9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ О.Г. Локтионова
«___» ноября _______ 2013 г.

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Методические указания по выполнению
модуля 17

Курск 2013

УДК 510 (083)

Составители: Е.В.Журавлева, Е.А.Панина

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, с.н.с.
В.И.Дмитриев

Повторные испытания. Случайные величины: методические указания по выполнению модуля 17 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлева, Е.А.Панина. Курск, 2013. 49 с.: ил. 4. Библиогр.: с.49.

В данной работе содержатся краткие теоретические положения, необходимые для выполнения работы, методические указания по применению программного продукта EXCEL, рекомендуемые данные для статистической обработки.

Работа предназначена для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Введение

Рассматриваемая методическая разработка направлена на усвоение теоретического курса и применение теоретических знаний к решению практических задач по разделу курса математики «Повторные испытания. Случайные величины», а также по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика».

Данная работа содержит краткие теоретические положения, используемые при объяснении решения задач, а также примеры выполнения всех заданий модуля 17 «Повторные испытания. Случайные величины». Каждый мини-раздел сопровождается разбором возможных способов решения различных типов заданий, которые встречаются в задачах модуля 17.

Разбор примеров решения и выполнение индивидуального задания позволяет выработать устойчивые навыки решения типовых задач по заявленной в заглавии теме, что формирует определенные компетенции в соответствии с требованиями ФГОС.

Надеемся, что данная работа поможет студентам в освоении темы и выполнении индивидуальных заданий контролируемой самостоятельной работы.

Формула Бернулли

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, где ситуация представляется в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий. В таких задачах представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях.

Схема испытаний Бернулли – это последовательность n одинаковых испытаний, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Каждое испытание имеет два исхода: успех и неудача. Эти два исхода – взаимно несовместны и противоположны.

2. Вероятность успеха, обозначаемая p, остается постоянной от испытания к испытанию. Вероятность неудачи обозначается q, где q = 1 – p.

3. Все испытания независимы. Это означает, что вероятность наступления события в любом из испытаний не зависит от результатов других испытаний.

Теорема. Пусть производится "n" опытов по схеме Бернулли. Тогда вероятность того, что событие A появится ровно k раз, равна $\mathbf{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$.

Пример решения задания 1

Вероятность приема радиосигнала равна 0,75. Какова вероятность того, что сигнал при шести передачах будет принят ровно четыре раза?

Решение. Эксперимент заключается в проведении шести повторных независимых испытаний, в каждом из которых может наступить некоторое событие.

Событие A заключается в получении сигнала при передаче. Вероятность наступления этого события постоянна и равна p = 0,75. Вероятность неполучения сигнала равна q = 1 – p = 1 – 0,75 = 0,25.

Для вычисления искомой вероятности будем пользоваться формулой Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$.

По условию задачи n = 6, m = 4, p = 0,75, q = 0,25.

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^{6-4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 =$$
$$= 15 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0625 = 0{,}296$$

Ответ: $P_6(4) = 0{,}296$.

Пример решения задания 2

В некоторой семье имеется четверо детей. Если принять вероятность рождения девочки равной 0,5, то какова вероятность того, что в семье будет не менее двух девочек?

Решение. По условию задачи повторных независимых испытаний в данном случае $n = 4$. Событие A состоит в рождении девочки. Вероятность этого события $p = 0{,}5$. Вероятность противоположного события равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Искомое событие «в семье не менее двух девочек» состоит из объединения несовместных событий:

A_1 – в семье две девочки;

A_2 – в семье три девочки;

A_3 – в семье четыре девочки.

$A = A_1 + A_2 + A_3$.

По теореме сложения несовместных событий вероятность события A равна

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Для вычисления значения каждого слагаемого воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$.

Для первого слагаемого: $n = 4$, $m = 2$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$.

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}375.$$

Для второго слагаемого: $n = 4$, $m = 3$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$.

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^1 = 4 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Для третьего слагаемого: $n = 4$, $m = 4$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$.

$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^{4-4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^0 = 1 \cdot 0{,}0625 \cdot 1 = 0{,}0625.$$

$P(A) = 0{,}375 + 0{,}25 + 0{,}625 = 0{,}6875$.

Ответ: $P(A) = 0{,}6875$.

Наивероятнейшее число появления события

Определение. Наивероятнейшим числом появления события в n независимых испытаниях, называется число k_0, которое удовлетворяет условию $P_n(k_0) \geq P_n(k)$.

Теорема. Если произведено "n" независимых испытаний и вероятность появления события А в каждом из них $p \neq 0$, то наивероятнейшее число заключено в пределах $np - q \leq k_0 \leq np + p$, где $q = 1 - p$.

Примеры решения задания 3

Пример 1. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число точных приборов в партии из 10 приборов.

Решение. Наивероятнейшее число m_0 наступления события при повторении испытаний оценивается неравенством:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Событие А состоит в сборке точного прибора. Вероятность того, что прибор точным не будет (это событие противоположно событию А), равна $q = 0{,}3$. Следовательно, вероятность события А равна $p = 1 - q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

По условию задачи $n = 10$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$.

$10 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0{,}7 + 0{,}7$

$6{,}7 \leq m_0 \leq 7{,}7$

Целым числом, принадлежащим данному интервалу, является число 7. Следовательно, наивероятнейшее число точных приборов в партии из 10 приборов равно $m_0 = 7$.

Ответ: $m_0 = 7$.

Пример 2. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Сколько деталей надо отобрать, чтобы наивероятнейшее число стандартных деталей было 10?

Решение. Событие А состоит в изготовлении стандартной детали на станке. Требуется определить количество повторных испытаний n.

По условию $p = 0,8$, $q = 1 – p = 1 – 0,8 = 0,2$. $m_0 = 10$.

Используем неравенство для определения наивероятнейшего числа наступления события.

$np – q \le m_0 \le np + p$.

$n \cdot 0,8 – 0,2 \le 10 \le n \cdot 0,8 + 0,8$, или

$$\begin{cases} n \cdot 0,8 - 0,2 \le 10, \\ n \cdot 0,8 + 0,8 \ge 10. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получим:

$$\begin{cases} 8n - 2 \le 100, \\ 8n + 8 \ge 100. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n \le 102, \\ 8n \ge 92. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \le 12,75, \\ n \ge 11,5 \end{cases}$$

Целым числом, удовлетворяющим данной системе неравенств, является число $n = 12$.

Ответ: следует отобрать 12 деталей.

Пример 3. Чему равна вероятность невозврата кредита p в каждом их 100 случаев выдачи кредита, если наивероятнейшее число невозвращенных кредитов равно 7?

Решение. Событие А состоит в том, что клиент кредит не вернул. Всего выданных кредитов $n = 100$. Наивероятнейшее число невозвращенных кредитов равно $m_0 = 7$. Требуется найти p.

Используем неравенство для определения наивероятнейшего числа наступления события.

$np – q \le m_0 \le np + p$.

$100 \cdot p – q \le 7 \le 100 \cdot p + p$, или

$$\begin{cases} 100p - (1 - p) \le 7, \\ 100p + p \ge 7. \end{cases}$$

Решим систему неравенств.

$$\begin{cases}101p-1\le 7,\\ 101p\ge 7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}101p\le 8,\\ 101p\ge 7.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\le \dfrac{8}{101},\\ p\ge \dfrac{7}{101}.\end{cases}\Leftrightarrow \frac{7}{101}\le p\le \frac{8}{101}.$$

Вероятность того, кредит будет не возвращен, лежит в интервале от $\frac{7}{101}\approx 0{,}069$ до $\frac{8}{101}\approx 0{,}079$.

Ответ: $p\in[0{,}069;0{,}079]$

Локальная теорема Лапласа

Теорема. Проводится n испытаний по схеме Бернулли. Если вероятность "p" появления события A в каждом испытании отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна функции

$$P_n(k)\cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

Здесь
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

$\varphi(x)$ - функция четная, значения ее протабулированы и сведены в таблицу, в зависимости от значений x. Если $x\ge 4$, то $\varphi(x)=0$.

