} + y_j\vec{j} + z_k\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} = (1+1;2+2;0-2)$

$\overrightarrow{AC} = (4+1;14+2;-1-2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k} \neq \vec{0},$$

следовательно точки *A, B, C* образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{20^2+(-4)^2+12^2} = 4\sqrt{35}.$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

Задание 7

Даны точки: A(1; $-P_2$; -1), B($1-P_3$; 0; 1), C(-1; 1; P_5-2), D(P_2; P_4; P_8). Образуют ли эти точки пирамиду? Если да, то чему равен объём пирамиды?

Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_8 = 5$. Точки A, B, C, D образуют пирамиду тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ некомпланарные, т.е. когда их смешанное произведение не равно нулю. Найдем координаты этих векторов

$\overrightarrow{AB}$ =(1-P_3-1; 0-(-P_2); 1-(-1)) = (-2; 1; 2),

$\overrightarrow{AC}$ =(-1-1;1-(-P_2);P_5-2-(-1)) = (-2; 2; 0),

$\overrightarrow{AD}$ = (P_2 - 1; P_4 - (- P_2); P_8 - (-1)) = (0; 2; 6),

и их смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -20.$$

Итак, точки A, B, C, D образуют пирамиду и её объём можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD} \right) \right|.$$

Подставляя в формулу значение смешанного произведения, получим V=$\frac{10}{3}$.

Задание 8

Даны точки $A(-1-P_7; P_5-2)$ и $B(P_5-2; P_5+4)$. Найти:

а) точку $C(x_1; y_1)$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_2; y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\frac{P_9+1}{9-P_9}$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_5 = 1$, $P_7 = 3$, $P_9 = 2$. Значит $A(-4;-1)$, $B(-1;5)$.

а) $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4-1}{2} = -2{,}5$;

$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$. Получили $C(-2{,}5;2)$.

б) Если $\lambda = \frac{P_9+1}{9-P_9} = \frac{3}{8}$, то $x_2 = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{-4+\frac{3}{8}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{8}} = -\frac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{3}{8}\cdot 5}{1+\frac{3}{8}} = \frac{7}{11}.$$ Получили $D\left(-\frac{35}{11};\frac{7}{8}\right)$.

Задание 9

На плоскости даны точки $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Сделать чертёж треугольника ABC и найти:

а) длину и уравнение стороны BC (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла A и угол A (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне ВС;

г) высоту, проведённую к стороне BC и её уравнение;

д) уравнение медианы, проведённой к стороне BC;

е) уравнение биссектрисы угла A.

Решение

Даны точки $A(11;-5)$, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$.

а) Каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ рассчитывается по формуле: $\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{y-y_2}{y_3-y_2}$ или $\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m}$.

Тогда каноническое уравнение прямой BC будет иметь вид: $\frac{x-6}{-10-6} = \frac{y-7}{-5-7}$, или $\frac{x-6}{-16} = \frac{y-7}{-12}$, или $\frac{x-6}{4} = \frac{y-7}{3}$.

Общее уравнение прямой: $m\cdot x - l\cdot y + (l\cdot y_2 - m\cdot x_2) = 0$ или $A\cdot x + B\cdot y + C = 0$.

Тогда общее уравнение прямой BC будет иметь вид: $3(x-6) = 4(y-7)$, $3x-18 = 4y-28$, $3x-4y+10=0$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку В имеют вид: $\begin{cases} x = x_2 + l\cdot t; \\ y = y_2 + m\cdot t. \end{cases}$

В качестве направляющего вектора берем вектор $\overrightarrow{BC} = (4;3)$и параметрические уравнения прямой BC будут иметь вид: $\begin{cases} x = 6+4t; \\ y = 7+3t. \end{cases}$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=-\frac{A\cdot x}{B}-\frac{C}{B}$ или y = kx + b.

Тогда уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC* будет иметь вид: $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$.

б) $\cos A=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(x_3-x_1)\cdot(x_2-x_1)+(y_3-y_1)\cdot(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=g$.

A=arccos(g).

$\overrightarrow{AC}=(-10-11;-5-(-5))=(-21;0)$, тогда $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-21)^2+0^2}=21$,

$\overrightarrow{AB}=(6-11;7-(-5))=(-5;12)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$,

$\cos A=\frac{-21\cdot(-5)+0\cdot12}{21\cdot13}=\frac{5}{13}$, $A=\arccos\frac{5}{13}$.

