

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 25.09.2022 14:44:10

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики



# ***Интегрирование функций одной переменной. Приложения.***

***Методические указания по выполнению модуля-5***

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры  
высшей математики *К.В.Жилина*

**Интегрирование функций одной переменной. Приложения:**  
методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос.  
ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап; Курск, 2014. 51 с., табл.  
1. Рис.13. Библиогр.: с.55

Излагаются краткие методические рекомендации по темам математического анализа: неопределенные интегралы и методы их решения, определенный интеграл и его вычисления, несобственные интегралы, приложения определенных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать \_\_\_\_\_. Формат 60х84 1/16.  
Усл. печ. л. \_\_\_\_\_. Уч.-изд. л. \_\_\_\_\_. Тираж \_\_\_\_\_ экз. Заказ. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

## Содержание

Введение .....	4
1. Неопределенный интеграл.....	5
1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле.....	5
1.2. Формула интегрирования по частям.....	8
1.3. Интегрирование рациональных функций.....	10
1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы.....	19
1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов.....	24
1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции.....	26
2. Определенный интеграл.....	30
2.1. Определение и свойства определенного интеграла.....	30
2.2. Методы вычисления определенного интеграла.....	32
2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница.....	32
2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле.....	33
2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле.....	34
3. Несобственные интегралы.....	35
3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.....	35
3.2. Несобственные интегралы от неограниченной функции.....	39
4. Приложение определенного интеграла.....	41
4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах.....	41
4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически.....	45
4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах.....	46
4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой.....	47
4.5. Вычисление объема тел вращения.....	49
4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения.....	52
Список рекомендуемой литературы.....	53

## Введение

Цель настоящего методического пособия – научить студента технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, где приводятся основные определения, формулы, теоремы без доказательств. При подборе задач авторы прежде всего исходили из учета тех трудностей, с которыми могут встретиться студенты на пути овладения методами интегрирования.

В работе приведены 52 примера с подробными решениями по указанной тематике. При вычислении площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов тел вращения решения иллюстрировались для наглядности рисунками и подробными пояснениями.

Данное пособие является приложением к модулю 5 «Интегрирование функций», в котором приведены индивидуальные задания по темам «Неопределенные интегралы», «Несобственные интегралы» и «Определенные интегралы и их приложения». Методическое пособие предназначено для студентов первого курса технических и экономических специальностей.

Авторы надеются, что это методическое издание поможет студентам в самостоятельной работе по выполнению модуля и изучению данного материала.

## 1. Неопределенный интеграл

### 1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем несколько определений, свойств интегралов, формул.

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если во всех точках этого отрезка выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Если функция имеет первообразную, то функции вида  $F(x) + C$ , где  $C$  – постоянная, также являются первообразными.

*Неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  называется совокупность (или семейство) всех ее первообразных:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции и основывается на следующих правилах интегрирования:

а)  $\int dF(x) = F(x) + C;$

б)  $(\int f(x) dx)' = f(x);$

в)  $d(\int f(x) dx) = f(x) dx;$

г)  $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$  где  $C$  – постоянная;

д)  $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx$

е)  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C;$

ж) Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$  и  $t = \varphi(x)$ , то  $\int f(t) dt = F(t) + C.$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1)  $x = \varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

где  $\varphi(t)$  – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной  $t$ ;

2)  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$

$u = g(x)$ ,  $u$  – новая переменная.

### Таблица основных интегралов

- |                                                                                            |                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\int dx = x + C;$                                                                      | 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ |
| 3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C;$                                                    | 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$                                        |
| 5) $\int e^x dx = e^x + C;$                                                                | 6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$                                               |
| 7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$                                                          | 8) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$                       |
| 9) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C;$                               | 10) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$                     |
| 11) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$                               | 12) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C;$       |
| 13) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C;$                   |                                                                                  |
| 14) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$ |                                                                                  |
| 15) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$                     |                                                                                  |
| 16) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$      |                                                                                  |
| 17) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C;$   |                                                                                  |
| 18) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$                        |                                                                                  |
| 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln  x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C;$               |                                                                                  |
| 20) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln  f(x)  + C;$                                         |                                                                                  |
| 21) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$                                |                                                                                  |

$$22) \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$$

$$23) \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$24) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$25) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

*Пример 1.* Найти интеграл  $\int (2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8) dx$ .

*Решение.* Используя свойства степеней и правила интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int \left( 2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8 \right) dx &= 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 7 \cdot \int x^{-2} dx + 3 \int x dx - 8 \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 8 \cdot x + C = \\ &= \frac{4}{3} x \sqrt{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{2} x^2 - 8x + C. \end{aligned}$$

*Пример 2.* Найти интеграл  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ .

*Решение.* Правило ж) позволяет найти интеграл с помощью метода подведения функции под знак дифференциала. Исходный интеграл можно привести к формуле 2 из таблицы интегралов, преобразовав его следующим образом

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot d(\ln x), \quad \text{где} \quad d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

Далее в качестве переменной выберем  $t = \ln x$ , тогда получим интеграл от степенной функции

$$\int \ln^3 x d(\ln x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \ln^4 x + C.$$

*Пример 3.* Найти интеграл  $\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx$ .

*Решение.* Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, получим

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx &= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x) = \\
&= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x + 8) = \{t = \sin x + 8\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \\
&= \frac{2}{3} (\sin x + 8)^{3/2} + C = \frac{2}{3} (\sin x + 8) \cdot \sqrt{\sin x + 8} + C.
\end{aligned}$$

*Пример 4.* Найти интеграл  $\int (3x + 10)^{15} dx$ .

*Решение.* Введем новую переменную  $t = 3x + 10$ , тогда  $x = \frac{1}{3}(t - 10)$ ,  $dx = \frac{1}{3}(t - 10)'dt = \frac{1}{3}dt$ .

Отсюда получаем

$$\int (3x + 10)^{15} dx = \int t^{15} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{48} \cdot (3x + 10)^{16} + C.$$

*Замечание.* Можно было воспользоваться формулой е).

*Пример 5.* Найти интеграл  $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{7x+1}} dx$ .

*Решение.* Выполним подстановку  $t = \sqrt{7x+1}$ , тогда  $7x+1 = t^2$ ,  $x = \frac{1}{7}(t^2 - 1)$ ,  $dx = \frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1)'dt = \frac{2}{7} \cdot t dt$ .

Применив формулу 17, имеем:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \sqrt{7x+1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1) \cdot t} \cdot \frac{2}{7} \cdot t \cdot dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1^2} dt = \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{7x+1}-1}{\sqrt{7x+1}+1} \right| + C.
\end{aligned}$$

## 1.2. Формула интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение данной формулы целесообразно в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение разных по смыслу функций – степенной и показательной, степенной и тригонометри-



ческой, показательной и тригонометрической, логарифмической и степенной и т.п.

При этом за  $u(x)$  обозначают такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за  $dv$  – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден.