Пример решения задания 4

Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что в 1300 испытаниях событие наступит ровно 900 раз.

Решение. По условию задачи $n = 1300$, $m = 900$, $p = 0{,}7$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Поскольку m и n достаточно велики (больше 100), а p и q не малы ($n\,p > 10$), то воспользуемся для определения вероятности появления события в n независимых испытаниях локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Вычислим значение x:

$$x = \frac{900 - 1300 \cdot 0{,}7}{\sqrt{1300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -0{,}61.$$

Значение функции $\varphi(x)$ находим по таблице, учитывая, что эта функция четна.

$$\varphi(-0{,}61) = \varphi(0{,}61) = 0{,}3312.$$

Следовательно,

$$P_{1300}(900) \approx \frac{1}{\sqrt{1300 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \cdot 0{,}3312 = 0{,}02.$$

Ответ: $P_{1300}(900) = 0{,}02$.

Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Проводится n испытаний по схеме Бернулли. Если вероятность "p" наступления события А в каждом испытании от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1;k_2)$ того, что событие А появиться в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, равна $P_n(k_1;k_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.
где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

где $\Phi(x)$ - нечетная функция Лапласа, значения которой протабулированы и сведены в таблицу. В таблице приведены значения $\Phi(x)$ до x=5, так как для x>5 можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

Примеры решения задания 5

Пример 1. При механизированной уборке моркови повреждается в среднем 10% корнеплодов. Найти вероятность того, что в случайной выборке из 150 корнеплодов моркови повреждено от 10 до 60 корнеплодов.

Решение. Событие А состоит в повреждении одного корнеплода. Вероятность этого события $p = 0{,}1$. Вероятность противоположного события $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Всего корнеплодов $n = 150$. Требуется найти вероятность того, что число поврежденных корнеплодов m находится в интервале: $m_1 \le m \le m_2$. Так как число корнеплодов n достаточно велико (больше 100), то искомую вероятность найдем приближенно, используя интегральную теорему Лапласа.

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Определим значения x_1 и x_2.

$$x_1 = \frac{10 - 150 \cdot 0{,}1}{\sqrt{150 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -1{,}36;$$

$$x_2 = \frac{60 - 150 \cdot 0{,}1}{\sqrt{150 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = 12{,}26.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ находим по таблице. Учтем, что функция Лапласа $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а также, что при $x \ge 5$ можно считать $\Phi(x) = 0{,}5$.

$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}36) = -\Phi(1{,}36) = -0{,}4131$.

$\Phi(x_2) = \Phi(12{,}26) = 0{,}5$.

Таким образом,

$P_{150}(10{,}60) \approx \Phi(12{,}26) - \Phi(-1{,}36) = 0{,}5 - (-0{,}4131) = 0{,}9131$

Ответ: $P_{150}(10, 60) = 0{,}9131$.

Пример 2. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий не более 480 имеют нарушения финансовой дисциплины.

Решение. Событие А состоит в том, что малое предприятие имеет нарушение финансовой дисциплины. Вероятность этого события по условию равна 0,5. Вероятность противоположного события равна q = 1 – p = 1 – 0,5 = 0,5. Всего малых предприятий зарегистрировано n = 1000. Требуется найти вероятность того, что число m малых предприятий, имеющих нарушения финансовой дисциплины, удовлетворяет неравенству $0 \le m \le 480$. Так как число малых предприятий n достаточно велико (больше 100), а вероятность нарушения финансовой дисциплины не мала, так что n p > 10, то для определения значения искомой вероятности применим интегральную теорему Лапласа.

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Определим значения x_1 и x_2.

$$x_1 = \frac{0 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -31{,}62;$$

$$x_2 = \frac{480 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -1{,}26.$$

Значения функции Лапласа Ф(x) находим по таблице. Учтем, что функция Лапласа Ф(x) нечетная, т.е. Ф(-x) = - Ф(x), а также, что при $x \ge 5$ можно считать Ф(x) = 0,5.

$\Phi(x_1) = \Phi(-31{,}62) = -\Phi(31{,}62) = -\,0{,}5.$

$\Phi(x_2) = \Phi(-1{,}26) = -\,\Phi(1{,}26) = -\,0{,}3962.$

Таким образом,

$$P_{1000}(0{,}480) \approx \Phi(-1{,}26) - \Phi(-31{,}26) = -0{,}3962 - (-0{,}5) = 0{,}1038$$

Ответ: $P_{1000}(0, 480) = 0{,}1038$.

Пример 3. При обследовании уставных фондов банков установлено, что пятая часть банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков имеют уставный фонд свыше 100 млн. руб. не менее 300.

Решение. Событие А состоит в том, что банк имеет уставный фонд свыше 100 млн. руб. Вероятность этого события равна $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$ по условию задачи. Вероятность противоположного события q = 1 – p = 1 – 0,2 = 0,8. Всего рассматриваем n = 1800 банков. Требуется определить вероятность того, что число m банков, имеющих уставный фонд свыше 100 млн. руб., удовлетворяет неравенству $300 \le m \le 1800$. . Так как число банков n достаточно велико (больше 100), а вероятность наличия уставного фонда свыше 100 млн. руб. не мала, так что n p > 10, то для определения значения искомой вероятности применим интегральную теорему Лапласа.

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где
$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Определим значения x_1 и x_2.

$$x_1 = \frac{300 - 1800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{1800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -3{,}54; \qquad x_2 = \frac{1800 - 1800 \cdot 0{,}2}{\sqrt{1800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 84{,}85.$$

Значения функции Лапласа Ф(x) находим по таблице, при этом используем свойства: 1)функция Лапласа Ф(x) нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; 2) при $x \ge 5$ можно считать Ф(x) = 0,5.

$\Phi(x_1) = \Phi(-3{,}54) = -\Phi(3{,}54) = -0{,}4998.$

$\Phi(x_2) = \Phi(84{,}85) = \Phi(84{,}85) = 0{,}5.$

Таким образом,

$$P_{1800}(300{,}1800) \approx \Phi(84{,}85) - \Phi(-3{,}54) = 0{,}5 - (-0{,}4998) = 0{,}9998.$$

Ответ: $P_{1800}(300, 1800) = 0{,}9998$.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Теорема. Проводится n испытаний по схеме Бернулли. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что абсолютная величина отклонения числа наступлений события А от произведения np не превзойдет положительного числа r, приближенно равна

$$P\left(| m-np |\le r\right)\approx 2\Phi\left(\frac{r}{\sqrt{npq}}\right).$$

Следствие. Вероятность того, что в n независимых испытаниях абсолютная величина отклонения частоты события А от его вероятности p не превзойдет данного положительного числа ε, приближенно равна

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le \varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Примеры решения задания 6

Пример 1. Проверяют 800 компакт-дисков на стандартность. Вероятность того, что диск стандартен, равна 0,8. Найти с вероятностью 0,9625 границы, в которых будет заключено число стандартных дисков.

Решение. Событие А состоит в том, что выбранный диск при проверке оказался стандартным. Вероятность этого события равна $p = 0{,}8$. Вероятность противоположного события равна $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Число проверяемых дисков $n = 800$. Кроме того, известна вероятность $P = 0{,}9625$. Требуется определить границы, в которых заключено число стандартных деталей m.

Применим теорему об отклонении числа появления события А от произведения np на величину ε.

$$P\left(|m-np|\le \varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right),$$

где Φ(x) – функция Лапласа.

$$0{,}9625=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{800\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{800\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=0{,}4813.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{128}}\approx 2{,}08.$$

Следовательно, $\varepsilon = 2{,}08 \cdot \sqrt{128} = 23{,}5$.

Определяем границы для m из условия $|m - np| \le \varepsilon$.

$$|m - 800 \cdot 0{,}8| \le 23{,}5$$

$$616{,}5 \le m \le 663{,}5.$$

Ответ: число стандартных деталей заключено в интервале [616,5; 663,5] в выборке из 800 деталей с вероятностью 0,9625.