в) **1 способ.**

Прямая, параллельная *BC* имеет такой же угловой коэффициент *k*, как и *BC*. Подставим координаты точки *A* в уравнение с угловым коэффициентом y = *k*x + b_1 и найдем b_1.

Уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC*, полученное в пункте а) имеет вид: $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$. По условию $A(11;-5)$.

При подстановке координат точки *A* в уравнение $y=\frac{3}{4}x+b_1$ получим: $-5=\frac{3}{4}\cdot11+b_1$, откуда $b_1=-\frac{53}{4}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y=\frac{3}{4}x-\frac{53}{4}$ или $3x-4y-53=0$.

2 способ.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1;y_1)$ имеют вид $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$, где $(l;m)$- направляющий вектор прямой. В качестве направляющего вектора прямой направляющего вектора прямой параллельной ВС можно взять направляющий вектор прямой ВС, вектор $\overrightarrow{BC}=(4;3)$.

Тогда искомое уравнение примет вид: $\frac{x-11}{4}=\frac{y-(-5)}{3}$, т.е. $3x-4y-53=0$.

г) **1 способ.**

Уравнение высоты к стороне *BC*: $y=-\frac{1}{k}\cdot x+b_2$.

b_2 находится подстановкой значений x и y точки A в это уравнение.

При подстановке координат точки A в уравнение $y = -\frac{4}{3}x + b_2$ получим: $-5 = -\frac{4}{3} \cdot 11 + b_2$, откуда $b_1 = \frac{29}{3}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$ или $4x + 3y - 29 = 0$.

Для нахождения длины высоты, найдём точку пересечения стороны BC и полученной высоты:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0; \\ 4x + 3y - 29 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 16y + 40 = 0; \\ 12x + 9y - 87 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y + 127 = 0; \\ 3x - 4y + 10 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5{,}08; \\ x = 3{,}44. \end{cases}$$

Получили точку $A_1(3{,}44;5{,}08)$.

Длина высоты: $h = \left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \sqrt{(3{,}44 - 11)^2 + (5{,}08 - (-5))^2} = 12{,}6$.

2 способ.

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (x_1, y_1) перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = (A, B)$ имеет вид:

$$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) = 0.$$

В качестве нормального вектора высоты, проведенной к стороне BC можно взять направляющий вектор прямой BC, например вектор $\overrightarrow{BC} = (4;3)$.

Тогда уравнение высоты будет иметь вид:

$4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - (-5)) = 0$ или $4 \cdot x + 3 \cdot y - 29 = 0.$

Длина высоты– это расстояние от точки A до прямой BC. Расстояние от точки $A(x_1, y_1)$ до прямой a, имеющей общее уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ можно найти по формуле:

$$h = d(A,(a)) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Общее уравнение прямой BC имеет вид: $3 \cdot x - 4 \cdot y + 10 = 0.$ Поэтому $h = \frac{|3 \cdot 11 - 4 \cdot (-5) + 10|}{\sqrt{3^2 + 4}} = \frac{63}{5} = 12{,}6.$

д) Если точка M – середина BC, то $x_M = \frac{x_2 + x_3}{2}$; $y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}$.

Уравнение медианы: $\frac{x - x_1}{x_M - x_1} = \frac{y - y_1}{y_M - y_1}$.

По условию, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$, тогда $x_M = \frac{6+(-10)}{2} = -2$, $y_M = \frac{7+(-5)}{2} = 1$. Значит $M(-2;1)$.

Уравнение медианы, проведённой к стороне BC: $\frac{x-11}{-2-11} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)}$ или $\frac{x-11}{-13} = \frac{y+5}{6}$.

е) По свойству биссектрисы угла: $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$.

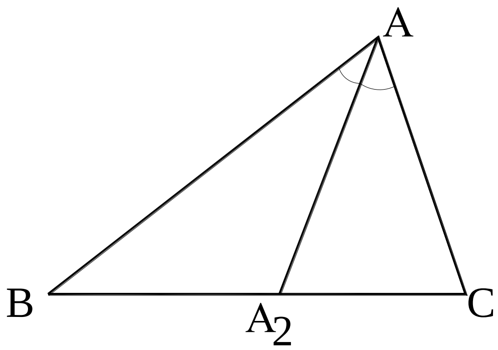

Рис. 4. Вспомогательный чертёж к заданию 9

Пусть $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \lambda$, тогда координаты точки A_2 находяться по формулам: $x_{A_2} = \frac{x_2 + \lambda \cdot x_3}{1+\lambda}$; $y_{A_2} = \frac{y_2 + \lambda \cdot y_3}{1+\lambda}$, где $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