К таким интегралам, например, относятся

$$\int P_n(x) \ln x \, dx, \quad \int P_n(x) \cdot \sin \alpha x \, dx, \\ \int P_n(x) \cdot \cos \beta x \, dx, \quad \int a^{kx} \cdot \sin \beta x \, dx, \quad \int P_n(x) \cdot \arcsin x \, dx \text{ и т.д.,}$$

где  $P_n(x)$  – многочлен степени  $n$ .

*Пример 6.* Найти интеграл  $\int (2x + 3) \cdot \sin x \, dx$ .

*Решение.* Пусть  $u = 2x + 3$ , тогда  $du = 2 \cdot dx$ ;  $dv = \sin x \, dx$ , тогда  $v = -\cos x$ .

По формуле интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \int (2x + 3) \cdot \sin x \, dx &= -(2x + 3) \cdot \cos x - \int (-\cos x) \cdot 2 \cdot dx = \\ &= -(2x + 3) \cdot \cos x + 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

*Пример 7.* Найти интеграл  $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$ .

*Решение.* Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot \ln x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3 \cdot dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16} + C. \end{aligned}$$

При отыскании некоторых интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить несколько раз, прежде чем сведем его к табличному или получим исходный интеграл.

*Пример 8.* Найти интеграл  $J = \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx$ .

*Решение.* Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned}
J &= \int 3^x \cdot \cos 5x \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3^x, \quad du = 3^x \cdot \ln 3 \cdot dx \\ dv = \cos 5x dx, \quad v = \frac{\sin 5x}{5} \end{array} \right\} = \\
&= 3^x \cdot \frac{1}{5} \cdot \sin 5x - \int \frac{1}{5} \cdot \sin 5x \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3^x, \quad du = 3^x \cdot \ln 3 dx \\ dv = \sin 5x dx, \quad v = -\frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x - \frac{1}{5} \cdot \ln 3 \cdot \left( 3^x \cdot \left( -\frac{\cos 5x}{5} \right) + \int \frac{\cos 5x}{5} \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx \right) = \\
&= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot \int 3^x \cdot \cos 5x dx.
\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{5} \cdot 3^x \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x - \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J \quad \text{или} \\
J + \frac{\ln^2 3}{25} \cdot J &= \frac{3^x}{5} \cdot \sin 5x + \frac{\ln 3}{25} \cdot 3^x \cdot \cos 5x, \\
\frac{25 + \ln^2 3}{25} \cdot J &= \frac{3^x}{25} (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x), \\
J &= \frac{3^x}{25 + \ln^2 3} \cdot (5 \sin 5x + \ln 3 \cdot \cos 5x) + C.
\end{aligned}$$

### 1.3. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

$$\begin{aligned}
\text{I.} \quad & \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C; \\
\text{II.} \quad & \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k \neq 1; \\
\text{III.} \quad & \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx;
\end{aligned}$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^2} dx,$$

где  $A, B, p, q, a$  – действительные числа.

На конкретных примерах покажем, как интегрируются простейшие дроби III и IV типов.

*Пример 9.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}$ .

*Решение.* В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$$x^2 - 6x + 18 = (x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9) + 9 = (x - 3)^2 + 3^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} &= \int \frac{d(x - 3)}{(x - 3)^2 + 3^2} = \{t = x - 3\} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{3} + C. \end{aligned}$$

Использована формула 16 из таблицы интегралов.

*Пример 10.* Найти интеграл  $\int \frac{5x + 1}{x^2 + 4x - 1} dx$ .

*Решение.* Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$$(x^2 + 4x - 1)' = 2x + 4,$$

$$5x + 1 = \frac{5}{2}(2x + 4) - 10 + 1 = \frac{5}{2}(2x + 4) - 9.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 1}{x^2 + 4x - 1} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 4) - 9}{x^2 + 4x - 1} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x + 4)dx}{x^2 + 4x - 1} - 9 \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 1} = J. \end{aligned}$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов  $(2x + 4)dx = d(x^2 + 4x - 1)$ . Введем новую переменную  $t = x^2 + 4x - 1$ , получим табличный интеграл 3. Во втором интегра-

ле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат:  $x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$ , а интеграл сведем к табличному (формула 17). Тогда

$$\begin{aligned} J &= \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x - 1)}{x^2 + 4x - 1} - 9 \cdot \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \\ &= \{t = x^2 + 4x - 1, z = x + 2\} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t} - 9 \int \frac{dz}{z^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{5}{2} \ln |t| - 9 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{5}}{z + \sqrt{5}} \right| + C = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \ln |x^2 + 4x - 1| - \frac{9}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x + 2 - \sqrt{5}}{x + 2 + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться, так называемой, рекуррентной формулой:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = J_n;$$

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot J_{n-1}.$$

*Пример 11.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = J_2$

*Решение.* Здесь  $n = 2$ ;  $a^2 = 4$ . После применения рекуррентной формулы получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x}{2 \cdot 4 \cdot (2-1) \cdot (x^2 + 4)^{2-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot J_1 = \\ &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Если  $n > 2$ , то рекуррентной формулой нужно пользоваться несколько раз, пока интеграл не будет сведен к табличному.

*Пример 12.* Найти интеграл  $\int \frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx$ .

*Решение.* Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоя-

щего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2 + 4x + 5) = (2x + 4)dx.$$

$$\frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{\frac{1}{2}(2x + 4) + 3}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{3}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{(x^2 + 4x + 5)^2} + 3 \int \frac{d(x + 2)}{((x + 2)^2 + 1)^2} = \\ &= \{x^2 + 4x + 5 = t; \quad x + 2 = z\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 3 \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + 3 \cdot \left( \frac{z}{2 \cdot 1 \cdot (z^2 + 1)} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot \int \frac{dz}{z^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{-1}{2t} + \frac{3z}{2(z^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} z + C = \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 4x + 5)} + \frac{3(x + 2)}{2(x^2 + 4x + 5)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(x + 2) + C. \end{aligned}$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби  $\frac{Q(x)}{P(x)}$ ;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x) = (x - a)^m \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^n \cdot \dots,$$

где квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  не имеет действительных корней, а  $p$  и  $q$  – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  (степень многочлена

на

$P(x)$  меньше степени многочлена  $Q(x)$ ) раскладывают на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{(x - a)^m} + \frac{A_2}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x - a} + \dots + \\ & + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{x^2 + px + q}; \end{aligned}$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, B_1, C_1, \dots, B_n, C_n$ .

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

$$\text{Пример 13. } \frac{5x^2 + 14}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x + 5}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некрайнему корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

$$\text{Пример 14. } \frac{7x^2 + 8x - 1}{(x + 3)^4} = \frac{A}{(x + 3)^4} + \frac{B}{(x + 3)^3} + \frac{C}{(x + 3)^2} + \frac{D}{x + 3}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

$$\text{Пример 15. } \frac{5x^2 + 2x + 4}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 5}.$$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к.  $D_1 = 1 - 4 < 0$ ,  $D_2 = 1 - 20 < 0$ , многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

$$\text{Пример 16. } \frac{3x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

Пример 17.

$$\begin{aligned} & \frac{3x^4 + 7x - 1}{(x + 2)x^2(x^2 + x + 5)^2(x^2 - x + 2)} = \\ & = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + F}{(x^2 + x + 5)^2} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 5} + \frac{Lx + M}{x^2 - x + 2}. \end{aligned}$$

Данное представление правильной рациональной дроби вытекает из анализа примеров 13–16.