Пример 2. После проверки ОТК 80% изделий выходит первым сортом, 15% - вторым, 5% - третьим. Определить, сколько нужно взять деталей, прошедших ОТК, чтобы с вероятностью 0,9962 можно было утверждать, что частота появления первосортного изделия будет отличаться от вероятности изготовления первосортного изделия по абсолютной величине не более, чем на 0,05?

Решение. Событие А – случайно отобранное изделие первого сорта. Вероятность этого события равна p = 0,8. Вероятность противоположного события равна q = 1 – p = 1 – 0,8 = 0,2. Кроме того, по условию задачи ε = 0,05 и P = 0,9973.

Воспользуется оценкой отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где Ф(x) – функция Лапласа.

$$0{,}9973 = 2\Phi\left(0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right).$$

$$\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}16}}\right) = \frac{0{,}9973}{2} = 0{,}4981.$$

По таблице значений функции Лапласа находим, что

$$\frac{0{,}05}{0{,}4} \cdot \sqrt{n} \approx 2{,}9.$$

Следовательно, $\sqrt{n} = \dfrac{2{,}9}{0{,}125} = 23{,}2$. Отсюда n = 538.

Ответ: число отобранных деталей должно быть 538.

Пример 3. По статистическим данным в среднем 87% новорожденных доживают до 50 лет. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (частость) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности этого события не более чем на 0,02 (по абсолютной величине).

Решение. Событие A – новорожденный дожил до 50 лет. Вероятность этого события равна p = 0,87. Вероятность противоположного события равна q = 1 – p = 1 – 0,87 = 0,13. Всего новорожденных n = 1000. $\varepsilon = 0{,}02$.

Воспользуемся оценкой отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$ где Ф(x) – функция Лапласа.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}87\right| \le 0{,}02\right) = 2\cdot\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{1000}{0{,}87\cdot 0{,}13}}\right) = 2\cdot\Phi(1{,}88) = 0{,}9392.$$

Ответ: P = 0,9392.

Формула Пуассона

Если вероятность p наступления события в отдельном испытании близка к нулю, то даже при большом числе испытаний n, но при небольшой величине произведения np получаемые по локальной теореме Лапласа значения вероятности $P_n(k)$ оказываются недостаточно точными и возникает потребность в другой приближенной формуле для таких случаев.

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна, но мала, число независимых испытаний n достаточно велико, но произведение np = λ остается небольшим (не больше 10), то вероятность того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$ (погрешность не превосходит np^2)

Это формула Пуассона.

Примеры решения задания 7

Пример 1. С базы в магазин отправлено 2000 тщательно упакованных доброкачественных фарфоровых тарелок. Вероятность того, что изделие повредится при транспортировке, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в магазин прибудут 5 испорченных тарелок.

Решение. Событие A – прибыла испорченная тарелка. Вероятность этого события p = 0,0005. Всего тарелок n = 2000. Так как число тарелок велико, а вероятность выполнения события A мала, причем n p = 2000 · 0,0005 = 1 < 10, то для отыскания искомого значения вероятности воспользуемся формулой Пуассона.

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = n \cdot p.$$

По условию n = 2000, p = 0,0005, $\lambda = 1$, m = 5.

$$P_{2000}(5) = \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} = \frac{1}{120 \cdot e} \approx 0{,}0031.$$

Ответ: вероятность того, что из 2000 отправленных тарелок испортится 5 штук, равна 0,0031.

Пример 2. Вероятность того, что пассажир опаздывает к отправлению поезду, равна 0,05. Найти вероятность того, что из 200 пассажиров не менее трех опоздает к поезду.

Решение. Событие A – пассажир к поезду опоздал. Вероятность этого события равна p = 0,05. Всего пассажиров n = 200. Так как число пассажиров достаточно велико (n > 100), а вероятность события A достаточно мала, причем n p = 200 · 0,05 = 10, то для определения вероятности события B – к поезду опоздает не менее трех пассажиров воспользуемся формулой Пуассона.

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где } \lambda = n \cdot p.$$

Вычислим вероятность противоположного события $\overline{B}$, т.е. вероятность того, что к отправлению поезда опоздает менее трех пассажиров. Это событие $\overline{B}$ состоит из трех несовместных событий: B_1

– к отправлению поезда никто не опоздает; B_2 – к отправлению опоздает один пассажир; B_3 – к отправлению опоздает два пассажира.

$$P(\overline{B}) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2).$$

По условию n = 200, p = 0,05, $\lambda = 200 \cdot 0{,}05 = 10$.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(\frac{10^0 \cdot e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 \cdot e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 \cdot e^{-10}}{2!} \right) = 0{,}99704.$$

Ответ: вероятность того, что к отправлению поезда опоздает не менее трех пассажиров, равна 0,997.

Дискретные случайные величины

Под случайной величиной понимают переменную, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Конкретное значение случайной величины называется возможным значением.

Определение. Случайной величиной X называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий), т.е.

$$X = f(\omega),$$

где ω – элементарный исход (или элементарное событие).

Случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно, или бесконечно, но счетно.

Определение. Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан таблично, аналитически или графически.

Функцией распределения случайной величины X называется функция F(x), которая определяет вероятность того, что случайная величина X примет значения меньше, чем x:

$$F(X) = P(X < x).$$

К основным числовым характеристикам дискретной случайной величины отнесем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание дискретной случайной величины определим по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

где x_i – возможные значения;

p_i – соответствующие им вероятности.

Дисперсия дискретной случайной величины находится по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Примеры решения задания 8

Пример 1. Монета бросается наудачу три раза. Случайная величина X – число выпадений решки. Для заданной случайной величины X найти:

а) закон распределения;

б) математическое ожидание;

в) дисперсию.

Решение. При одном бросании монеты решка выпадает с вероятностью 0,5. Бросания производятся независимо друг от друга, поэтому случайная величина X имеет биномиальный закон распределения: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Случайная величина X принимает возможные значения 0,1,2 или 3.

Итак, по условию задачи имеем: n = 3, p = 0,5; q = 0,5; k = 0, 1, 2 или 3.

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}125 = 0{,}125 .$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot(0{,}5)^1\cdot(0{,}5)^2=3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25=0{,}375.$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot(0{,}5)^2\cdot(0{,}5)^1=3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}5=0{,}375.$$

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot(0{,}5)^3\cdot(0{,}5)^0=1\cdot 0{,}125\cdot 1=0{,}125.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

Проверим правильность составления закона:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i=0{,}125+0{,}375+0{,}375+0{,}125=1$$

Найдем математическое ожидание дискретной случайной величины.

$$M(X)=0\cdot 0{,}125+1\cdot 0{,}375+2\cdot 0{,}375+3\cdot 0{,}175=1{,}5.$$

Определяем величину дисперсии:

$$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}125+1^2\cdot 0{,}375+2^2\cdot 0{,}375+3^2\cdot 0{,}125=3,$$

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=3-1{,}5^2=0{,}75.$$

Поскольку в данном случае дискретная случайная величина имеет биномиальный закон распределения, то можно было воспользоваться формулами:

– для математического ожидания

$$M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}5=1{,}5;$$

– для дисперсии

$$D(X)=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}75.$$

Пример 2. С завода в магазин поступила партия фарфоровых статуэток в количестве двадцати штук, из которых две – с дефектом. Продавец выбрал три статуэтки. Случайная величина X – число стандартных фигурок среди отобранных.

Для случайной величины X составить:

а) закон распределения;

б) математическое ожидание;

в) дисперсию.

Решение. Случайная величина X – число стандартных фигурок среди трех отобранных – может принимать следующие значения: 1, 2 или 3. Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение, для которого справедливо следующее:

$$P(X=k)=\frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N – число статуэток в партии,

n – число стандартных статуэток в партии,

k – число стандартных статуэток среди отобранных,

m – число отобранных фигурок.