Из пункта б) мы имеем: $|\overrightarrow{AC}| = 21$, $|\overrightarrow{AB}| = 13$, значит $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{13}{21}$,

тогда $x_{A_2} = \frac{6 + \frac{13}{21}\cdot(-10)}{1+\frac{13}{21}} = -\frac{2}{17}$, $y_{A_2} = \frac{7 + \frac{13}{21}\cdot(-5)}{1+\frac{13}{21}} = \frac{41}{17}$.

Искомое уравнение биссектрисы мы находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(11;-5)$ и $A_2\left(-\frac{2}{17};\frac{41}{17}\right)$.

$$\frac{x-11}{-\frac{2}{17}-11} = \frac{y-(-5)}{\frac{41}{17}-(-5)} \text{ или } \frac{x-11}{-\frac{189}{17}} = \frac{y+5}{\frac{126}{17}}, \text{ или } \frac{x-11}{-3} = \frac{y+5}{2}.$$

Задание 10

Дана точка (0;2) пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон 5x - 4y + 15 = 0 и 4x + y - 9 =0. Найти координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны.

Решение

Координаты одной вершины найдем как координаты точки пересечения данных сторон, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-4y+15=0, \\ 4x+y-9=0. \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} y=9-4x, \\ 5x-4(9-4x)+15=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

Точка O пересечения медиан треугольника называется его центром. Отметим одно свойство центра треугольника, которое используем для нахождения координат остальных вершин:

$$x_Ц = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad x_Ц = \frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

где $x_Ц$, $y_Ц$ - координаты центра треугольника;

x_i , y_i - координаты i-ой вершины треугольника, i = 1,2,3.

Для доказательства этих формул рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$, где A (x_i ; y_i), i = 1,2,3 (см. рис. 3.2)

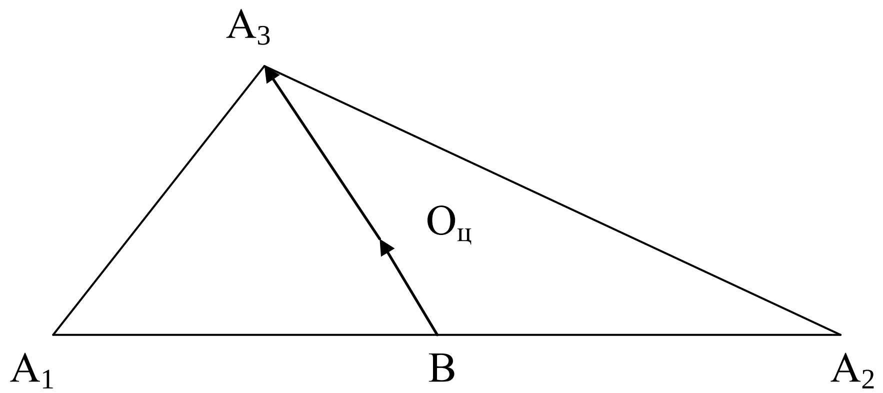

Рис. 5. Вспомогательный чертёж к заданию 10

Пусть B – середина стороны A_1A_2. Тогда A_3B – медиана треугольника $A_1A_2A_3$. По известному из элементарной геометрии свойству медиан треугольника $A_3O_ц = 2 \cdot BO_ц$. Тогда координаты точки B найдем по формулам:

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad и \qquad y_B = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

а координаты центра $O_ц$ из векторного соотношения $\overrightarrow{O_Ц A_3} = 2 \cdot \overrightarrow{BO_Ц}$, которое в координатной форме записывается так:

$$x_3 - x_Ц = 2 \cdot (x_Ц - \frac{x_1 + x_2}{2}), \qquad y_3 - y_Ц = 2 \cdot (y_Ц - \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

Отсюда, выражая $x_Ц$ и $y_Ц$ через x_i, x_i, получим требуемые формулы.

Используя доказанные формулы, полагая в них $x_1 = 1$ и $y_1 = 5$, $x_Ц = 0$ и $y_Ц = 2$, получим два уравнения, которым должны удовлетворять координаты остальных двух вершин

$$0 = \frac{1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad 2 = \frac{5 + y_2 + y_3}{3}, \text{ откуда}$$

$x_2 + x_3 = -1$, $y_2 + y_3 = 1$.