Коэффициенты  $A, B, C, D, \dots$  в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

$$\text{Пример 18. Найти } \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx.$$

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} &= \frac{x(x + 2) + 5}{x + 2} = x + \frac{5}{x + 2}. \\ \int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx &= \int \left( x + \frac{5}{x + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln |x + 2| + C. \end{aligned}$$

*Пример 19.* Найти  $\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} dx$ .

*Решение.* Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\begin{aligned} \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} &= \frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)} = \frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)} = \\ &= \frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ :

$$7x-3 = (Ax+B) \cdot (x-1) + C(x^2+1)$$

$$7x-3 = (A+C)x^2 + (-A+B)x + C-B.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} A+C=0, \\ -A+B=7, \\ C-B=-3 \end{array} \right\}$$

Складывая все три равенства, получим

$$2C=4 \quad \text{или} \quad C=2.$$

Из первого уравнения системы  $A=-C$  или  $A=-2$ .

Из второго уравнения системы получим

$$B=7+A \quad \text{или} \quad B=7-2=5.$$

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-2x+5}{x^2+1} + \frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1} dx &= \int \left( \frac{-2x+5}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{2x}{x^2+1} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2+1} + 2 \ln |x-1| = \\ &= -\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 5 \operatorname{arctg} x + 2 \ln |x-1| = \end{aligned}$$



$$= -\ln(x^2 + 1) + 5\operatorname{arctg}x + 2\ln|x - 1| + C =$$

$$= 5\operatorname{arctg}x + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} + C.$$

*Пример 20.* Найти  $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$ .

*Решение.* Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x^4 - 8x^2 + 16 \\ x^5 - 8x^3 + 16x & x \\ \hline 8x^3 - 16x + 1 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} = x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} = x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= x + \frac{8x^3 - 16x + 1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

$$\frac{8x^3 - 16x + 1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3 - 16x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты А, В, С, D найдем комбинированным методом: А и С – методом подстановки, а В и D – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть  $x = -2$ , тогда

$$8 \cdot (-2)^3 + 16 \cdot 2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 16 + D \cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16C = -31; \quad C = -\frac{31}{16}.$$

Пусть  $x = 2$ , тогда

$$8 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 + 1 = 16A + B \cdot 0 + C \cdot 16 + D \cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A = 33; \quad A = \frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} & A(x-2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2) = \\ & = A(x^2 - 4x + 4) + B(x^3 + 2x^2 - 4x + 8) + C(x^2 - 4x + 4) + \\ & + D(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = (B+D)x^3 + (A+2B+C-2D)x^2 + \\ & + (-4A-4B-4C-4D)x + (4A+8B+4C+8D) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 8x^3 - 16x + 1 &= (B+D)x^3 + (A+2B+C-2D)x^2 + \\ &+ (-4A-4B-4C-4D)x + 4A+8B+4C+8D. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных  $A, B, C$  и  $D$ .

$$\left. \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B+D=8, \\ A+2B+C-2D=0, \\ -4A-4B-4C-4D=-16, \\ 4A+8B+4C+8D=1 \end{array}$$

Учитывая, что  $A = \frac{33}{16}$ ,  $C = -\frac{31}{16}$ , воспользуемся только пер-

вым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} D = 8 - B, \\ \frac{33}{16} + 2B - \frac{31}{16} - 2(8 - B) = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{129}{32}, \\ B = \frac{127}{32}. \end{array} \right.$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx = \\ & = \int \left( x + \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{127}{32} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{31}{16} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32} \ln |x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2} + C.$$

*Пример 21.* Найти  $\int \frac{x^3}{(x+5)^5} dx$ .

*Решение.* Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной:  $x+5=t$ ;  $x=t-5$ ;  $dx=dt$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x+5)^5} dx &= \int \frac{(t-5)^3}{t^6} dx = \int \frac{t^3 - 15t^2 + 75t - 125}{t^6} dt = \\ &= \int \left( \frac{1}{t^3} - 15 \cdot \frac{1}{t^4} + 75 \cdot \frac{1}{t^5} - 125 \cdot \frac{1}{t^6} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{15}{-3t^3} + \frac{75}{-4t^4} - \frac{125}{-5t^5} + C = \\ &= -\frac{1}{2(x+5)^2} - \frac{5}{(x+5)^3} - \frac{75}{4(x+5)^4} + \frac{25}{(x+5)^5} + C. \end{aligned}$$

#### 1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки  $t = \omega(x)$ , которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция  $\omega(x)$  выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от  $x$ .

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения*.

1) *Интегралы вида*  $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx,$

где  $R$  означает рациональную функцию от двух аргументов,

$m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – постоянные.

Полагаем,

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Интеграл приводится к виду

$$\int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

здесь  $R, \varphi(t), \varphi'(t)$  – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив  $t = \omega(x)$ .

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \dots\right) dx,$$

где показатели  $r, s, \dots$  – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю  $m$ , чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от  $x$

и радикала  $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ .

*Пример 22.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} &= \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{t \cdot (-6t^2) dt}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1\right)(t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \\ &= \int \left( -\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

где  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ .

**2) Интегралы вида**  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ .

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

*Пример 23.* Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$ .

*Решение.* Преобразуем квадратный трехчлен

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1; \quad x - 3 = t, \quad x = t + 3, \quad dx = dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} &= \int \frac{d(x - 3)}{\sqrt{(x - 3)^2 - 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{табличный} \\ \text{интеграл 19} \end{array} \right\} \\ &= \ln |t + \sqrt{t^2 - 1}| + C = \ln |x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 8}| + C. \end{aligned}$$

**3) Интегралы вида**  $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ .

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

*Пример 24.* Найти  $\int \frac{7x + 2}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx$ .

*Решение.* Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$$(-x^2 + 4x + 5)' = -2x + 4.$$

$$7x + 2 = -\frac{7}{2}(-2x + 4 - 4) + 2 = -\frac{7}{2}(-2x + 4) + 16.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx = \int \frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx = \\
& = -\frac{7}{2} \int \frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5} + 16 \cdot \int \frac{dx}{-x^2+4x+5} = \\
& = \left\{ \begin{aligned} (-2x+4)dx &= d(-x^2+4x+5) \\ -x^2+4x+5 &= -(x^2-4x+4-4)+5 = -(x-2)^2+9 \end{aligned} \right\} = \\
& = -\frac{7}{2} \int \frac{d(-x^2+4x+5)}{\sqrt{-x^2+4x+5}} + 16 \cdot \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \\
& = \left\{ -x^2+4x+5 = t; \quad x-2 = z \right\} = \\
& = -\frac{7}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 16 \int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = -7\sqrt{t} + 16 \arcsin \frac{z}{3} + C = \\
& = -7\sqrt{-x^2+4x+5} + 16 \arcsin \frac{x-2}{3} + C.
\end{aligned}$$

#### 4) Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, (a \neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

*I –я подстановка Эйлера.* Если  $a > 0$ , то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + t.$$

Для определенности рассмотрим случай

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t. \text{ Тогда}$$

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a} \cdot x \cdot t + t^2, \quad x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a} \cdot t}, \text{ то}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot x + t = \sqrt{a} \cdot \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t \quad - \quad \text{рациональная}$$

функция от  $t$ ,  $dx$  также выражается рационально через  $t$ .