По условию задачи N = 20; n = 20 – 2 = 18; m = 3; k = 1, 2 или 3. Определим искомые вероятности.

$$P(X=1)=\frac{C_{18}^1 \cdot C_2^2}{C_{20}^3}=\frac{18!}{17!\cdot 1!}\cdot 1:\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18!\cdot 3!}{20!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19}=\frac{3}{190};$$

$$P(X=2)=\frac{C_{18}^2 \cdot C_2^1}{C_{20}^3}=\frac{18!}{16!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}:\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18!\cdot 3!\cdot 17!}{16!\cdot 20!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 17}{20\cdot 19}=\frac{51}{190};$$

$$P(X=3)=\frac{C_{18}^3 \cdot C_2^0}{C_{20}^3}=\frac{18!}{15!\cdot 3!}\cdot 1:\frac{20!}{17!\cdot 3!}=\frac{18!\cdot 17!}{15!\cdot 20!}=\frac{17\cdot 16}{20\cdot 19}=\frac{136}{190}.$$

Искомый закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{3}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{136}{190}$

Проверка: $\sum_{i=1}^{3} p_i=\frac{3}{190}+\frac{51}{190}+\frac{136}{190}=1.$

Математическое ожидание:

$$M(X)=1\cdot\frac{3}{190}+2\cdot\frac{51}{190}+3\cdot\frac{136}{190}=\frac{3+102+408}{190}=\frac{513}{190}=\frac{27}{10}.$$

Дисперсия:

$$M(X^2)=1^2\cdot\frac{3}{190}+2^2\cdot\frac{51}{190}+3^2\cdot\frac{136}{190}=\frac{3+204+1224}{190}=\frac{1431}{190}.$$

$$D(X)=\frac{1431}{190}-\left(\frac{27}{10}\right)^2=\frac{459}{1900}.$$

Так как случайная величина имеет гипергеометрическое распределение, то математическое ожидание и дисперсия могут быть найдены по формулам:

$$M(X) = m \cdot \frac{n}{N} = 3 \cdot \frac{18}{20} = \frac{27}{10};$$

$$D(X) = m \cdot \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{m-1}{N-1}\right) = 3 \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot \left(1 - \frac{2}{19}\right) = \frac{459}{1900}.$$

Пример 3. Производится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел 0, 1, 2, 3. Случайная величина X – произведение двух полученных чисел.

Для заданной случайной величины требуется:

а) составить закон распределения;

б) вычислить математическое ожидание;

в) вычислить дисперсию.

Решение. Определим возможные значения случайной величины X с помощью следующей таблицы.

1 \ 2	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

С помощью построенной таблицы можно определить не только возможные значения, но и вероятности получения заданных значений. Всего возможно 16 вариантов выпадения чисел. Среди них ноль встречается 7 раз, единица – 1 раз, двойка – 2 раза, тройка – 2 раза, четверка – 1 раз, шестерка – 2 раза, девятка – 1 раз. Поэтому вероятности получения нуля - $p_1 = \frac{7}{16}$, единицы - $p_2 = \frac{1}{16}$, двойки - $p_3 = \frac{1}{8}$, тройки - $p_4 = \frac{2}{16}$, четверки - $p_5 = \frac{1}{16}$, шестерки - $p_6 = \frac{1}{8}$, девятки - $p_7 = \frac{1}{16}$. Поэтому закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	6	9
p_i	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Проверка: $\sum_{i=1}^{7} p_i = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1$.

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{7}{16} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1+4+6+4+12+9}{16} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Дисперсия:

$$M(X^2) = 0^2 \cdot \frac{7}{16} + 1^2 \cdot \frac{1}{16} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{2}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} + 6^2 \cdot \frac{1}{8} + 9^2 \cdot \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1+8+18+16+72+81}{16} = \frac{196}{16} = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

$$D(X) = 12{,}25 - 2{,}25^2 = 7{,}1875.$$

Пример 4. В часовую мастерскую для ремонта поступили 10 часов, среди них 6 штук нуждаются в общей чистке механизма, а остальные в других видах ремонта. Часовщик ищет часы, нуждающиеся в общей чистке механизма, откладывая часы после осмотра. Случайная величина X – число просмотренных часов.

Для случайной величины X составить закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Опыт состоит в просмотре часов. Если выбранные часы нуждаются в общей чистке механизма, то эксперимент заканчивается. Поэтому возможное число просмотренных часов равно 1, 2, 3, 4 или 5.

Если первые выбранные часы нуждаются в общей чистке механизма, то вероятность этого события равна $p_1 = \frac{6}{10}$.

Просмотреть двое часов можно в том случае, если первые выбранные часы требуют другого вида ремонта, а вторые – нуждаются в общей чистке механизма. Вероятность такого события равна $p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$.

Просмотреть три пары часов можно в том случае, если первые требуют другого вида ремонта, вторые – тоже требуют другого вида ремонта, а третьи нуждаются в общей чистке механизма. Вероятность такого события $p_3 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10}$.

Аналогично, для возможного значения 4.

$$p_4 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{35}.$$

А также для возможного значения 5

$$p_5 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{210}.$$

Закон распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = \frac{6}{10} + \frac{4}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{35} + \frac{1}{210} = \frac{126+56+21+6+1}{210} = \frac{210}{210} = 1$$

Математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{35} + 5 \cdot \frac{1}{210} =$$

$$= \frac{126+112+66+24+5}{210} = \frac{333}{210} = \frac{111}{70}$$

Дисперсия:

$$M(X^2) = 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{4}{15} + 3^2 \cdot \frac{1}{10} + 4^2 \cdot \frac{1}{35} + 5^2 \cdot \frac{1}{210} =$$

$$= \frac{126+224+198+96+25}{210} = \frac{669}{210} = \frac{223}{70}$$

$$D(X)=\frac{223}{70}-\left(\frac{111}{70}\right)^2=\frac{15610-12321}{4900}=\frac{3289}{4900}.$$

Пример 5. Производится проверка двух независимо работающих приборов. Вероятность того, что в течение часа прибор не потребует внимания испытателя, равна 0,4 для первого и 0,2 для второго экземпляра. Случайная величина X – число приборов, которые не потребуют внимания испытателя.

Для данной случайной величины X составить закон распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Событие A_1 – первый прибор не потребовал внимания испытателя; A_2 – второй прибор не потребовал внимания испытателя.

$P(A_1) = p_1 = 0{,}4;$ $\qquad P(\overline{A_1})=q_1=1-0{,}4=0{,}6;$

$P(A_2) = p_2 = 0{,}2;$ $\qquad P(\overline{A_2})=q_2=1-0{,}2=0{,}8.$

Так как в результате испытания потребовать внимания могут один, два прибора или ни одного, то случайная величина X может принимать значения 0, 1 или 2.

Найдем вероятности возможных значений.

$P(X=2)=q_1\cdot q_2=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48;$

$P(X=1)=p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2=0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}32+0{,}12=0{,}44;$

$P(X=0)=p_1\cdot p_2=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08.$

Закон распределения случайной величины X.

x_i	0	1	2
p_i	0,08	0,44	0,48

Проверка: $\sum\limits_{i=1}^{3}p_i=0{,}08+0{,}44+0{,}48=1.$

Математическое ожидание:

$M(X)=0\cdot 0{,}08+1\cdot 0{,}44+2\cdot 0{,}48=1{,}4.$

Дисперсия:

$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}08+1^2\cdot 0{,}44+2^2\cdot 0{,}48=2{,}36;$

$D(X)=2{,}36-1{,}4^2=0{,}4.$

Примеры решения задания 9

Пример 1. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,1$ возможного значения x_1, математическое ожидание $M(X) = 3,9$, дисперсия $D(X) = 0,09$.

Найти:

а) неизвестные x_1, x_2, p_2;

б) функцию распределения случайной величины.

Построить график F(x).

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X равна единице, поэтому вероятность p_2 того, что случайная величина X примет значение x_2, равна

$p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,1 = 0,9.$

Запишем закон распределения случайной величины X

x_i	x_1	x_2
p_i	0,1	0,9

Используя условия задачи: значения математического ожидания и дисперсии, для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения.

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}9x_2 = 3{,}9 \\ 0{,}1x_1^2 + 0{,}9x_2^2 - 3{,}9^2 = 0{,}09 \end{cases}$$

Решим полученную систему.