Еще два уравнения получим если потребуем, чтобы искомые точки, вершины треугольника, принадлежали заданным сторонам, т.е. их координаты удовлетворяли уравнениям этих сторон

$5x - 4y + 15 = 0$, $4x + y - 9 = 0$.

Итак, для определения четырех неизвестных x_2, x_3, y_2, y_3, мы имеем четыре независимых условия:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1, \\ y_2 + y_3 = 1, \\ 5x_2 - 4y_2 + 15 = 0, \\ 4x_3 + y_3 - 9 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_2 = -3$, $y_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_3 = 1$.

Уравнение третьей стороны запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (-3;0) и (2;1)

$$\frac{x - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{y - 0}{1 - 0} \text{ или } \frac{x + 3}{5} = y.$$

Итак, уравнение третьей стороны x - 5y + 3 = 0, а вершины треугольника имеют координаты (1;5), (-3;0), (2;1).

Задание 11

В пространстве даны точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$. Сделать чертёж пирамиды *ABCD* и найти:

а) длину и уравнение ребра *AB*;

б) уравнение грани *ABC*;

в) высоту, проведённую из вершины *D* и её уравнение;

г) проекцию вершины *D* на плоскость *ABC*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *D* параллельно ребру *AB*;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину *D* параллельно грани *ABC*;

ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро *AD* перпендикулярно грани *ABC*;

з) уравнение проекции ребра *AD* на грань *ABC*;

и) угол между ребрами *AB* и *AD*;

к) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*;

л) угол между гранями *ABC* и *ABD*.

Решение

Даны точки $A(1;-5;3)$, $B(4;-1;2)$, $C(-3;3;5)$, $D(2;1;-1)$.

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Тогда прямая AB задаётся уравнением: $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-(-5)}{-1-(-5)}=\dfrac{z-3}{2-3}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$.

Длина ребра AB может быть рассчитана как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

$\overrightarrow{AB}=(4-1;-1-(-5);2-3)=(3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ и $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Найдём уравнение грани ABC, используя данную формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ -3-1 & 3-(-5) & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 16x-2y+40z-146$$

Получим уравнение плоскости $16x-2y+40z-146=0 \Leftrightarrow 8x-y+20z-73=0$.

в) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $D(x_4;y_4;z_4)$ перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид: $\dfrac{x-x_4}{A}=\dfrac{y-y_4}{B}=\dfrac{z-z_4}{C}$.

Искомая высота проходит через точку $D(2;1;-1)$ перпендикулярно грани ABC, то есть перпендикулярно плоскости, заданной уравнением $8x-y+20z-73=0$. Значит уравнение прямой, содержащей эту высоту имеет вид: $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{20}$.

Расстояние от точки $D(x_4;y_4;z_4)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ рассчитывается по формуле:

$$h=\frac{|A\cdot x_4+B\cdot y_4+C\cdot z_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|8\cdot 2+(-1)\cdot 1+20\cdot(-1)|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{465}}=\frac{\sqrt{465}}{93}.$$

г) Чтобы найти проекцию вершины D на плоскость ABC, необходимо отыскать основание D_1 перпендикуляра, опущенного из точки $D(x_4;y_4;z_4)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Уравнение этого перпендикуляра найдено в пункте в): $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{20}$. Запишем данное уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=2+8t, \\ y=1-t, \\ z=-1+20t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения для x, y, z в уравнение плоскости ABC, найденное в пункте б): $8x-y+20z-73=0$.

$8(2+8t)-(1-t)+20(-1+20t)-73=0$, откуда находим t:

$-78+465t=0$, $t=\dfrac{26}{155}$.

Далее необходимо подставить найденное значение t в систему уравнений (1). Получим координаты искомой точки.

$$\begin{cases} x = 2 + 8 \cdot \dfrac{26}{155}, \\ y = 1 - \dfrac{26}{155}, \\ z = -1 + 20 \cdot \dfrac{26}{155}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{518}{155}, \\ y = \dfrac{129}{155}, \\ z = \dfrac{365}{155}. \end{cases}$$

Значит, проекция D_1 вершины D на плоскость ABC имеет координаты $\left(\dfrac{518}{155};\dfrac{129}{155};\dfrac{365}{155}\right)$.

д) Уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру AB представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку $D(x_4; y_4; z_4)$ параллельно направляющему вектору $\overrightarrow{AB} = (l; m; n)$ и находится по формуле: $\dfrac{x - x_4}{l} = \dfrac{y - y_4}{m} = \dfrac{z - z_4}{n}$.

По условию $D(2;1;-1)$, а вектор был найден в пункте а) $\overrightarrow{AB} = (3;4;-1)$. Тогда искомая прямая имеет вид: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-1}$.

е) Плоскость, параллельная плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и проходящая через $D(x_4; y_4; z_4)$ имеет вид: $A(x - x_4) + B(y - y_4) + C(z - z_4) = 0$.

Тогда, искомая плоскость, проходящая через точку $D(2;1;-1)$ параллельно плоскости $8x - y + 20z - 73 = 0$, задаётся уравнением: $8(x-2) - (y-1) + 20(z+1) = 0 \ \Leftrightarrow \ 8x - y + 20z + 5 = 0$.

ж) Уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC находится как уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_4 - z_1}$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Найдём уравнение прямой AD: $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-(-5)}{1-(-5)} = \dfrac{z-3}{-1-3}$ $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{6} = \dfrac{z-3}{-4}$.

Уравнение плоскости ABC было получено в пункте б): $8x - y + 20z - 73 = 0$.

Тогда искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 8 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 116x-52y-49z-229=0.$$

з) Проекция ребра AD на грань ABC является прямой, проходящей через точки $A(1;-5;3)$ и точку, найденную в пункте г), имеющую координаты $\left(\frac{518}{155};\frac{129}{155};\frac{365}{155}\right)$.

Каноническое уравнение проекции получим используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-1}{\frac{518}{155}-1}=\frac{y-(-5)}{\frac{129}{155}-(-5)}=\frac{z-3}{\frac{365}{155}-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{363}=\frac{y+5}{904}=\frac{z-3}{-100}.$$

и) Угол φ между ребрами AB и AD находится как угол между векторами $\overrightarrow{AB}=(l_1;m_1;n_1)$ и $\overrightarrow{AD}=(l_2;m_2;n_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}},$$

Имеем: $\overrightarrow{AB}=(3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$,

$\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$, тогда $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{1^2+6^2+(-4)^2}=\sqrt{53}$,

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot1+4\cdot6+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{53}}=\frac{31}{\sqrt{1378}},\ \varphi=\arccos\frac{31}{\sqrt{1378}}\approx 37^0.$$

к) Угол ψ между ребром AD и гранью ABC находится по формуле: $\sin\psi=\frac{|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$,

где $(A;B;C)$ – координаты нормального вектора $\vec{n}$ плоскости ABC,

$(l;m;n)$ – координаты направляющего вектора $\vec{q}$ прямой AD.

Имеем: $\vec{n}=(8;-1;20)$ и $\vec{q}=(1;6;-4)$ – соответственно.

$$\sin\psi=\frac{|8\cdot1+(-1)\cdot6+20\cdot(-4)|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}\cdot\sqrt{1^2+6^2+(-4)^2}}=\frac{78}{\sqrt{24645}},$$

$$\psi=\arcsin\frac{78}{\sqrt{24645}}\approx 33^o.$$

л) Угол θ между гранями ABC и ABD находится как угол между нормальными векторами плоскостей ABC и ABD. Нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $(8;-1;20)$.

Найдём уравнение плоскости ABD аналогично пункту б):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ 2-1 & 1-(-5) & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 10x+11y+14z+23$$

Получим уравнение плоскости $10x+11y+14z+23=0$. Для данной плоскости направляющий вектор имеет координаты: $(10;11;14)$.

$$\cos\theta = \frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = \frac{8\cdot 10+(-1)\cdot 11+20\cdot 14}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}\cdot\sqrt{10^2+11^2+14^2}} = \frac{349}{\sqrt{193905}},$$

$$\theta = \arccos\frac{349}{\sqrt{193905}} \approx 42^o.$$

Задание 12

Дана точка $M(1;0;-2)$. Найти:

а) точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, симметричную М относительно точки $S(-1-P_7;P_5;3-P_3)$;

б) точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную М относительно прямой $\frac{x+1}{-1-P_7}=\frac{y-2}{P_5}=\frac{z-1}{3-P_3}$

в) точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$, симметричную М относительно плоскости $(-1-P_7)\cdot x+P_5\cdot y+(3-P_3)\cdot z=0$

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_5=1$, $P_7=3$.