*II-я подстановка Эйлера.* Если  $c > 0$ , то полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Для определенности считаем, что перед  $c$  стоит знак «+». Тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c, \quad x = \frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}.$$

При этом  $dx$  и  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  выражаются рационально через  $t$ , поэтому  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  сводится к интегралу рациональной функции зависящей от  $t$ .

*Пример 25.* Найти интеграл  $\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$ .

*Решение.* Применим 2-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1; \quad 1 + x + x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1,$$

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}, \quad 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + 1}{1 - t^2}.$$

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx = \int \frac{(-2t^2 + 1)^2 (1 - t^2)^2 \cdot (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = -2 \int \frac{-t^2 + 1 - 1}{1 - t^2} dt = -2 \int \left( 1 + \frac{2}{1 - t^2} \right) dt =$$

$$= -2t + \ln \left| \frac{t + 1}{1 - t} \right| + C,$$

$$\text{где } t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}.$$

*III-я подстановка Эйлера.* Квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет действительные корни  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

сводится к интегралу от рациональной функции от  $t$  с помощью замены

$$a \neq 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{или} \\ \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t, \quad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

## 1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

*Биномиальными* называются дифференциалы вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где  $m, n, p$  – рациональные числа,  $a, b$  – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ .

(1.5)

1)  $n$  – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от  $t$ , если положить  $t = \sqrt[n]{x}$ ,  $\lambda$  – наименьшее общее кратное знаменателей дробей  $m$  и  $n$ .

2)  $\frac{m+1}{n}$  – целое число, тогда рационализации подынтегрального

выражения можно достигнуть, используя замену

$$t = \sqrt[n]{a + bx^n}, \quad v - \text{знаменатель дроби } p.$$

3)  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое.

Замена  $t = \sqrt[n]{ax^{-n} + b}$ ,  $v$  – знаменатель дроби  $p$ , позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Эти случаи интегрируемости были известны еще Ньютону. Однако, только в середине прошлого столетия П.Л.Чебышев установил факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет. Поэтому подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

*Пример 26.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{1+x^5}}$ .



*Решение:*  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1} (1+x^5)^{-\frac{1}{3}} dx.$

$$m = -1, n = 5, p = -\frac{1}{3}; \quad v = 3.$$

Применим II подстановку Чебышева, т.к.  $\frac{m+1}{n} = 0$  – целое число

$$t = \sqrt[3]{1+x^5}, \quad 1+x^5 = t^3, \quad x = (t^3-1)^{1/5}; \quad dx = \frac{3}{5} t^2 (t^3-1)^{-\frac{4}{5}} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}} &= \frac{3}{5} \int \frac{t dt}{t^3-1} = \frac{1}{5} \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1} \right) dt = \\ &= \left\{ (t^2+t+1)' = 2t+1, \quad t-1 = \frac{1}{2}(2t+1) - \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{3}{10} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{5} \ln |t-1| - \frac{1}{10} \ln(t^2+t+1) + \frac{3}{10} \cdot \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

*Пример 27.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{2-x^3}}.$

*Решение.* Подынтегральную функцию можно записать в виде  $x^{-3} \cdot (2-x^3)^{-\frac{1}{3}}.$  Здесь  $m = -3; \quad n = 3; \quad p = -\frac{1}{3}$  и

$\frac{(m+1)}{n} + p = \frac{(-3+1)}{3} - \frac{1}{3} = -1$  – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Про-

изведем замену переменной:  $2x^{-3} - 1 = t^3$ , тогда  $d(2x^{-3} - 1) = dt^3$   
или  $-6x^{-4}dx = 3t^3dt$  или  $x^{-4}dx = -\frac{1}{2}t^2dt$ .

Преобразуем исходный интеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}} &= \int x^{-3} \cdot (2-x^3)^{-\frac{1}{3}} dx = \int x^{-3} \cdot (x^3(2x^{-3}-1))^{-\frac{1}{3}} dx = \\&= \int x^{-3} \cdot x^{-1} \cdot (2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \int (2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}} x^{-4} dx = \\&= \int (t^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = -\frac{1}{2} \int t dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{4}t^2 + C = \\&= -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2} + C = -\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2} + C.\end{aligned}$$

## 1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

### 1) Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ,  $x = 2\operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

*Пример 28.* Найти интеграл  $\int \frac{dx}{3\sin x + 2}$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{3 \sin x + 2} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 1} = \int \frac{d\left(t + \frac{3}{2}\right)}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{2t + 3 - \sqrt{5}}{2t + 3 + \sqrt{5}} \right| + C = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

**2) Интегралы вида**  $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$  или  $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$ .

а)  $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$  приводится к  $\int R(t) dt$  с помощью подстановки  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ .

б)  $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$  приводится к  $\int (-R(t) dt)$ , если  $\cos x = t$ ,  $\sin x dx = -dt$ .

**3) Интегралы вида**  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ ,  $\int R(\sin^{2k} x, \cos^{2m} x) dx$ .

Если подынтегральная функция зависит только от  $\operatorname{tg} x$  или только от  $\sin x$  и  $\cos x$ , входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

*Пример 29.*  $\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin^2 x} &= \{ \operatorname{tg} x = t \} = \int \frac{dt}{\left( 3 + \frac{t^2}{1+t^2} \right) (1+t^2)} = \int \frac{dt}{4t^2 + 3} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

#### 4) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а)  $m$  и  $n$  таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности  $n$ -нечетное. Тогда полагаем  $n = 2p + 1$

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^p d \sin x = \{ \sin x = t \} = \int t^m \cdot (1 - t^2)^p dt = \int R(t) dt. \end{aligned}$$

б)  $m$  и  $n$  – неотрицательные, четные числа. Полагаем  $m = 2p$ ,  $n = 2q$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx. \end{aligned}$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие  $\cos 2x$  как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями  $\cos 2x$  интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней  $\cos 2x$  снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида  $\int \cos kx dx$ , которые легко интегрируются.

*Пример 30.* Найти интеграл  $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$ .

*Решение:*

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

*Пример 31.* Найти интеграл  $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 6x)(1 + \cos 6x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 6x) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1 + \cos 12x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{96} \sin(12x) + C. \end{aligned}$$

в)  $m$  и  $n$  – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену  $\operatorname{tg} x = t$  (или  $\operatorname{ctg} x = t$ ).

*Пример 32.* Найти интеграл  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 1)^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \int t^2 (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

**5) Интегралы вида**  $\int \cos mx \cdot \sin nx dx$ ;  $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ ;  $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$  ( $m \neq n$ ).