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 = 39 \\ x_1^2 + 9x_2^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 39 - 9x_2 \\ (39 - 9x_2)^2 + 9x_2^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 39 - 9x_2 \\ 5x_2^2 - 39x_2 + 76 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 39 - 9x_2 \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 4 \\ x_2 = 3{,}8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 4{,}8 \\ x_2 = 3{,}8 \end{cases} \end{array}\right.$$

По условию $x_1 < x_2$, поэтому условию задачи удовлетворяет только первое решение. Таким образом, искомый закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	3	4
p_i	0,1	0,9

Составим функцию распределения:

а) если $x \le 3$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;

б) если $3 < x \le 4$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 3) = 0{,}1$;

в) если $x > 4$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}1 + 0{,}9 = 1$.

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ 0{,}1, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

График функции распределения представлен на рис. 1.

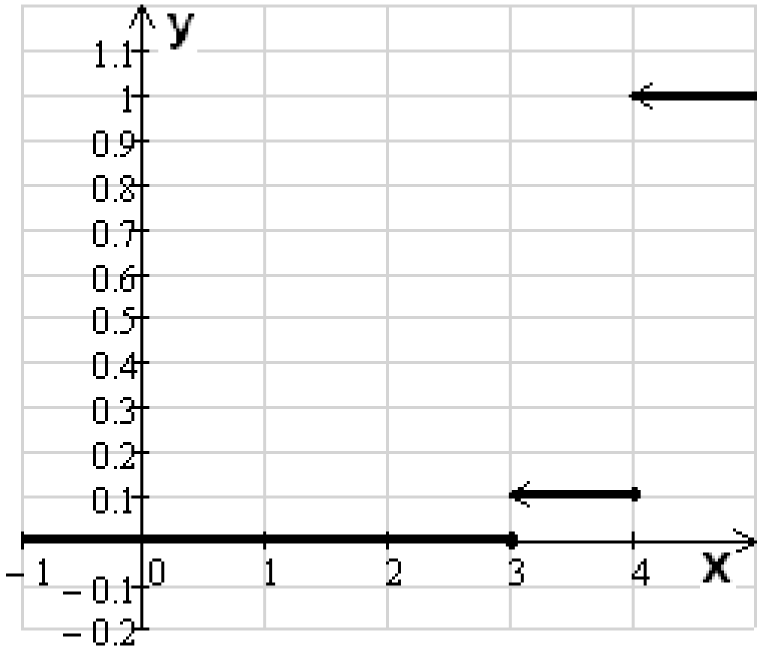


Рисунок 1 − Функция распределения

Пример 2. Число продаваемых в магазине холодильных камер − случайная величина, заданная следующим законом распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,1	p_3	0,3	0,1	0,2

а)найти p_3;

б)найти вероятность того, что завтра число проданных холодильников будет от 1 до 3 включительно;

в)составить функцию распределения числа холодильников, продаваемых ежедневно.

Построить функцию распределения F(x).

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X равна единице, поэтому вероятность

$p_3 = 1 – (0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2) = 0,1.$

Найдем вероятность того, число проданных холодильников от 1 до 3 включительно:

$P(1 \le X \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$=0,1 + 0,1 + 0,3 = = 0,5.$

Найдем функцию распределения.

а) $x \le 0$
$F(x) = P(X < x) = 0$

б) $0 < x \le 1$
$F(x) = P(X = 0) = 0,2$

в) $1 < x \le 2$
$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2 + 0,1 = 0,3$

г) $2 < x \le 3$
$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2+0,1+0,1 = 0,4$

д) $3 < x \le 4$
$F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$
$=0,2+0,1+0,1+0,3 = 0,7$

е) $4 < x \le 5$
$F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$
$= 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8$

ж) $x > 5$
$F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$
$=0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x \le 0\\ 0{,}2; & \text{при } 0 < x \le 1\\ 0{,}3; & \text{при } 1 < x \le 2\\ 0{,}4; & \text{при } 2 < x \le 3\\ 0{,}7; & \text{при } 3 < x \le 4\\ 0{,}8; & \text{при } 4 < x \le 5\\ 1; & \text{при } x > 5\end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 2.

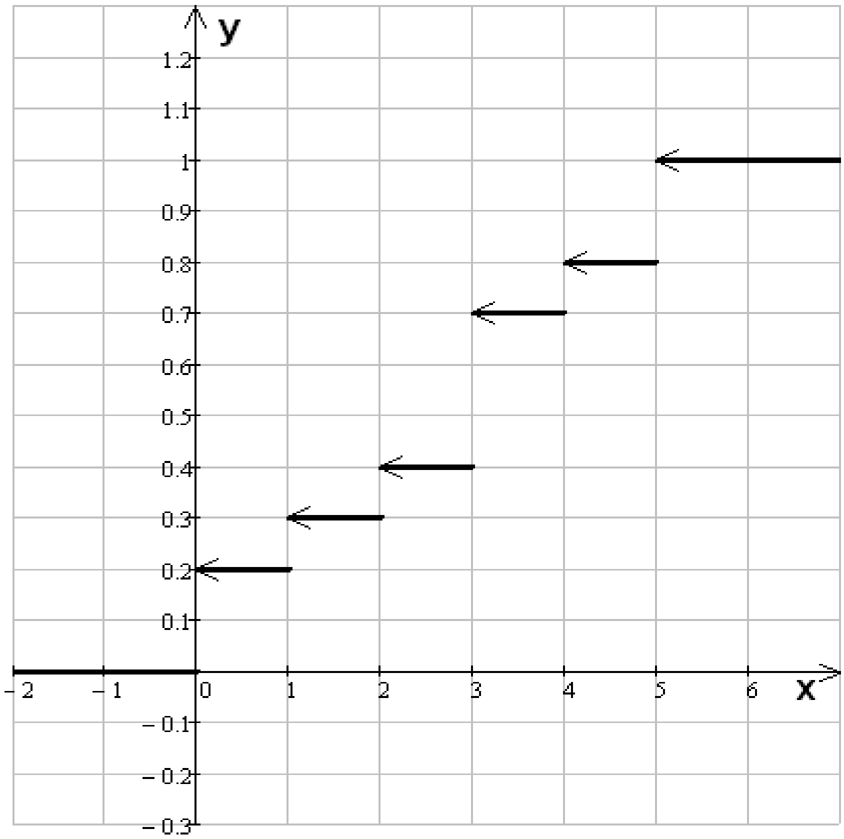


Рисунок 2 − Функция распределения

Непрерывные случайные величины

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Непрерывная случайная величина имеет бесчисленное множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый промежуток. Составить таблицу, в которой были бы перечислены все возможные значения такой случайной величины, невозможно. Для задания непрерывной случайной величины используют интегральную и дифференциальную функции распределения.

Интегральной функцией распределения (или функцией распределения) случайной величины X называется функция F(x), которая определяет вероятность того, что случайная величина X примет значения меньше, чем x:

$F(X) = P(X < x)$.

Первая производная от интегральной функции распределения называется дифференциальной функцией распределения, или плотностью распределения:

$f(x) = F'(x)$.

Перечислим некоторые свойства этих функций.

Для функции распределения:

Свойство 1. Значения интегральной функции распределения принадлежит отрезку [0;1]: $0 \le F(x) \le 1$.

Свойство 2. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a;b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$P(a < X < b) = F(b) – F(a)$.

Свойство 3. Функция F(x) - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Для плотности распределения:

Свойство 1. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее (a;b) равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Если известна плотность распределения, то можно построить функцию распределения по следующей зависимости:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины также являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, которые находят по следующим формулам:

- математическое ожидание:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx.$$

- дисперсия:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2[X].$$

- среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Пример решения задания 10

Дана плотность распределения f(x) непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \gamma(x-1), & 1\le x\le 2,\\ \gamma(5-x), & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5\end{cases}$$

Найти:

а) параметр γ;

б) математическое ожидание случайной величины X;

в) дисперсию случайной величины X;

г) функцию распределения F(x) случайной величины X;

д) вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала от 1,5 до 3.