а) Согласно заданным условиям, $S(-4;1;1)$.

Точки M и M_1 называются симметричными относительно точки S (центр симметрии), если S – середина отрезка MM_1. Общая формула середины отрезка: $x_S=\frac{x_M+x_{M_1}}{2}$. Откуда получаем:

$x_{M_1}=2\cdot x_S-x_M=2\cdot(-4)-1=-9$,

$y_{M_1}=2\cdot y_S-y_M=2\cdot 1-0=2$,

$z_{M_1}=2\cdot z_S-z_M=2\cdot 1-(-2)=4$.

Таким образом, $M_1(-9;2;4)$.

б) Согласно заданным условиям, исходная прямая имеет вид: $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{5}$.

Точки M и M_2 называются симметричными относительно прямой a (ось симметрии), если прямая a проходит через середину отрезка MM_2 и перпендикулярна к этому отрезку.

Находим уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так плоскость перпендикулярна заданной прямой, то в качестве её вектора нормали можно взять направляющий вектор этой прямой с координатами $(-4;1;5)$.

Следовательно уравнение плоскости имеет вид:

$$-4\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+5\cdot(z-(-2))=0 \;\Leftrightarrow\; -4x+y+5z+6=0.$$

Найдем координаты точки пересечения данной плоскости и нашей прямой. Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=-1-4\cdot t; \\ y=2+t; \\ z=1+5t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(-1-4t)-(2+t)+5(1+5t)+6=0$, откуда находим $t=-\dfrac{17}{42}$.

Затем подставим найденное значение *t* в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x=-1-4\cdot\left(-\dfrac{17}{42}\right); \\ y=2-\dfrac{17}{42}; \\ z=1+5\cdot\left(-\dfrac{17}{42}\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{13}{42}; \\ y=\dfrac{67}{42}; \\ z=-\dfrac{43}{42}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $G\left(-\dfrac{13}{42};\dfrac{67}{42};-\dfrac{43}{42}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_2}=2\cdot x_G-x_M=2\cdot\left(-\frac{13}{42}\right)-1=-\frac{34}{21},$$

$$y_{M_2}=2\cdot y_G-y_M=2\cdot\frac{67}{42}-0=\frac{67}{21},$$

$$z_{M_2}=2\cdot z_G-z_M=2\cdot\left(-\frac{43}{42}\right)-(-2)=-\frac{1}{21}.$$

Таким образом, $M_2\left(-\dfrac{34}{21};\dfrac{67}{21};-\dfrac{1}{21}\right)$.

в) Согласно заданным условиям, исходная плоскость имеет вид: $-4x+y+z+1=0$.

Точка M_3 называется симметричной точке M относительно плоскости α, если плоскость α перпендикулярна отрезку MM_3 и проходит через его середину.

Находим уравнение прямой, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так как прямая перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве её направляющего вектора можно взять вектор нормали плоскости с координатами $(-4;1;1)$.

Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1-4\cdot t; \\ y = 0+t; \\ z = -2+t. \end{cases} \qquad (2)$$

Далее найдём точку пересечения этой прямой с исходной плоскостью. Для этого необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(1-4t)+(0+t)+(-2+t)+1=0$, откуда находим $t=-\dfrac{5}{14}$.

Далее подставить найденное значение *t* в систему уравнений (2).

$$\begin{cases} x = 1-4\cdot\dfrac{5}{14}; \\ y = 0+\dfrac{5}{14}; \\ z = -2+\dfrac{5}{14}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{7}; \\ y = -\dfrac{5}{14}; \\ z = -\dfrac{33}{14}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $R\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{5}{14};-\dfrac{33}{14}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_3} = 2\cdot x_R - x_M = 2\cdot\frac{17}{7}-1=\frac{27}{7},$$

$$y_{M_3} = 2\cdot y_R - y_M = 2\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)-0=-\frac{5}{7},$$

$$z_{M_3} = 2\cdot z_R - z_M = 2\cdot\left(-\frac{33}{14}\right)-(-2)=-\frac{19}{7}.$$

Таким образом, $M_3\left(\dfrac{27}{7};-\dfrac{5}{7};-\dfrac{19}{7}\right)$.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003.-240с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.-320с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука,1984. 192с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш.шк. ,1996. 304с.
5. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.1 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2003.-288с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004.-240с.
7. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011. -608с.
8. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. -232с.