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \sin mx \cdot \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \\ &= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

*Пример 33.* Найти интеграл  $\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int \sin 4x \cdot \cos 6x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 10x - \sin 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

## 2. Определенный интеграл

### 2.1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте  $[a, b]$  задана функция  $f(x)$ . Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$  разобьем  $[a, b]$  на  $n$  малых сегментов:  $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; \dots; [x_{k-1}, x_k]; \dots; [x_{n-1}, x_n]; x_0 = a, x_n = b$ .

2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку  $\xi_k$ ,  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ , составим произведение  $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ .

3. Составим, так называемую, интегральную сумму всех таких произведений

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма  $J_n$ , когда  $\max \Delta x_k$  стремится к нулю.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Числа  $a$  и  $b$  называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования,  $f(x)$  – подынтегральной функцией, а интервал  $[a,b]$  – областью интегрирования.

Функция  $f(x)$ , для которой существует конечный  $\int_a^b f(x)dx$ , называется интегрируемой на промежутке  $[a,b]$ , причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента  $[a,b]$  на части, ни от выбора точек  $\xi_k$  в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке  $[a,b]$  функция  $f(x)$  является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

1.  $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
2.  $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const.}$
3.  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a, b).$
4. Если  $f(x) \geq 0$  на  $[a,b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
5. Если  $f(x) \leq g(x)$  для  $\forall x \in [a, b]$ , то
  - а)  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$

$$6) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6. Теорема о среднем:  $\exists \xi \in [a, b]$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \text{ где } f(x) \text{ — непрерывна на } [a, b].$$

$$7. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$8. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

## 2.2. Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному. Эта теорема играет фундаментальную роль в математическом анализе (см. подробнее [1] с.397).

### 2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и  $F(x)$  — одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

*Пример 34.* Вычислить  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$ .

*Решение.* Используя формулу Ньютона-Лейбница, а также табличный интеграл 16, получим



$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}.$$

### 2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле

а) Необходимо вычислить интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ ,

где  $f(x)$  непрерывная функция на  $[a, b]$ .

Перейдем к новой переменной  $t$ , полагая  $x = \varphi(t)$ . Пусть  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ , кроме того, при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  значения функции  $\varphi(t)$  не выходят за пределы сегмента  $[a, b]$ . Предположим, что функция  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на промежутке  $[\alpha, \beta]$ , то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

*Пример 35.* Вычислить  $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3} dx$ .

*Решение.* Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x - 2)^2.$$

Введем новую переменную:  $x - 2 = \sin t$ , тогда  $x = 2 + \sin t$ ,  
 $dx = d(2 + \sin t)$  или  $dx = (2 + \sin t)' dt = \cos t dt$ .

Найдем пределы интегрирования новой переменной  $t$ :

$$\text{если } x_1 = 2, \text{ то } 0 = \sin t \Rightarrow t_1 = 0$$

$$\text{если } x_2 = 3, \text{ то } 1 = \sin t \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3} dx &= \int_2^3 \sqrt{1 - (x - 2)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной  $x$  по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

б) Часто вместо замены переменной  $x = \varphi(t)$  употребляют обратную замену переменной  $t = g(x)$ . На конкретном примере покажем, как это делается.

Покажем это на конкретном примере.

*Пример 36.* Вычислить  $\int_1^e \frac{dx}{x(5 + \ln x)}$ .

Решение. Пусть  $t = \ln x$ , тогда  $\frac{1}{x} dx = d \ln x = dt$ .

Если  $x_1 = 1$ , то  $t_1 = \ln 1 = 0$ , если  $x_2 = e$ , то  $t_2 = \ln e = 1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{dx}{x(5 + \ln x)} &= \int_0^1 \frac{d(\ln x)}{5 + \ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5 + t} = \ln |t + 5| \Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 = \\
&= \ln \frac{6}{5} = \ln 1,2.
\end{aligned}$$

### 2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на  $[a, b]$ , тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

*Пример 37.* Вычислить интеграл  $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ .

*Решение.* Применим полученную формулу

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left( \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \\ &= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left( \frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Подробнее о методах интегрирования в определенном интеграле см.[1] с.399-403.

### 3. Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования  $[a, b]$  конечен и функция  $f(x)$  непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

#### 3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , непрерывную на бесконечном промежутке  $[a; +\infty)$ .

Несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a; +\infty)$  называется  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если  $f(x) > 0$  на  $[a; +\infty)$  и  $\int_a^{+\infty} f(x) dx < \infty$ , то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , прямой  $x = a$  и бесконечным интервалом  $[a; +\infty)$ .

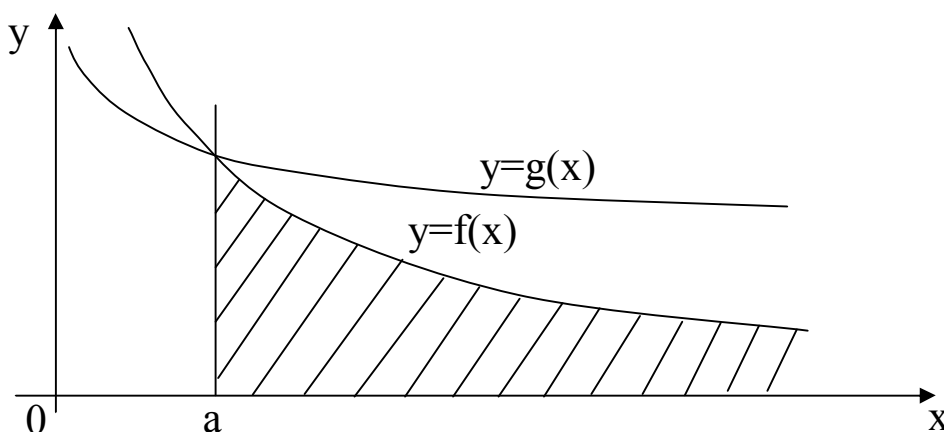


Рис.3.1

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке  $(-\infty; b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx,$$

а на интервале  $(-\infty; +\infty)$  определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где  $c$  – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных

интегралов зависит от скорости убывания функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Так, например,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

В этом легко убедиться, вычислив  $\int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$ , если  $A \rightarrow +\infty$ .

$$\text{Если } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ то } \int_1^A \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^A = \ln A - \ln 1 = \ln A \rightarrow +\infty$$

при  $A \rightarrow \infty$ , поэтому  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^A = -\frac{1}{A} + 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{A} \right) = 1 \quad - \text{ несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями } y = \frac{1}{x^2}, x = 1 \text{ и бесконечным промежутком } [1; +\infty), \text{ является конечной и равна } 1.$$

Пример 38. Исследовать на сходимость несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx$ .

*Решение.* Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx &= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^0 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left( x \cdot e^x \Big|_{\beta}^0 - \int_{\beta}^0 e^x dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x - e^x) \Big|_{\beta}^0 = \\
&= \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (0 - \beta \cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \left( -\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}} \right) = -1.
\end{aligned}$$

Несобственный интеграл сходится.

*Пример 39.* Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$ .

*Решение.* Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем  $c = -2$ .

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^{-2} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-2}^A \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5} = \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(x+2)}{\sqrt{5}} \Big|_B^{-2} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(x+2)}{\sqrt{5}} \Big|_{-2}^A = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{B \rightarrow -\infty} \left( \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} \frac{B+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \pi.
\end{aligned}$$

**Признак сравнения.** Пусть в промежутке  $[a; +\infty)$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходится, то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ . Если интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  также расходится.