Построить графики функций f(x) и F(x).

Решение.

а) для плотности распределения справедливо свойство 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Используя это свойство, найдем параметр γ

$$1 = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} \gamma(x-1)dx + \int_{2}^{5} \gamma(5-x)dx + \int_{5}^{\infty} 0dx = \gamma\int_{1}^{2}(x-1)dx + \gamma\int_{2}^{5}(5-x)dx =$$

$$= \gamma\cdot\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 + \gamma\cdot\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5 = \gamma\cdot\left(\frac{2^2}{2} - 2 - \frac{1^2}{2} + 1\right) + \gamma\cdot\left(25 - \frac{5^2}{2} - 10 + \frac{2^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma + \frac{9}{2}\gamma = 5\gamma$$

$5\gamma = 1$;

$$\gamma = \frac{1}{5}.$$

Следовательно, плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 1, \\ \frac{1}{5}(x-1), \quad 1 \le x \le 2, \\ \frac{1}{5}(5-x), \quad 2 < x \le 5, \\ 0, \quad x > 5 \end{cases}$$

б) математическое ожидание непрерывной случайной величины определяют по формуле:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx.$$

Аналогично предыдущему имеем:

$$M(X) = \int_{1}^{2} x\cdot\frac{1}{5}\cdot(x-1)dx + \int_{2}^{5} x\cdot\frac{1}{5}\cdot(5-x)dx = \frac{1}{5}\cdot\int_{1}^{2}\left(x^2 - x\right)dx +$$

$$+ \frac{1}{5}\cdot\int_{2}^{5}\left(5x - x^2\right)dx = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \frac{1}{5}\cdot\left(5\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^5 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\left(5\cdot\frac{5^2}{2}-\frac{5^3}{3}-5\cdot\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{81}{30}=\frac{86}{30}=\frac{43}{15};$$

в) вычислим дисперсию

$$M(X^2)=\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{5}\cdot(x-1)dx+\int_2^5 x^2\cdot\frac{1}{5}\cdot(5-x)dx=\frac{1}{5}\cdot\int_1^2\left(x^3-x^2\right)dx+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\int_2^5\left(5x^2-x^3\right)dx=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2+\frac{1}{5}\cdot\left(5\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_2^5=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\left(5\cdot\frac{5^3}{3}-\frac{5^4}{4}-5\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}\right)=\frac{17}{60}+\frac{513}{60}=\frac{530}{60}=\frac{53}{6}$$

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=\frac{53}{6}-\left(\frac{43}{15}\right)^2=\frac{2126}{450}=\frac{1063}{225};$$

г) построим функцию распределения, используя зависимость $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.$

если $x\le 1$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0;$$

если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_1^x\frac{1}{5}\cdot\left(t-1\right)dt=0+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_1^x=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1^2}{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)$$

если $2<x\le 5$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_1^2\frac{1}{5}\cdot\left(t-1\right)dt+\int_2^x\frac{1}{5}\cdot\left(5-t\right)dt=0+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_1^2+\frac{1}{5}\cdot\left(5t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_2^x=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2^2}{2}-2-\frac{1^2}{2}+1\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(5x-\frac{x^2}{2}-10+\frac{2^2}{2}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\left(5x-\frac{x^2}{2}-8\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+5x-\frac{15}{2}\right)$$

если $x > 5$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_{1}^{2}\frac{1}{5}\cdot(t-1)dt+\int_{2}^{5}\frac{1}{5}\cdot(5-t)dt+\int_{5}^{x}0dt=$$

$$=0+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_1^2+\frac{1}{5}\cdot\left(5t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_2^5+0=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2^2}{2}-2-\frac{1^2}{2}+1\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(25-\frac{5^2}{2}-10+\frac{2^2}{2}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{2}=1$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 1,\\ \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right), \quad 1<x\le 2,\\ \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+5x-\frac{15}{2}\right), \quad 2<x\le 5,\\ 1, \quad x>5\end{cases}$$

д) вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 3) находим, используя свойство 1 плотности распределения.

$$P(1{,}5<X<3)=\int_{1{,}5}^{3}f(x)dx=\int_{1{,}5}^{2}\frac{1}{5}\cdot(x-1)dx+\int_{2}^{3}\frac{1}{5}\cdot(5-x)dx=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{1{,}5}^{2}+\frac{1}{5}\cdot\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{5}\cdot\left(2-2-\frac{1{,}5^2}{2}+1{,}5\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(15-\frac{9}{2}-10+2\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}=\frac{23}{40}$$

Если будем использовать свойство 2 функции распределения, то вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (1,5; 3) будет найдена следующим образом:

$$P(1{,}5<X<3)=F(3)-F(1{,}5)=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{3^2}{2}+15-\frac{15}{2}\right)-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1{,}5^2}{2}-1{,}5+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$$

Графики функции распределения и плотности распределения изображены на рис.3 и 4 соответственно.

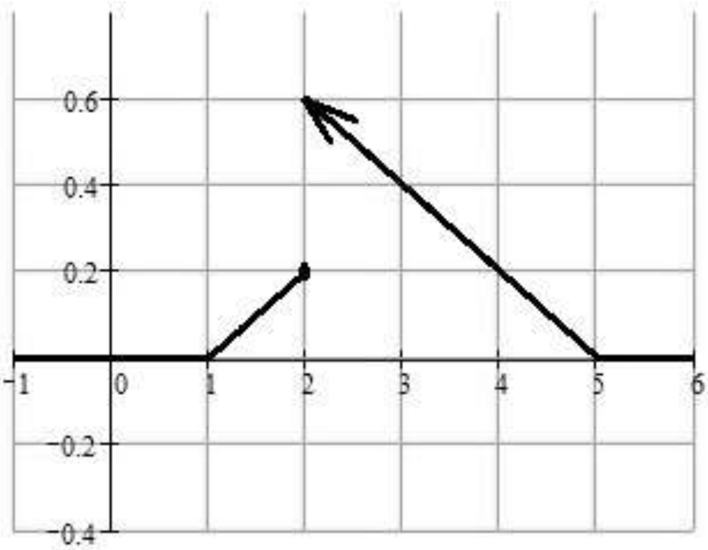


Рисунок 3 − Функция распределения

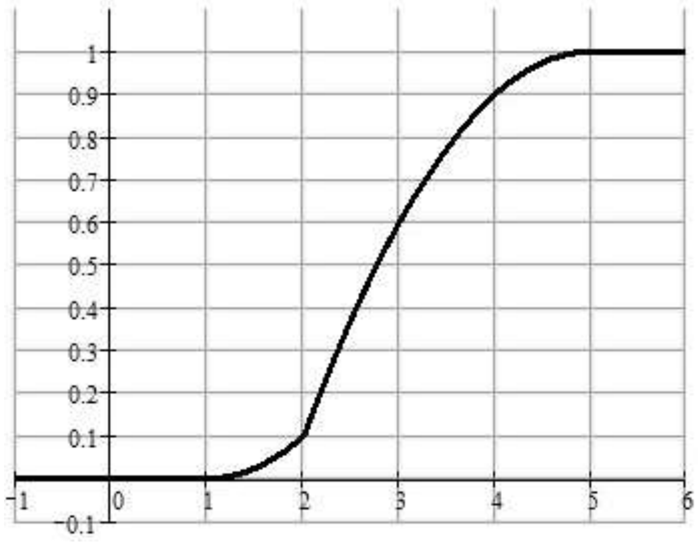


Рисунок 4 − Плотность распределения

Нормальный закон распределения

Одним из важнейших распределений непрерывных случайных величин является нормальный закон распределения. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения, если ее плотность распределения задана выражением:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметры этого распределения имеют следующий смысл: a – математическое ожидание величины X; σ – среднее квадратическое отклонение величины X.