**Замечание.** Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

**Пример 40.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}}$ .

**Решение.** Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \leq x < +\infty).$$

Но  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$  сходится, т.к.  $\alpha = 3$  (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

### 3.2 Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет разрыв II рода на  $[a, b]$  либо в точках  $a$  и  $b$ , либо в точке  $c \in (a, b)$ , тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1)  $x = a$  – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx;$$

2)  $x = b$  – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

3)  $x = c$ ,  $c \in (a, b)$ ,  $c$  – точка разрыва, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в промежутках  $[a, b)$  непрерывны, а в точке  $x = b$  имеют разрыв II рода; кроме того

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Если  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то сходится  $\int_a^b f(x) dx$ .

Если  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, то расходится  $\int_a^b g(x) dx$ .

*Пример 41.* Исследовать на сходимость несобственный интеграл  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ .

*Решение.* Функция  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$  в точке  $x = 1$  имеет разрыв II

рода, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x-1} \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x-1} \right) \Big|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{1-\varepsilon-1} + \frac{1}{-1} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{3-1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty + \infty = \infty \end{aligned}$$

Интеграл расходящийся.

*Пример 42.* Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int_0^1 \frac{2x + \operatorname{ch} x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x}} dx.$$

*Решение.* При  $x = 0$  знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно,  $x = 0$  — точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка  $(0; 1]$  подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что  $(2x + \operatorname{ch} x)dx = d(x^2 + \operatorname{sh} x)$ ,



$$\int \frac{2x + \operatorname{ch} x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x}} dx = \int (x^2 + \operatorname{sh} x)^{-\frac{1}{4}} d(x^2 + \operatorname{sh} x) = \{x^2 + \operatorname{sh} x = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x + \operatorname{ch} x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x + \operatorname{ch} x}{\sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^2 + \operatorname{sh} x} \Big|_{\varepsilon}^1 =$$

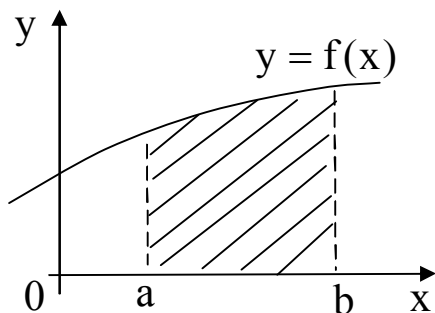
$$= \frac{4}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sqrt[4]{1 + \operatorname{sh} 1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2 + \operatorname{sh} \varepsilon} \right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[4]{1 + \operatorname{sh} 1}.$$

Интеграл сходящийся.

## 4. Приложения определенного интеграла

### 4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

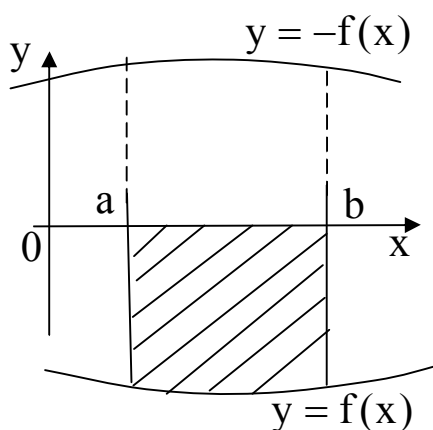
Если задана непрерывная функция  $y = f(x)$  на  $[a, b]$ ,  $f(x) > 0$ , то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (4.1)$$

Рис.4.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием  $[a, b]$  ограничена снизу кривой  $y = f(x)$  (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что



$$S = -\int_a^b f(x)dx \quad (4.2)$$

Рис.4.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)

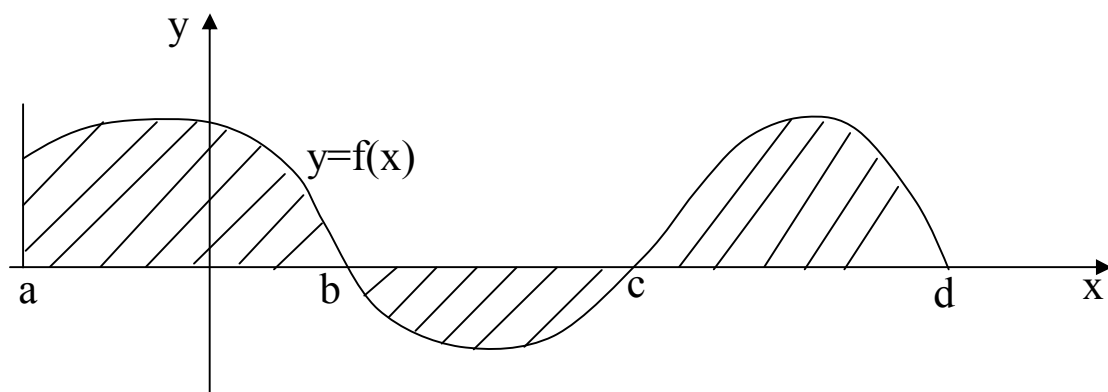
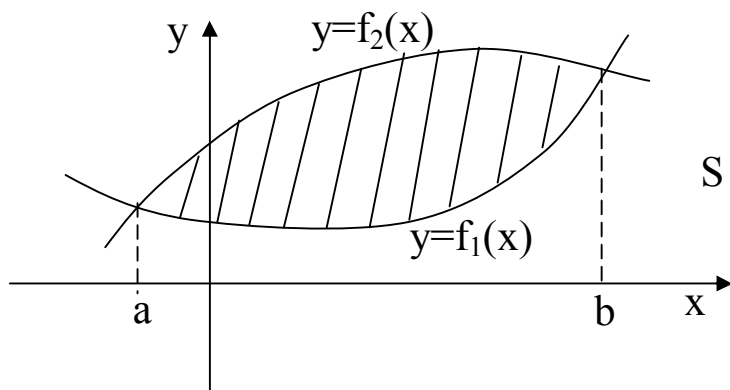


Рис.4.3

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \quad (4.3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \quad (4.4)$$

Рис.4.4

**Пример 43.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$  и  $y = -x$ .

**Решение.**  $y = 2x - x^2$  – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$$y' = 2 - 2x; \quad y' = 0 \quad \text{или} \quad 2 - 2x = 0, \quad x = 1$$

Если  $x_0 = 1$ , то  $y_0 = 2 - 1 = 1$ .  $M_0(1; 1)$  – вершина параболы.

$$y = 0 \quad \text{или} \quad 2x - x^2 = 0 \quad \text{или} \quad x(2 - x) = 0 \quad x = 0; \quad x = 2.$$

$y = -x$  – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$$2x - x^2 = -x \quad \text{или} \quad x^2 - 3x = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \\ &= \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left( 3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