Пример решения задания 11

Дана платность распределения $f(x)=\gamma\cdot e^{-Nx^2+2nx-\frac{n^2}{N}}$ случайной величины X. Найти

а) математическое ожидание случайное величины X,

б) дисперсию случайной величины X,

в) параметр γ,

д) вероятность P(–N < X – M[X] < D[X]),

е) такое d, что $P(-d<X-M[X]<d)=\dfrac{2n+8+N}{2n+8+10N}$

Решение:

$$\text{а) } -Nx^2+2nx-\frac{n^2}{N}=-N\left(x^2-\frac{2n}{N}x+\left(\frac{n}{N}\right)^2-\left(\frac{n}{N}\right)^2\right)-\frac{n^2}{N}=$$

$$=-N\left(\left(x-\frac{n}{N}\right)^2+\frac{n^2}{N}-\frac{n^2}{N}\right)=-N\left(x-\frac{n}{N}\right)^2=-\frac{\left(x-\frac{n}{N}\right)^2}{\frac{1}{N}}=$$

$$=-N\left(x-\frac{n}{N}\right)^2.$$

$$f(x)=\gamma e^{-Nx^2+2nx-\frac{n^2}{N}}=\gamma e^{-N\left(x-\frac{n}{N}\right)^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$ − нормальное распределение,

где a − математическое ожидание случайной величины X, σ − среднее квадратическое отклонение, $D=\sigma^2$ − дисперсия случайной величины X.

В нашем случае математическое ожидание $a=\frac{n}{N}$.

б) $2\sigma^2=\frac{1}{N}$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2N}}$$

Дисперсия случайной величины X

$$D=\sigma^2=\frac{1}{2N}.$$

в) параметр $\gamma=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2N}}\cdot\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{N}{\pi}}$

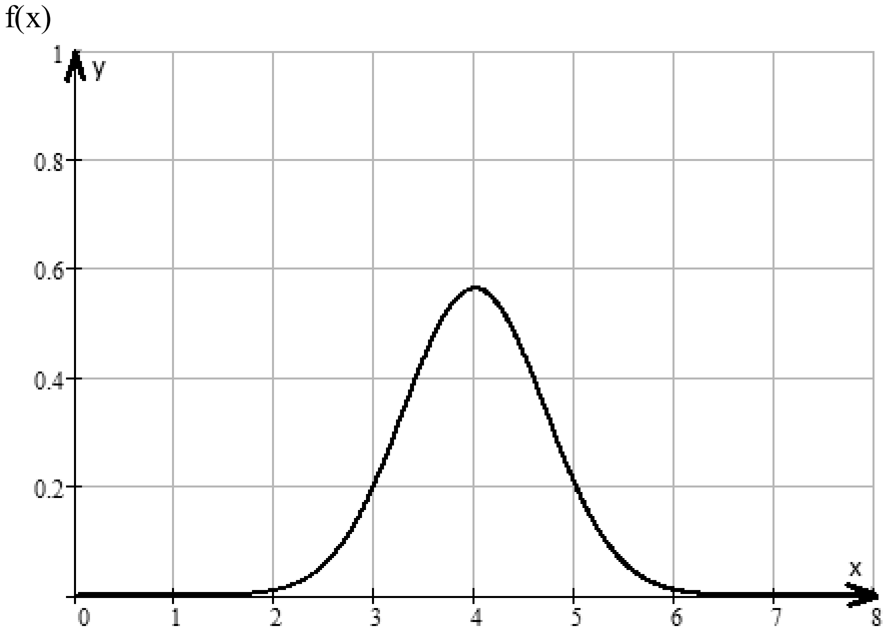
Таким образом, плотность распределения

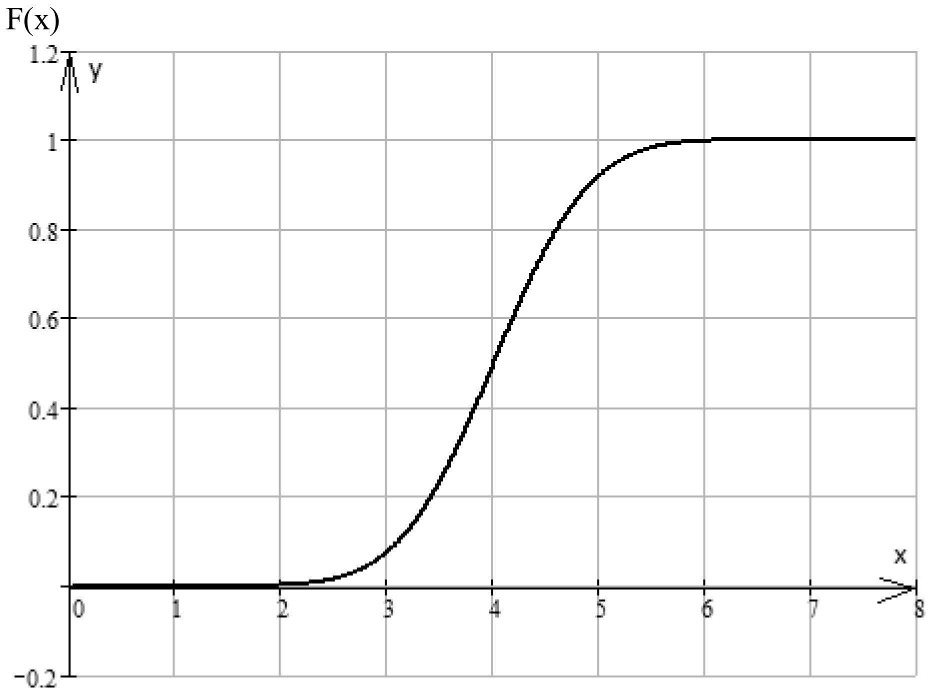
$$f(x)=\sqrt{\frac{N}{\pi}}\,e^{-N\left(x-\frac{n}{N}\right)^2}$$

Функция распределения

$$F(x)=\sqrt{\frac{N}{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-N\left(x-\frac{n}{N}\right)^2}dt$$

График функций f(x), F(x)





d) Пусть $N=1, M[X]=2, D[X]=\frac{1}{4}$. Найдем вероятность

$$P\left(-1<X-2<\frac{1}{4}\right)$$

$$P\left(1<X<\frac{9}{4}\right)$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\beta)$ определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$\alpha = 1;\ \ \beta = \frac{9}{4} = 2{,}25; \quad a = M[X] = 2, \quad \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5$$

$$P(1 < X < 2{,}25) = \Phi\left(\frac{2{,}25 - 2}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 2}{0{,}5}\right)$$

$$P(1 < X < 2{,}25) = \Phi(0{,}50) - \Phi(-2{,}00)$$
$$P(1 < X < 2{,}25) = \Phi(0{,}50) + \Phi(2{,}00)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0{,}50) = 0{,}1915\\ \Phi(2{,}00) = 0{,}4772\end{array}\right\}$$ по таблице значений интегральной функции Лапласа ([1], прилож.2)

$$P(1 < X < 2{,}25) = 0{,}1915 + 0{,}4772 = 0{,}6687;$$

е) Для $N = 1, M[X] = a = 2, n = 4$

найдем такое d, что

$$P(-d < X - 2 < d) = \frac{2 \cdot 4 + 8 + 1}{2 \cdot 4 + 8 + 10 \cdot 1}$$

$$P(-d < X - 2 < d) = \frac{17}{26} = 0{,}6538$$

$$P(|\,x - 2\,| < d) = 2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right), \text{ где } \sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5$$

$$2\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) = 0{,}6538$$

$$\Phi\left(\frac{d}{\sigma}\right) = \frac{0{,}6538}{2} = 0{,}3269$$

$$\frac{d}{\sigma} = 0{,}94$$

$$d = 0{,}94 \cdot \sigma = 0{,}94 \cdot 0{,}5 = 0{,}47.$$

Элементы теории систем массового обслуживания (СМО)

1. Формулировка задачи и характеристики СМО

Практически ежедневно можно столкнуться с такими ситуациями: очередь покупателей в кассах магазинов; колонна автомобилей, движение которых остановлено светофором; ряд станков, вышедших из строя и ожидающих ремонта, и т.д. Все эти ситуации объединяет то обстоятельство, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем, которые называют *системами массового обслуживания (СМО).*

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Основными элементами СМО являются *источники заявок,* их *входящий поток, каналы обслуживания* и *выходящий поток.* Схематически это изображено на рис. 5

Рисунок 5

В зависимости от характера формирования очереди СМО различают:

1) системы с отказами, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;

2) системы с неограниченными ожиданиями, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты.

Существуют и системы смешанного типа с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

В зависимости от расположения источника требований системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

Рассмотрим в отдельности элементы СМО.

Входящий поток: на практике наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t,* равно *к,* определяется по закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t},$$

где λ — *интенсивность потока заявок,* т.е. среднее число заявок в единицу времени:

$$\Delta = 1/\bar{\tau} \quad \text{(чел./мин, р./ч, автом./дн., квт/ч)},$$

где $\bar{\tau}$ − среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t}.$$

где ν — *интенсивность движения очереди,* т.е. среднее число заявок, приходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = 1/\bar{t}_{оч},$$

где $\bar{t}_{\text{î÷}}$ − среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\bar{t}_{обс}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t_{обс}) = \mu e^{-\mu t},$$

где μ — *интенсивность потока обслуживания,* т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = 1/\bar{t}_{обс} \text{ (чел./мин, р./дн., кг/ч, докум./дн.),}$$

где $\bar{t}_{обс}$ − среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является *интенсивность нагрузки*

$$\rho = \lambda / \mu.$$

Рассмотрим n-канальные разомкнутые СМО.

2. СМО с отказами

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки **($t_{обс}$)** распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима

1.Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок *(к* = 0):

$$P_0 = 1 / \sum_{k=0}^{n} \rho^k / k!$$

2.Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми *(к = n):*

$$P_{отк} = P_n = P_0 \rho^n / n!$$

3.Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов

$$\overline{n}_з = \rho P_{обс}.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_з = \overline{n}_з / n.$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{обс}.$$

3. СМО с неограниченным ожиданием

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т.е. $P_{отк} = 0$ и $P_{обс} = 1$.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу "первым пришел − первым обслужен";

2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу "последний пришел − первым обслужен";

3) обслуживание с приоритетами по принципу "генералы и полковники вне очереди".

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок *(к* = 0):

$$P_0 = 1/(\sum_{k=0}^{n}(\rho^k / k!) + \rho^{n+1} / n!(n-\rho)).$$

Предполагается, что ρ/*n* < 1.

2. Вероятность занятости обслуживанием *к* заявок:

$$P_k = \rho^k P_0 / k!, \quad 1 \le k \le n.$$

3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$P_n = \rho^n P_0 / n!.$$

4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0.$$

5. Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0.$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\ell_{оч} = \overline{L}_{оч} / \lambda.$$

7. Среднее время пребывания заявки с СМО:

$$\bar{t}_{СМО} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс}.$$

8. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\overline{n}_з = \rho$$

9. Среднее число свободных каналов**:**

$$n_{св} = n - \overline{n}_з.$$

10. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$h_з = \overline{n}_з / n.$$

11. Среднее число заявок в СМО:

$$\overline{z} = \overline{L}_{оч} + \overline{n}_з.$$

4. СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании.

Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1) ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;
2) ограничения сверху длины очереди;
3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима

1.Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок *(к* = 0):

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left[1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]\right\}}$$

2.Вероятность отказа в обслуживании*:*

$$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n!{\cdot}n^m} \cdot P_0$$

3.Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк}.$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{обс} \cdot \lambda.$$

5. Среднее число занятых каналов

$$\overline{n}_з = \frac{A}{\mu}.$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1-(\rho/n)^m(m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2}.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\overline{L}_{оч}}{\lambda}$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{z} = \overline{L}_{оч} + \bar{n}_з.$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{\bar{z}}{\lambda}.$$

Примеры решения задачи 12

Пример 1. В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}95$ (* − заданное значение $P_{обс}$)

Решение. По условию задачи $\lambda = 24$ дет./ч $= 0{,}4$ дет./мин, $\bar{t}_{обс} = 5$ мин, тогда $\mu = 0{,}2$, $\rho = \lambda / \mu = 2$.

1.Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \frac{1}{2^0/0! + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3!} = \frac{1}{1+2+2+1{,}3} 0{,}1587,$$

где $0! = 1$.

2.Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = 2^3 \cdot 0{,}1587 / 3! = 0{,}21.$$

3.Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

4.Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием

$k_з = 1{,}58/3 = 0{,}526$.

6. Абсолютная пропускная способность:

$A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316$.

При $n = 3$ $P_{îáñ} = 0{,}79 \le P^*_{îáñ} = 0{,}95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим

$P_0 = 0{,}14; \quad P_{отк} = 0{,}93; \quad P_{обс} = 0{,}907.$

Так как $P_{обс} = 0{,}907 \le P^*_{обс} = 0{,}95$ то, произведя расчеты для $n = 5$, получим

$P_0 = 0{,}137; \quad P_{отк} = 0{,}035; \quad P_{обс} = 0{,}965 \ge P^*_{обс} = 0{,}95.$

Ответ. Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

Пример 2. Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров $(n = 3)$ для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью λ = 30 чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{обс} = 3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Решение. Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1/3 = 0{,}333$, интенсивность нагрузки $\rho = 1{,}5$.

1. Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^o}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}} = 0{,}210.$$

2. Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot 0{,}21 = 0{,}118.$$

3. Вероятность очереди:

$$P_{оч} = \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)} \cdot 0{,}21 = 0{,}118.$$

4. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2} \cdot 0{,}21 = 0{,}236.$$

5. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472 \text{ мин.}$$

6. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$\bar{t}_{СМО} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472$ мин.

7. Среднее число свободных каналов:

$\bar{n}_{св} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5.$

8. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_з = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$$

9. Среднее число посетителей в сберкассе:

$\bar{z} = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736$ чел.

Ответ. Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

Пример 3. Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью λ = 6 машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика (n = 3), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{обс} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.

Решение. Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$\rho = \lambda / \mu = 6/3 = 2, \quad \mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1 \cdot 12/4 = 3$ авт/дн.

1. Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0{,}128,$$

причем 0! = 1,0.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_0 = P_{n+m} = 0{,}128 \cdot \frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0{,}075.$$

3. Вероятность обслуживания:

$P_{обс} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$

Так как $P_{обс} = 0{,}925 < P^*_{обс} = 0{,}97$, произведем аналогичные вычисления для $m = 3$, получим

$P_0 = 0{,}122; \quad P_{отк} = 0{,}048; \quad P_{обс} = 0{,}952$.

Так как $P_{обс} = 0{,}925 < P^*_{обс} = 0{,}97$, примем $m = 4$. Для этого случая

$P_0 = 0{,}12; \quad P_{отк} = 0{,}028; \quad P_{обс} = 0{,}972$,

$0{,}972 > 0{,}97$, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до $m = 4$.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для $n = 4$, 5 и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных помещений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_0 = 0{,}12; \quad P_{отк} = 0{,}028; \quad P_{обс} = 0{,}972$..

4. Абсолютная пропускная способность:

$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832$ авт./дн.

5. Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$\bar{n}_{зан} = 5{,}832/3 = 1{,}944.$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\overline{L}_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1-(2/3)^4(4+1-4 \cdot 2/3)}{(1-2/3)^2} \cdot 0{,}120{,}548.$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \text{ дн.}$$

8. Среднее число машин в магазине:

$\bar{z} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492$ авт.

9. Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{СМО} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \text{ дн.}$$

Ответ: Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами $(m = 4)$, при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{обс} = 0{,}972$.

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. [Текст] : учебное пособие. / Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. − М.:1986.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для бакалавров. / В.Е.Гмурман. − М.: Высшая школа, 2012. - 479с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. [Текст] : учебное пособие. / В.Е.Гмурман. −М.: Высшая школа, 2011.-404с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций [Текст]: учебник/ Е.С. Вентцель.− М.: Советское радио. 1972. − 552с.