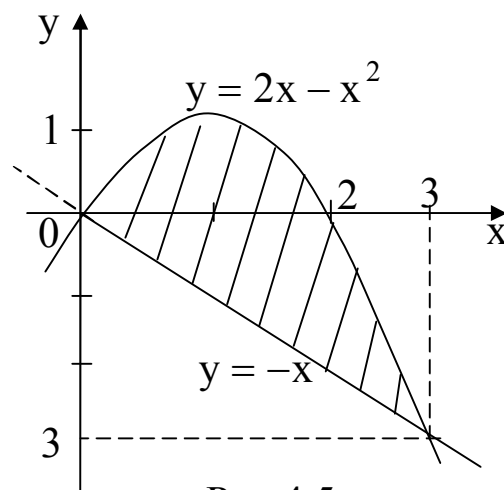


Рис.4.5

**Пример 44.** Вычислить площадь двух частей, на которые круг  $x^2 + y^2 = 8$  разделен параболой  $y^2 = 2x$ .

**Решение.** Сделаем чертеж (рис.4.6)

$x^2 + y^2 = 8$  – окружность с центром в начале координат и радиусом  $R = \sqrt{8}$ .  
 $y^2 = 2x$  – парабола, имеющая вершину в т.О(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

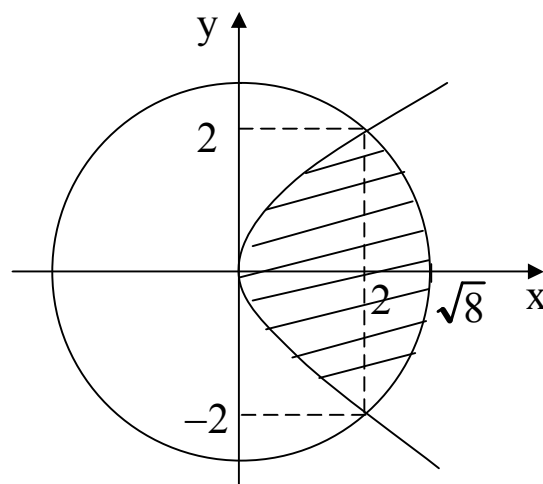


Рис.4.6

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow 8 - x^2 = 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -4; x_2 = 2$$

$x = -4$  – не удовлетворяет условию  $y^2 = 2x$ .

Если  $x = 2$ , то  $y^2 = 4$  или  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 2$ .

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4.4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y)) dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^2 \left( \sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2 \int_0^2 \left( \sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad (\text{=})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{8} \sin t; \quad dy = \sqrt{8} \cos t \, dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8} \sin t, \quad \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$(\text{=}) \quad 2 \int_0^2 \sqrt{8 - y^2} \, dy - \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \int_0^2 \sqrt{8 - y^2} \, dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} \sqrt{8 - 8 \sin^2 t} \cdot \sqrt{8} \cos t \, dt - \frac{8}{3} = 16 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \, dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t) \, dt - \frac{8}{3} = 8 \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2; \quad S_{\text{кр.}} = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{\text{кр.}} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

#### 4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми  $x = a$  и  $y = b$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $OX$ , выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \quad (4.5)$$

где  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $y(t) \geq 0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  определяются из условий  $a = x(t_1)$ ,  $b = x(t_2)$ .

*Пример 45.* Найти площадь фигуры, ограниченной осью  $OX$  и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*Решение.* Воспользуемся формулой (4.5). Предварительно найдем  $x'(t)$ :

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2\pi \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

### 4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости  $M(\varphi, r)$  определяется двумя координатами: полярным радиусом  $r (r \geq 0)$  и полярным углом  $\varphi$ . Связь между декартовыми координатами  $(x, y)$  и полярными  $(\varphi, r)$  осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой  $r = r(\varphi)$  и двумя полярными радиусами  $\varphi_1 = \alpha$  и  $\varphi_2 = \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) (рис.4.7), выражается интегралом

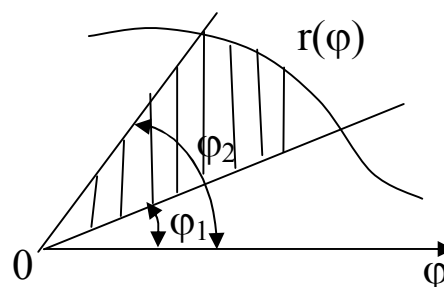


Рис.4.7

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (4.6)$$

**Пример 46.** Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля  $r = 2 + \cos \varphi$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (4.6). Чтобы найти пределы интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$ , необходимо построить чертеж кривой  $r = 2 + \cos \varphi$  в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в таблицу 1.

Таблица 1

$\varphi$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 2 + \cos \varphi$	3	$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция  $\cos \varphi$  – четная, то график функции  $r = 2 + \cos \varphi$  строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка  $\varphi \in (180^\circ, 360^\circ]$ . Для построения

графика функции при  $\varphi \in [0; 180^\circ)$  проводим полярную ось  $r$ ; на лучах, составляющих с осью  $r$  углы, значение которых указано в таблице 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис.4.8).

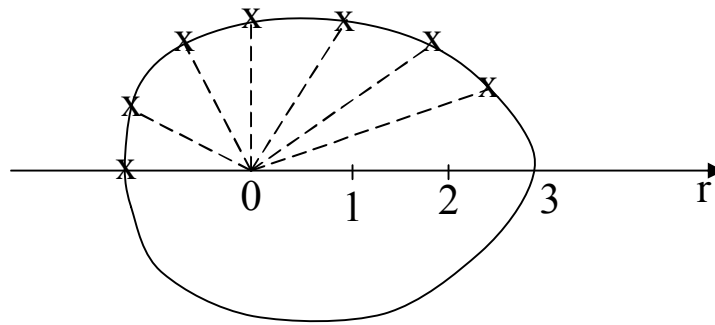


Рис.4.8

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( 4 + 4 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 4,5\varphi + 4 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 4,5\pi \quad (\text{кв.ед.})$$

#### 4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ , тогда длина дуги кривой  $y = f(x)$  на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.7)$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при  $t_1 \leq t \leq t_2$  вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.8)$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах  $r = r(\varphi)$  и  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , то длина ее дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.9)$$

*Пример 47.* Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t - t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

*Решение.* В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (4.8), предварительно находим производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$ .

$$x'(t) = a(\cos t + t \sin t)' = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$y'(t) = a(\sin t - t \cos t)' = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} a \cdot \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} t dt = a \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = a \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2a\pi^2 \text{ (ед.длины)}. \end{aligned}$$

*Пример 48.* Найти длину дуги кривой  $r = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* Кривая  $y = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$  задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой (4.9). Находим  $r'(\varphi)$

$$r' = \left( 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}} \right)' = 3 \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2 + (r')^2 = 9 \cdot \left( r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2 + \frac{81}{16} \cdot \left( r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2 = \frac{225}{16} \cdot \left( r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{225}{16} \cdot \left( r^{\frac{3\varphi}{4}} \right)^2} d\varphi = \frac{15}{4} \int_0^{\pi/3} e^{\frac{3}{4}\varphi} d\varphi = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} e^{\frac{3}{4}\varphi} \Big|_0^{\pi/3} = \\ &= 5 \cdot e^{\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{3}} - 5e^0 = 5 \cdot (e^{\pi/4} - 1) \text{ (ед.длины)}. \end{aligned}$$



#### 4.5. Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси  $OX$ , может быть выражена функцией от  $x$ :  $S = S(x)$  при  $x \in [a, b]$ , тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси  $OX$  плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (4.10)$$

Если криволинейную трапецию (рис.4.10) вращать вокруг оси  $OX$ , то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (4.11)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вращается вокруг оси  $OX$ , то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx, \quad (0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)) \quad (4.12)$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси  $OY$ :

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy, \quad (4.13)$$

$$V_y = 2\pi \int_c^d x \cdot y(x) dx. \quad (4.14)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (4.10 - 4.14) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси (см.рис.5.7), то

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (4.15)$$

*Пример 49.* Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  вокруг оси  $OX$ .

*Решение.* Данная кривая  $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  называется цепной линией. График ее изображен на рис.4.9. Объем тела вращения (рис.4.10) вычислим по формуле (4.11)

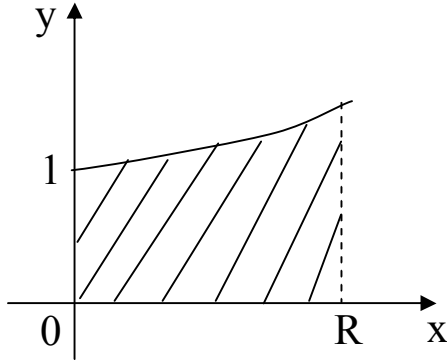


Рис.4.9

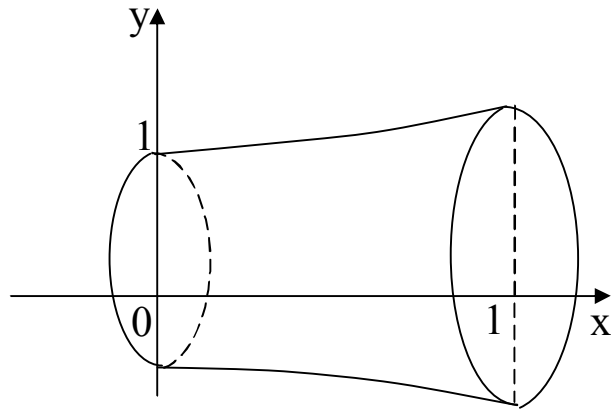


Рис.4.10

$$\begin{aligned}
 V_X &= \pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx = \pi \int_0^1 \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) dx = \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \left( \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \left( \frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \left( 2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \right) = \frac{\pi}{4} (2 - \operatorname{sh} 2).
 \end{aligned}$$

*Пример 50.* Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен  $R$ , а высота –  $H$ .

*Решение.* Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси  $OY$  параболу  $y = kx^2$ ,  $0 \leq y \leq H$  (рис.4.11; 4.12), где параметр  $k$  легко вычислить исходя из данного условия.

Если  $x = R$ , то  $y = H$ , поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2.$$

Далее воспользуемся формулой (4.13)

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y) dy.$$

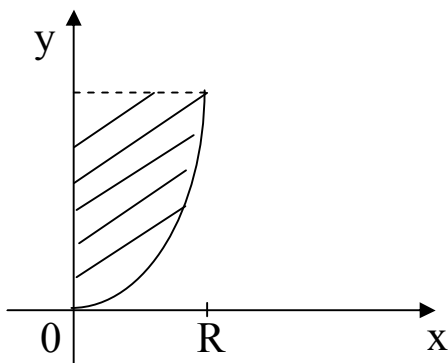


Рис.4.11

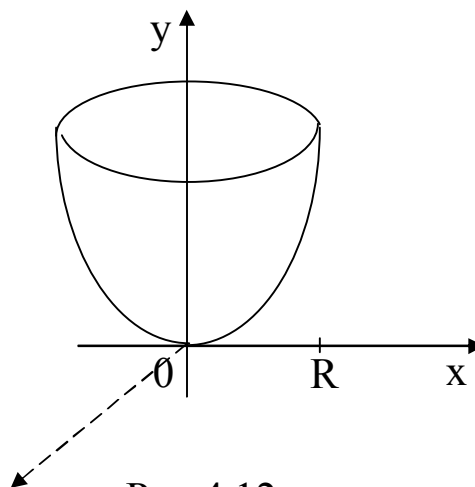


Рис.4.12

Если  $y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2$ , то  $x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot y dy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 H \text{ (ед}^3\text{)}.$$

*Пример 51.* Найти объем тела вращения кривой  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$  вокруг оси ОХ.

*Решение.* Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис.4.13). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем  $V_x$  по формуле (4.11)

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

Если  $x = -3$ , то  $3 \cos t = -3$ ,  $\cos t = -1$ ,  $t_1 = \pi$ .

Если  $x = 3$ , то  $3 \cos t = 3$ ,  $\cos t = 1$ ,  $t_2 = 0$ .

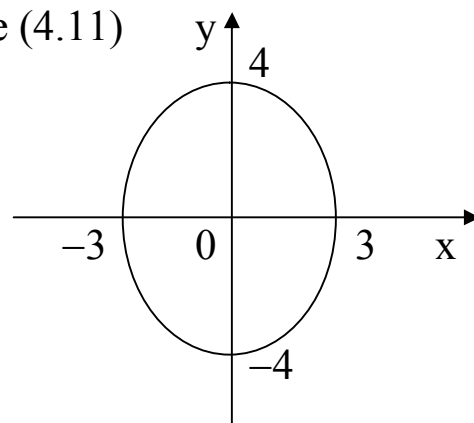


Рис.4.13

$$V_x = \pi \int_{-3}^3 y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 (4 \sin t)^2 d(3 \cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^0 (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$\begin{aligned}
&= 48\pi \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = 48\pi \left( \cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = \\
&= 48\pi \left( -1 + \frac{1}{3} \right) - 48\pi \left( \cos \pi - \frac{\cos^3 \pi}{3} \right) = 48\pi \cdot \frac{2}{3} - 48\pi \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = \\
&= \frac{4}{3} \cdot 48\pi = 64\pi \text{ (куб.ед.)}.
\end{aligned}$$

#### 4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой АВ вокруг оси ОХ, равна

$$Q_X = 2\pi \int_A^B |y| d\ell, \text{ где } d\ell - \text{дифференциал дуги кривой.}$$

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так

$$Q_X = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.16)$$

$$Q_X = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (4.17)$$

$$Q_X = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (4.18)$$

*Пример 52.* Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси ОХ дуги кривой  $3y - x^3 = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

*Решение.*  $3y - x^3 = 0$  или  $y = \frac{1}{3}x^3$

$$y' = \left( \frac{1}{3}x^3 \right)' = x^2$$

Воспользуемся формулой (4.16)

$$Q_x = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 \cdot \sqrt{1 + (x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{3 \cdot 4} \int_0^1 (1 + x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2}{3} (1 + x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{9} \pi (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{9} \pi (2\sqrt{2} - 1).$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр. Подробнее об этом см. [2], Гл. XII, [2] §§6,7,8,9.

### Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. ТТ.1- 2, М.: Интеграл-Пресс, 2001,2002, 2007. - 416с., 544с, 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.